ਗਣਿਤ

(ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਭਾਗ –2

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2017 .... 5,000 ਕਾਪੀਆਂ
ਰੀਵਾਈਜ਼ਡ ਐਡੀਸ਼ਨ 2023 ....

ਸੰਯੋਜਕ : **ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ,** ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : **ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ,** ਆਰਟਿਸਟ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਅਨੁਵਾਦਕ :
* **ਸ਼੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ,** ਲੈਕਚਰਾਰ (ਮੈਥ), ਪਟਿਆਲਾ।
* **ਸ਼੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ,** ਲੈਕਚਰਾਰ (ਮੈਥ), ਰਾਜਪੁਰਾ।
* **ਸ਼੍ਰੀ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਸਿੰਘ,** ਐੱਮ.ਐੱਸ.ਸੀ.(ਮੈਥ) ਜਲੰਧਰ।
* **ਸ਼੍ਰੀਮਤੀ ਬਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ,** ਲੈਕਚਰਾਰ (ਮੈਥ), ਐਸ.ਏ.ਐਸ. ਨਗਰ।

ਮੁੱਲ : ₹

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ...................................... ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

— ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਮ. ਬੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਯਾਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
— ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿੜ੍ਹਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਬੀ. ਐੱਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਇ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

— ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

— ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਆਰ. ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।

— ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ।

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਅਧਿਆਇ 7

ਇਨਟਿਗਰਲ Integrals

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. – JAMES B. BRISTOL* ❖

7.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

G .W. Leibnitz (1646–1716)

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੇ ਕੇਂਦਰਤ ਹੈ। ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਰਣਾ ਸੀ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ, ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਅਰਥਾਤ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ f' ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f' ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਫਲਨ f ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਉਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਉਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ, ਉਹ ਸੂਤਰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਲ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦਾ ਤਤਕਾਲੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਸ ਪਲ ਤੇ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਅਤੇ ਗੈਰ ਅਮਲੀ ਹਲਾਤ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਰਗੀਆਂ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਯਤਨਾਂ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

(a) ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ,

(b) ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫਲਨ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਦੋ ਰੂਪਾਂ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਰੂਪ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਅਮਲੀ ਔਜ਼ਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਵਿੱਤ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਿਕਤਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦਿਲਚਸਪ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੇ ਗੁਣਾਂ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

7.2 ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (Integration as the Inverse Process of Differentiation)

ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮੂਲ ਅਰਥਾਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad \ldots (2)$$

ਅਤੇ
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \ldots (3)$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $\cos x$ ਫਲਨ $\sin x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cos x$ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) $\sin x$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨਾਲ x^2 ਅਤੇ e^x ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{x^3}{3}$ ਅਤੇ e^x ਹੈ। ਇੱਥੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ C, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \mathrm{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right) = x^2 \text{ ਅਤੇ } \frac{d}{dx}(e^x + \mathrm{C}) = e^x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿਲੱਖਣ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਚੁਣ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ C ਨੂੰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ C ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ

ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, ਸਾਰੇ $x \in \mathrm{I}$ (ਅੰਤਰਾਲ)

ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ C, (ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ) ਦੇ ਲਈ $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}] = f(x)$, $x \in \mathrm{I}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇੱਕੋ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵਾਲੇ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ g ਅਤੇ h ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਜਿਸਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall\, x \in \mathrm{I}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f = g - h$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਤਾਂ $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ ਨਾਲ $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ $\forall\, x \in \mathrm{I}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $f'(x) = 0$, ਸਾਰੇ $\forall\, x \in \mathrm{I}$ ਲਈ (ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨਾਲ)

ਜਾਂ I ਵਿੱਚ x ਦੇ ਬਾਬਤ f ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਣਾ ਜਾਇਜ਼ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸੰਕੇਤ, $\int f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪੂਰੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗਾ। ਜਿਸ ਨੂੰ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੰਕੇਤਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $y = \int f(x)\,dx$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸੰਕੇਤਾਂ/ਪਦਾਂ ਵਾਕਾਂਸ ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥਾਂ ਸਮੇਤ ਸਾਰਣੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਨੀ 7.1

ਸੰਕੇਤ/ਪਦ/ਵਾਕਾਂਸ਼	ਅਰਥ
$\int f(x)\,dx$	f ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਨਟਿਗਰਲ
$\int f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ $f(x)$	ਇਨਟੈਗਰੈਂਡ

$\int f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ x	ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਚਲ
ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਕਰਨਾ	ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ
f ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ	ਇੱਕ ਫਲਨ F ਜਿਸਦੇ ਲਈ $F'(x) = f(x)$
ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ	ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ
ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਚਲ	ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤੁਰੰਤ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ Derivatives	**ਇਨਟਿਗਰਲ (ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ) Integrals (Antiderivatives)**
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ	
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + C$
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
(iii) $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
(v) $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
(vii) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C$
(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\cos^{-1}x+C$
(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$
(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\cot^{-1}x+C$
(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}x+C$
(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\mathrm{cosec}^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\mathrm{cosec}^{-1}x+C$
(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$
(xv) $\frac{d}{dx}\left(\log\|x\|\right)=\frac{1}{x}$	$\int\frac{1}{x}dx=\log\|x\|+C$
(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

ਟਿੱਪਣੀ ਅਮਲੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖਾਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

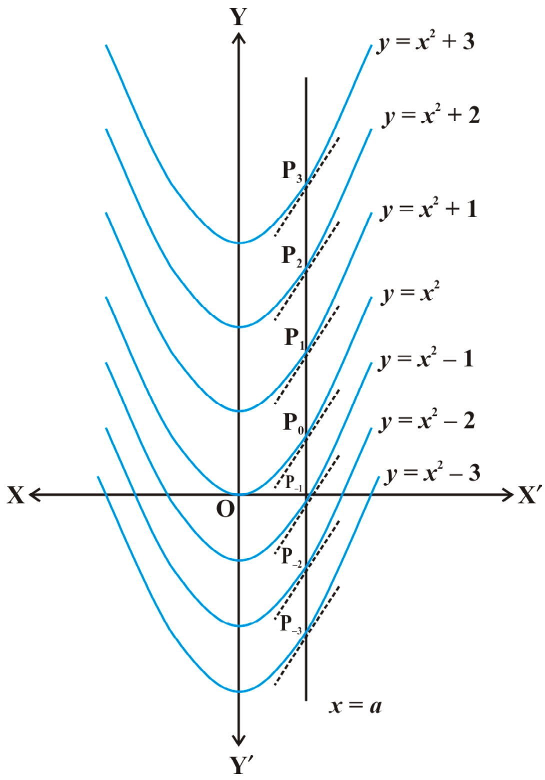
7.2.1 ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ *(Geometrical interpretation of indefinite integral)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਤਾਂ $\int f(x)\,dx = x^2 + C$ ਅਤੇ C ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਭਿੰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਆਮਤਿਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = x^2 + C$, ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ, ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C, ਨੂੰ

ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸਭ ਦਾ ਸਥਾਪਿਤ ਰੂਪ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਹੈ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $C = 0$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $y = x^2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ। $C = 1$ ਦੇ ਲਈ, ਵਕਰ $y = x^2 + 1$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। $C = -1$, ਦੇ ਲਈ ਵਕਰ $y = x^2 - 1$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ C, ਦੇ ਹਰੇਕ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲਈ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ ਅਤੇ C ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$ ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a > 0$ ਲਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਸਿੱਟਾ $a < 0$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ ਰੇਖਾ $x = a$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2, y = x^2 + 1, y = x^2 + 2, y = x^2 - 1, y = x^2 - 2$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ $P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}$ ਆਦਿ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮੁੱਲ $2a$ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ



ਚਿੱਤਰ 7.1

$\int 2x\,dx = x^2 + C = F_C(x)$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਨਾਲ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰਾਂ $y = F_C(x)$, $C \in \mathbf{R}$, ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$, ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਇੱਥੇ $a \in \mathbf{R}$ ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਮੈਂਬਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ

ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਬਦੀਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਇਹੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਹੈ।

7.2.2 *ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ* *(Some properties of indefinite integrals)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ।

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

ਅਤੇ $$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C},$$ ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮਾਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ F, f ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ ਅਰਥਾਤ

$$\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਤਾਂ $$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੈ ਕਿ

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$$

ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਦੋ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮਾਣ ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$$

ਜਾਂ $\int f(x)\, dx - \int g\,(x)\, dx = \text{C}$, ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $\int f(x)\, dx = \int g\,(x)\, dx + \text{C}$

ਇਸ ਲਈ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ $\left\{\int f(x)\, dx + \text{C}_1, \text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$

ਜਾਂ $\left\{\int g(x)\, dx + \text{C}_2, \text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int f(x)\, dx$ ਅਤੇ $\int g(x)\, dx$ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਦੋ ਪਰਿਵਾਰਾਂ $\left\{\int f(x)\, dx + \text{C}_1, \text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$ ਅਤੇ $\left\{\int g(x)\, dx + \text{C}_2, \text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਦੀ ਸਮਤੁਲਨਾ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ $\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx$, ਲਿਖ ਕੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦਾ ਕੋਈ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

ਪ੍ਰਮਾਣ ਗੁਣ (i) ਨਾਲ

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\, dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \text{... (1)}$$

ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx = f(x) + g(x) \qquad \text{... (2)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਰੋਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ (1) ਅਤੇ (2) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

(iv) ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k, ਦੇ ਲਈ $\int k\ f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

ਪ੍ਰਮਾਣ : ਗੁਣ (i) ਨਾਲ $\frac{d}{dx}\int k\ f(x)\, dx = k\ f(x)$

ਅਤੇ $\frac{d}{dx}\left[k \int f(x)\, dx\right] = k \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = k\ f(x)$

ਇਸ ਲਈ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int k\ f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(v) ਗੁਣ (iii) ਅਤੇ (iv) ਦਾ $f_1, f_2, ..., f_n$ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ k_1, k_2, ..., k_n ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2\,(x) + ... + k_n f_n(x)]\,dx$$
$$= k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2\,(x)\,dx + ... + k_n \int f_n(x)\,dx$$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ। ਲੋੜੀਂਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਖੋਜ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

ਹੱਲ :

(i) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\cos 2x$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

ਜਾਂ $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

ਇਸ ਲਈ $\cos 2x$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{2}\sin 2x$ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $3x^2 + 4x^3$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$

ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 4x^3$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $x^3 + x^4$ ਹੈ।

(iii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0$ ਅਤੇ $\frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$

ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$, ਜੋ ਕਿ $\frac{1}{x}$ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\,dx$ (iii) $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\,dx$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੈ :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = \int x\, dx - \int x^{-2}\, dx \qquad \text{(ਗੁਣਾ v ਨਾਲ)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2\right); \quad C_1, C_2 \text{ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਅਚਲ ਹਨ।}$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C_1 - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C, \text{ ਇੱਥੇ } C = C_1 - C_2 \text{ ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਹੈ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸਦੇ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਅਚਲ ਲਿਖਾਂਗੇ।

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

(iii) ਇੱਥੇ $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \text{cosec}\, x\, (\text{cosec}\, x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (\text{cosec}\, x\, (\text{cosec}\, x + \cot x)\, dx = \int \text{cosec}^2 x\, dx + \int \text{cosec}\, x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \text{cosec}\, x + C$$

(iii) ਇੱਥੇ

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $f(x) = 4x^3 - 6$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $F(0) = 3$ ਹੈ।

ਹੱਲ : $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $x^4 - 6x$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\dfrac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$, ਇਸ ਲਈ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F,

$F(x) = x^4 - 6x + C$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਅਚਲ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $F(0) = 3$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $3 = 0 - 6 \times 0 + C$

ਜਾਂ $C = 3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $F(x) = x^4 - 6x + 3$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਫਲਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ ਤਾਂ F + C, ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ, ਵੀ f ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਇੱਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ

ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ F ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਅਚਲ ਜੋੜ ਕੇ f ਦੇ ਅਨੰਤ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ F (x) + C, C $\in$ **R** ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ C ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਕਦੇ-ਕਦੇ F ਨੂੰ ਅਧਾਰੀ ਫਲਨਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬਹੁਪਦ, ਲਘੂਗਣਕ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\int f(x)\, dx$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ : ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int e^{-x^2} dx$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ e^{-x^2} ਹੈ।

(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਚਲ x, ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਸ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਨਵੀਨੀਕਰਨ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + \text{C} = \frac{1}{5} y^5 + \text{C}$$

ਅਭਿਆਸ 7.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਇਨਟਿਗਰਲ) ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4\, e^{3x}$

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\int (4\, e^{3x} + 1)\, dx$ **7.** $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\, dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$

12. $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\, dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\, dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\, dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$ **18.** $\int \sec x\, (\sec x + \tan x)\, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਾ ਚੋਣ ਕਰੋ :

21. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ।

(A) $\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}x^2+C$

(C) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22. ਜਦੋਂ ਕਿ $\dfrac{d}{dx}f(x)=4x^3-\dfrac{3}{x^4}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(2)=0$ ਤਾਂ $f(x)$ ਹੈ :

(A) $x^4+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{129}{8}$ (B) $x^3+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{129}{8}$

(C) $x^4+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{129}{8}$ (D) $x^3+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{129}{8}$

7.3 ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ (Methods of Integration)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ, ਜੋ ਕੁੱਝ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨਾਲ ਸਰਲਤਾਪੂਰਵਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਸਨ। ਇਹ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਵਿਧੀ ਸੀ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ F ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ f ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ f ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਇਹ ਵਿਧੀ ਬਹੁਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਹਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹਨ।

1. ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
2. ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
3. ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

7.3.1 *ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by substitution)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ x ਨੂੰ t ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਲਈ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\,dx$ ਹੋਰ ਰੂਪ

ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{I} = \int f(x)\, dx$$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੁਣ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

ਅਸੀਂ $dx = g'(t)\, dt$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\mathrm{I} = \int f(x)\, dx = \int f\{g(t)\}\, g'(t)\, dt$$

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਚਲ ਬਦਲਣ ਦਾ ਸੂਤਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਉਪਲਬਧ ਔਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਔਜ਼ਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਸਹੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\dfrac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\dfrac{\sin (\tan^{-1} x)}{1 + x^2}$

ਹੱਲ :

(i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ mx ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ m ਹੈ। ਅੰਤ $mx = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿ $mdx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{m}\cos t + \mathrm{C} = -\frac{1}{m}\cos mx + \mathrm{C}$

(ii) $x^2 + 1$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $2x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $x^2 + 1 = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $2x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int 2x \sin (x^2 + 1)\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + \mathrm{C} = -\cos (x^2 + 1) + \mathrm{C}$

(iii) $\sqrt{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$\sqrt{x} = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ ਜਿਸ ਨਾਲੇ $dx = 2t\, dt$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\tan^4 t\sec^2 t\, 2t\,dt}{t} = 2\int \tan^4 t\;\sec^2 t\,dt$

ਫਿਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ $\tan t = u$ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂਕਿ $\sec^2 t\,dt = du$

ਇਸ ਲਈ $2\int \tan^4 t\sec^2 t\,dt = 2\int u^4\,du = 2\frac{u^5}{5} + C$

$$= \frac{2}{5}\tan^5 t + C \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } u = \tan t)$$

$$= \frac{2}{5}\tan^5\sqrt{x} + C \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } t = \sqrt{x})$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}\tan^5\sqrt{x} + C$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ $\tan\sqrt{x} = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ

(iv) $\tan^{-1}x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{1+x^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\tan^{-1}x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਤਾਂ ਕਿ $\frac{dx}{1+x^2} = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1}x) + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਹਵਾਲੇ ਤੋਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

(i) $\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\cos x = t$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\sin x\,dx = -dt$

ਹੁਣ $\int \tan x\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$

ਅਰਥਾਤ $\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\cos x \, dx = dt$

ਤਦ $\int \cot x \, dx = \int \frac{dt}{t}$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$\sec x + \tan x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ $\sec x (\tan x + \sec x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)} dx$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ

ਤਾਂ ਜੋ $-\operatorname{cosec} x (\cot x + \operatorname{cosec} x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| = -\log |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$

$$= -\log \left| \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \right| + C$$

$$= \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx$

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^2 x\, (\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $dt = -\sin x\, dx$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + \text{C}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + \text{C}$$

(ii) $x + a = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = \int \frac{\sin (t-a)}{\sin t}\, dt$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}\, dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a)\left[\log\left|\sin t\right| + \text{C}_1\right]$$

$$= (\cos a)\,(x+a) - (\sin a)\left[\log\left|\sin (x+a)\right| + \text{C}_1\right]$$

$$= x\cos a + a\cos a - (\sin a)\log\left|\sin (x+a)\right| - \text{C}_1 \sin a$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = x\cos a - \sin a \log|\sin (x+a)| + \text{C}$

ਇੱਥੇ $\text{C} = -\text{C}_1 \sin a + a\cos a$, ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

(iii) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੁਣ $\cos x + \sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_2 = \log |\cos x + \sin x| + C_2$

I ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

ਅਭਿਆਸ 7.2

1 ਤੋਂ 37 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

4. $\sin x \sin (\cos x)$ **5.** $\sin (ax+b) \cos (ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2 (2x - 3)$ **22.** $\sec^2 (7 - 4x)$ **23.** $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 38 ਅਤੇ 39 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

38. $\displaystyle\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10} dx}{x^{10} + 10^x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log (10^x + x^{10}) + C$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 *ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ* (*Integration using trigonometric identities*)

ਜਦੋਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਤਤਸਮਕ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) ਤਤਸਮਕ $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin (x+y) + \sin (x-y)]$, ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਕਿਉਂ)

ਤਦ $$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) ਤਤਸਮਕ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\sin x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\int \sin^3 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 7.3

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\sin^2 (2x + 5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3 (2x + 1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x+\sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1} (\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos (x-a) \cos (x-b)}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $-\cot (ex^x) + C$ (B) $\tan (xe^x) + C$

(C) $\tan (e^x) + C$ (D) $\cot (e^x) + C$

7.4 ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ (Integrals of Some Particular Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ **(2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ **(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ **(6)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(1) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\displaystyle\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) ਉਪਰੋਕਤ (1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{a-x} + \int\frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}[-\log|a-x| + \log|a+x|] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

ਟਿੱਪਣੀ (1) ਵਿੱਚ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਭਾਗ 7.5 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

(3) ਮੰਨ ਲਓ $x = a \tan \theta$ ਤਦ $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta \, d\theta}{a^2 \tan^2\theta + a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) ਮੰਨ ਲਓ $x = a \sec\theta$ ਤਦ $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C_1$$

$$= \log\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$, ਇੱਥੇ $C = C_1 - \log|a|$

(5) ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x = a \sin \theta$ ਤਦ $dx = a \cos \theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(6) ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x = a \tan \theta$ ਤਦ $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 \tan^2\theta + a^2}}$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|(\sec\theta + \tan\theta)\right| + C_1$$

$$= \log\left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\text{, ਇੱਥੇ } C = C_1 - \log|a|$$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਪੱਖ ਨਾਲ ਉਪਯੋਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(7) ਇਨਟਿਗਰਲ $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $x+\frac{b}{2a}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$ ਅਤੇ $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਇਨਟਿਗਰਲ $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ (7) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$, ਜਿੱਥੇ p, q, a, b, c ਅਚਲ ਹਨ, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੈ ਤਾਂਕਿ

$$px + q = A\,\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + B = A\,(2ax+b) + B$$

A ਅਤੇ B, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। A ਅਤੇ B ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(10) $\int\frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ (9) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ, ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4 (1) ਨਾਲ]

(ii) $\int \frac{dx}{2x-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$x-1=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t)+C$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$$= \sin^{-1}(x-1)+C$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13 = (x-3)^2 + 4$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x-3=t$ ਤਾਂ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}+C$ [7.4 (3) ਨਾਲ]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2}+C$$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7.4(7) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right]$$ (ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਤੇ)

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

ਹੁਣ $\displaystyle x+\frac{13}{6} = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$$= \frac{1}{3\times 2\times \frac{17}{6}} \log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right| + C_1$$ [7.4 (i) ਤੋਂ]

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right| + C_1 = \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C, \text{ where } C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) ਇੱਥੇ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$ (ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਲਈ)

ਹੁਣ $x-\frac{1}{5}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \qquad [7.4\ (4)\ \text{ਨਾਲ}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

ਹੱਲ :

(i) ਸੂਤਰ 7.4(9) ਦਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$x + 2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right) + B = A\,(4x+6) + B$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$4A = 1$ ਅਤੇ $6A + B = 2$ ਭਾਵ $A = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $B = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2}I_2 \quad (\text{ਮੰਨ ਲਉ}) \qquad \ldots (1)$$

I_1 ਵਿੱਚ $2x^2 + 6x + 5 = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $(4x + 6)\,dx = dt$ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1 = \log|2x^2+6x+5| + C_1 \qquad \ldots (2)$$

ਅਤੇ $\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

ਹੁਣ $x+\frac{3}{2}=t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\tan^{-1}2t + \mathrm{C}_2 \qquad \text{[7.4 (3) ਨਾਲ]}$$

$$= \tan^{-1}2\left(x+\frac{3}{2}\right) + \mathrm{C}_2 = \tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C}_2 \qquad \text{... (3)}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਦੀ ਵਰਤੋਂ (1) ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C},$$

ਜਿੱਥੇ $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{4}+\frac{\mathrm{C}_2}{2}$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7.4 (10) ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $x+3$

$$x+3 = \mathrm{A}\,\frac{d}{dx}(5-4x-x^2) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(-4-2x) + \mathrm{B}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$-2\mathrm{A} = 1$ ਅਤੇ $-4\mathrm{A} + \mathrm{B} = 3$,

ਅਰਥਾਤ $\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\mathrm{B} = 1$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \qquad \text{... (1)}$$

I_1, ਵਿੱਚ $5-4x-x^2 = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $(-4-2x)\,dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I}_1 = \int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + \mathrm{C}_1$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + C_1 \qquad \ldots (2)$$

ਹੁਣ $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

$x + 2 = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + C_2$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C_2 \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ (1) ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C \text{ ਜਿੱਥੇ } C = C_2 - \frac{C_1}{2}$$

ਅਭਿਆਸ 7.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 23 ਤੱਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\dfrac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 24 ਤੋਂ 25 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

24. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $x \tan^{-1}(x+1) + C$ (B) $\tan^{-1}(x+1) + C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x + C$ (D) $\tan^{-1}x + C$

25. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{9}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Partial Fractions)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ਦੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $P(x)$ ਅਤੇਂ $Q(x)$, ਚਲ x ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $Q(x) \neq 0$. ਜਦਕਿ $P(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $Q(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ਅਣਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, ਇੱਥੇ $T(x)$ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਸੇ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਧੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਨ ਦੇ ਨਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਪਹਿਲਾਂ ਪਤਾ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 7.2 ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਕਿ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਰਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 7.2

ਲੜੀ ਨੰ:	ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਰੂਪ	ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸਮਾਂ
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦਾ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (i)], ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}, \text{ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ} \qquad \ldots (1)$$

ਇੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$A + B = 0$$

ਅਤੇ $$2A + B = 1$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $A = 1$ ਅਤੇ $B = -1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-1}{x+2}$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਜੋ x ਦੇ ਸਾਰੇ (ਯੋਗ) ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਸੰਕੇਤ $\equiv$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤ = ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ x ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $x^2 + 1$ ਨੂੰ $x^2 - 5x + 6$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

ਜਦੋਂ ਕਿ $$5x - 5 = A(x-3) + B(x-2)$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A + B = 5$ ਅਤੇ $3A + 2B = 5$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ A = – 5 ਅਤੇ B = 10 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਸਾਰਣੀ 7.2 (4) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜਦੋਂ ਕਿ $3x - 2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$

$$= A(x^2 + 4x + 3) + B(x+3) + C(x^2 + 2x + 1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਾਂ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $A + C = 0$, $4A + B + 2C = 3$ ਅਤੇ $3A + 3B + C = -2$ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A = \frac{11}{4}, B = \frac{-5}{2}$ ਅਤੇ $C = \frac{-11}{4}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $x^2 = y$ ਰੱਖੋ

ਤਾਂ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਜਦੋਂ ਕਿ
$$y = A(y+4) + B(y+1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A + B = 1$ ਅਤੇ $4A + B = 0$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A = -\frac{1}{3} \text{ ਅਤੇ } B = \frac{4}{3}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸੁਮੇਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $\displaystyle\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5-\cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin\phi$

ਤਦ
$$dy = \cos\phi \; d\phi$$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5-\cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\, dy}{5-(1-y^2)-4y}$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy = \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = \text{I} \qquad \text{(ਮੰਨ ਲਉ)}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\dfrac{3y-2}{(y-2)^2} = \dfrac{\text{A}}{y-2} + \dfrac{\text{B}}{(y-2)^2}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (2) ਨਾਲ]

ਇਸ ਲਈ $3y - 2 = \text{A}\,(y - 2) + \text{B}$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\text{A} = 3$ ਅਤੇ $\text{B} - 2\text{A} = -2$, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ $\text{A} = 3$ ਅਤੇ $\text{B} = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{I} = \int \left[\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}\right] dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|y-2| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + \text{C} = 3\log|\sin\phi - 2| + \frac{4}{2-\sin\phi} + \text{C}$$

$$= 3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + \text{C} \quad \text{(ਕਿਉਂਕਿ } 2-\sin\phi \text{ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 2.2(5)]।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{\text{A}}{x+2} + \frac{\text{B}x+\text{C}}{(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + x + 1 = \text{A}\,(x^2 + 1) + (\text{B}x + \text{C})\,(x + 2)$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\text{A} + \text{B} = 1$, $2\text{B} + \text{C} = 1$ ਅਤੇ $\text{A} + 2\text{C} = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\text{A} = \frac{3}{5}, \text{B} = \frac{2}{5}, \text{C} = \frac{1}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx = \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{1}{5}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

ਅਭਿਆਸ 7.5

1 ਤੋਂ 21 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\frac{1}{x^2-9}$ **3.** $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\frac{2x}{x^2+3x+2}$

6. $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$ **7.** $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

9. $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ **10.** $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

12. $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ **13.** $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$

15. $\frac{1}{x^4-1}$ **16.** $\frac{1}{x(x^n+1)}$ [ਸੰਕੇਤ : ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ x^{n-1} ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ $x^n = t$ ਰੱਖੋ]

17. $\frac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [ਸੰਕੇਤ : $\sin x = t$ ਰੱਖੋ]

18. $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\frac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x - 1)}$ [ਸੰਕੇਤ : $e^x = t$ ਰੱਖੋ]

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)| + C$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log|x| - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (B) $\log|x| + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(C) $-\log|x| + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (D) $\dfrac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

7.6 ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Parts)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ x (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ u ਅਤੇ v ਦੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ ਡਿਫਰੈਸੇਸ਼ਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

ਭਾਵ
$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $u = f(x)$ ਅਤੇ $\dfrac{dv}{dx} = g(x)$ ਤਦ

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ ਅਤੇ } v = \int g(x)\, dx$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [\int g(x)\, dx\; f'(x)]\, dx$$

ਭਾਵ
$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [f'(x) \int g(x)\, dx]\, dx$$

ਜੇ ਅਸੀਂ f ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ g ਨੂੰ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਮੁੱਲ ਲਈਏ ਤਾਂ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ = (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ) — [(ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ)] ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

ਉਦਾਹਰਣ 17. $\int x \cos x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $f(x) = x$ (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ (ਦੂਜਾ ਫਲਨ) ਰੱਖੋ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx]\, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + \mathrm{C}$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = x$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int x \cos x\, dx = \cos x \int x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int x\, dx]\, dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2}\, dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int x \cos x\, dx$, ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਨਾਲ x ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਔਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਚੋਣ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਇਹ ਜ਼ਿਕਰਯੋਗ ਹੈ, ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ $\int \sqrt{x} \sin x\, dx$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\sqrt{x}\ \sin x$ ਹੈ।
2. ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ

ਨਹੀਂ ਜੋੜਿਆ ਸੀ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ cos x ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ sin x + k, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ, ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ, ਤਦ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਜੋੜਨਾ ਗੈਰ-ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

$$\int x \cos x \, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x \, dx - \int k \, dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + \mathrm{C} = x \sin x + \cos x + \mathrm{C}$$

3. ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ x ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ ਜਾਂ x ਦਾ ਬਹੁਪਤਦ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜਾਂ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. $\int \log x \, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਅਯੋਗ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ log x ਹੈ। ਅਸੀਂ log x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ x ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\int (\log x \cdot 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$

$$= \log x \,.\, x - \int \frac{1}{x}\, x \, dx = x \log x - x + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. $\int x e^x dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਓ।

ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $= e^x$

ਇਸ ਲਈ $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 . e^x dx = xe^x - e^x + \mathrm{C}$

ਉਦਾਹਰਣ 20. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ $= \sin^{-1} x$, ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$t = 1 - x^2 \text{ ਰੱਖੋ ਤਦ}$$

ਹੁਣ $$dt = -2x\, dx$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{1-x^2})\, dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + C$$

ਵਿਕਲਪ $\sin^{-1} x = \theta$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਤੇ ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਇਸ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\int e^x \sin x\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : e^x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $\sin x$ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (ਮੰਨ ਲਉ)} \qquad \ldots (1)$$

I_1 ਵਿੱਚ e^x ਅਤੇ $\cos x$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

I_1 ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ ਅਤੇ } 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

ਇਸ ਲਈ $$I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

ਵਿਕਲਪ : $\sin x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਣ ਤੇ ਵੀ ਉਪਰੋਕਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= I_1 + \int e^x f'(x)\, dx, \text{ ਜਿੱਥੇ } I_1 = \int e^x f(x)\, dx \qquad \ldots (1)$$

I_1 ਵਿੱਚ $f(x)$ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x dx + C$

I_1 ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

ਇਸ ਲਈ $$\int e^x \left(f(x) + f'(x) \right) dx = e^x f(x) + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

ਹੁਣ $f(x) = \tan^{-1} x$, ਲਉ, ਤਦ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ $e^x [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = e^x \tan^{-1} x + C$$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x [\frac{x^2 - 1 + 1 + 1)}{(x+1)^2}]\, dx$$

$$= \int e^x [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx = \int e^x [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ਹੁਣ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ $e^x [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + C$$

ਅਭਿਆਸ 7.6

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1} x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x \cos^{-1} x$ **10.** $(\sin^{-1} x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1} x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2 + 1) \log x$

16. e^x (sin$x$ + cos$x$) **17.** $\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\,e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 23 ਅਤੇ 24 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

23. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+\text{C}$ (B) $\dfrac{1}{3}e^{x^2}+\text{C}$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{x^3}+\text{C}$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\text{C}$

24. $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $e^x\cos x + \text{C}$ (B) $e^x\sec x + \text{C}$

(C) $e^x\sin x + \text{C}$ (D) $e^x\tan x + \text{C}$

7.6.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਕਿਸਮਾਂ (Integrals of some more types)*

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕੁੱਝ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\text{I}=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\text{I} = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2}-\text{I}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $2\mathrm{I} = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

ਅਰਥਾਤ $\mathrm{I} = \int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \mathrm{C}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈ ਕੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

(ii) $\int\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + \mathrm{C}$

(iii) $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \mathrm{C}$

ਵਿਕਲਪ : ਇਨਟਿਗਰਲ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x = a\sec\theta$, $x = a\tan\theta$ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ $x = a\sin\theta$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. $\int\sqrt{x^2 + 2x + 5}\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int\sqrt{x^2 + 2x + 5}\,dx = \int\sqrt{(x+1)^2 + 4}\,dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

$$\int\sqrt{x^2 + 2x + 5}\,dx = \int\sqrt{y^2 + 2^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 4} + \frac{4}{2}\log\left|y + \sqrt{y^2 + 4}\right| + \mathrm{C} \quad \text{[7.6.2 (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2\log\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right| + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. $\int\sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int\sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx = \int\sqrt{4 - (x+1)^2}\,dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int\sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx = \int\sqrt{4 - y^2}\,dy$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} + C \text{ [7.6.2 (iii) ਦੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

ਅਭਿਆਸ 7.7

1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 10 ਅਤੇ 11 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

11. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

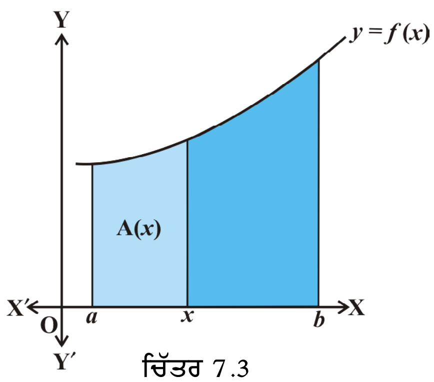
7.7 *ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ* (Definite Integral)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ Ü»ç ÅÔÈÇÜ¼×ÅÌ b, ਇਨਟਿਰਗਲ ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਅਤੇ a, ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਾਂ ਜਦੋਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ F ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਅਰਥਾਤ $F(b) - F(a)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਰੂਪਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

7.8 ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Calculus)

7.8.1 *ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ (Area function)*

ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ, ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $\int_a^x f(x)\,dx$ ਚਿੱਤਰ 7.3 ਵਿੱਚ ਹਲਕਾ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f(x) > 0$ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਕਥਨ ਹੋਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.3

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਛਾਇਆ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, x ਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ $A(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਫਲਨ $A(x)$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\mathbf{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \dots (1)$$

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਦੋ ਆਧਾਰਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹਨ। ਪਰ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਸਿਰਫ ਇਸ ਦਾ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

7.8.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* *(First fundamental theorem of integral calculus)*

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $A(x)$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $x \in [a, b]$ ਸਾਰੇ ਦੇ ਲਈ $A'(x) = f(x)$

7.8.3 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* *(Second fundamental theorem of integral calculus)*

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int_a^b f(x)\,dx =$ (f ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਦਾ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ b ਤੇ ਮੁੱਲ) – (ਉਸੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ a ਤੇ ਮੁੱਲ)।
2. ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਵਿਧੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।
4. $\int_a^b f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ, $[a, b]$ ਦੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਯੋਗ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਗਲਤ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[-2, 3]$ ਦੇ ਭਾਗ $-1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ ਦੁਆਰਾ

ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਦਮ

(Steps for calculating $\int_a^b f(x)\,dx$)

(i) ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ $F(x)$ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਲੈਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $F(x)$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $F(x) + C$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ, ਗਾਇਬ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਕਿ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\,dt$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_2^3 x^2\,dx$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = dt$ ਅਰਥਾਤ $\sqrt{x}\,dx = -\frac{2}{3}dt$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2} dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right] = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(9) - \mathrm{F}(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)\,(x+2)}$

ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x\,dx}{(x+1)\,(x+2)} = -\log|\,x+1\,| + 2\log|\,x+2\,| = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$\mathrm{I} = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) ਮੰਨ ਲਉ, $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\,dt$. ਹੁਣ $\int \sin^3 2t \cos 2t\,dt$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$\sin 2t = u$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\cos 2t\,dt = du$ ਭਾਵ $\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\,du$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^3 2t \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = \mathrm{F}(t)$ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

ਅਭਿਆਸ 7.8

1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ **2.** $\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_{1}^{2}(4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$ **6.** $\int_{4}^{5}e^x\,dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{cosec} x\,dx$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ **13.** $\int_{2}^{3}\frac{x\,dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$ **15.** $\int_{0}^{1}x\,e^{x^2}\,dx$

16. $\int_{1}^{2}\frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x+x^3+2)\,dx$

18. $\int_{0}^{\pi}(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2})\,dx$ **19.** $\int_{0}^{2}\frac{6x+3}{x^2+4}\,dx$

20. $\int_{0}^{1}(x\,e^x+\sin\frac{\pi x}{4})\,dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{4+9x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਦਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

1. ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਬਾਰੇ, ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਅਰਥਾਤ $x = g(y)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਜਾਣੀ ਪਛਾਣੀ ਕਿਸਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਏ।
2. ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਦੀ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਨਵੇਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ, ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।
3. ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਮੂਲ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
4. ਕਦਮ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਉੱਤਰ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਦਮ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਕਦਮ (3) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਆਖਰੀ ਕਦਮ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਆਉ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $t = x^5 + 1$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 5x^4\,dx$

ਇਸ ਲਈ $$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ਵਿਕਲਪ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਤਾਂ ਬਦਲੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਨਵੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ $t = x^5 + 1$. ਤਦ $dt = 5\,x^4\,dx$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

ਜਦ $x = -1$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = 2$

ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, – 1 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ-ਤਿਵੇਂ t, 0 ਤੋਂ 2 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 27. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = \tan^{-1}x$, ਤਦ $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$. ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = \frac{\pi}{4}$ ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ-ਤਿਵੇਂ t, 0 ਸੇ $\frac{\pi}{4}$ ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

ਅਭਿਆਸ 7.9

1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\,\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ ($x + 2 = t^2$ ਰੱਖੋ) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}\,dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਤੋਂ 10 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

9. ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$, ਤਦ $f'(x)$ ਹੈ :

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$ (C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Some Properties of Definite Integrals)

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਸੂਚੀ ਬੱਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੁਣ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦੀ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋਣਗੇ।

P$_0$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P$_1$: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int_a^a f(x)dx = 0$

P$_2$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

P$_3$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

P$_4$: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ P$_4$, P$_3$ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ)

P$_5$: $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$

P$_6$: $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$ ਜਦੋਂ $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, ਜਦਕਿ $f(2a-x) = -f(x)$

P$_7$: (i) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਜਿਸਤ f ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦਕਿ $f(-x) = -f(x)$

ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

P$_0$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ $x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਸਿੱਧੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

P$_1$ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ , ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦ $a = b$, ਤਾਂ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P$_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ, ਤਦ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \ldots (1)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \quad \ldots (2)$$

ਅਤੇ

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c) \quad \ldots (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ਇਸ ਤੋਂ ਗੁਣਧਰਮ P_2 ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

P_3 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = a + b - x$. ਤਦ $dt = -dx$. ਜਦ $x = a$ ਤਦ, $t = b$ ਅਤੇ ਜਦ $x = b$ ਤਦ $t = a$. ਇਸ ਲਈ

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (\mathrm{P}_1 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad (\mathrm{P}_0 \text{ ਤੋਂ})$$

P_4 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : $t = a - x$ ਰੱਖੋ ਅਤੇ P_3 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧੋ। ਹੁਣ $dt = -dx$, ਜਦ $x = a$, $t = 0$

P_5 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : P_2, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = 2a - x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ, ਤਦ $dt = -dx$ ਅਤੇ ਜਦ $x = a$, ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 2a$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = 2a - t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਦੂਸਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

P_6 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : P_5, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \quad \dots (1)$$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a - x) = f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a - x) = -f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ

P_2 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = -x$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$dt = -dx$ ਜਦ $x = -a$ ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 0$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = -t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (P_0 \text{ ਤੋਂ}) \quad \ldots (1)$$

(i) ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ f ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(-x) = f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) ਜਦਕਿ f ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(-x) = -f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. $\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $[-1, 0]$ ਤੇ $x^3 - x \geq 0$ ਅਤੇ $[0, 1]$ ਅਤੇ $x^3 - x \leq 0$ ਤੇ $[1, 2]$ ਅਤੇ $x^3 - x \geq 0$ ਤਦ ਅਸੀਂ ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 -(x^3 - x)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx \quad (P_2 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 29. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin^2 x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx \qquad [P_7 \text{ (1) ਨਾਲ}]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 30. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ
$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)\, dx}{1+\cos^2(\pi - x)} \qquad (P_4 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - \mathrm{I}$$

ਅਰਥਾਤ
$$2\,\mathrm{I} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ
$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\sin x\, dx = dt$

ਜਦੋਂ $x = 0$ ਤਦ $t = 1$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \pi$ ਤਦ $t = -1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\mathrm{I} = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \qquad (P_1 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \text{ ਕਿਉਂਕਿ } \frac{1}{1+t^2} \text{ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ} \qquad (P_7 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 31. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਅਤੇ $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

ਤਦ $f(-x) = \sin^5(-x)\cos^4(-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$, ਅਰਥਾਤ f ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I} = 0$ [P_7 (ii) ਨਾਲ]

ਉਦਾਹਰਣ 32. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \qquad \ldots (1)$$

ਤਦ $$\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4(\frac{\pi}{2} - x)} dx \qquad (P_4 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \qquad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \qquad \ldots (1)$$

ਤਦ $$\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}} \qquad (P_3 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $2\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I} = \frac{\pi}{12}$

ਉਦਾਹਰਣ 34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

ਤਦ $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$ (P_4 ਨਾਲ)

I, ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx \quad (\log 2 \text{ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx \qquad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $2x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\, dx = dt$ ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \frac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $t = \pi$

ਇਸ ਲਈ $2\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad [P_6 \text{ ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ } \sin(\pi - t) = \sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad (\text{ਚਲ } t \text{ ਨੂੰ } x \text{ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ})$$

$$= \mathrm{I} - \frac{\pi}{2}\log 2$$

ਇਸ ਲਈ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{-\pi}{2}\log 2$

ਅਭਿਆਸ 7.10

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 1 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ **5.** $\int_{-5}^{5} |x+2| \, dx$ **6.** $\int_2^8 |x-5| \, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) \, dx$ **9.** $\int_0^2 x\sqrt{2-x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log \sin x - \log \sin 2x) \, dx$ **11.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1+\sin x}$ **13.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$ **14.** $\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x} dx$ **16.** $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x) \, dx$ **17.** $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

18. $\int_0^4 |x-1| \, dx$

19. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\int_0^a f(x)g(x) \, dx = 2\int_0^a f(x) \, dx$, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਅਤੇ g ਨੂੰ $f(x) = f(a-x)$ ਅਤੇ $g(x) + g(a-x) = 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 20 ਅਤੇ 21 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

20. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1) \, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) -2

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 35. $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $t = 1 + \sin 6x$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 6 \cos 6x\, dx$

ਇਸ ਲਈ $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$

ਹੁਣ $1-\frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\frac{3}{x^4}dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + \mathrm{C} = \frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 37. $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)\,(x^2+1)}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)} \qquad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{(x-1)} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{(x^2+1)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ... (2)

$$1 = \text{A}\ (x^2 + 1) + (\text{B}x + \text{C})\ (x - 1)$$
$$= (\text{A} + \text{B})\ x^2 + (\text{C} - \text{B})\ x + \text{A} - \text{C}$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\text{A} + \text{B} = 0, \text{C} - \text{B} = 0$ ਅਤੇ $\text{A} - \text{C} = 1$, ਜਿਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\text{A} = \frac{1}{2}, \text{B} = \text{C} = -\frac{1}{2}$

A, B ਅਤੇ C ਦਾ ਮੁੱਲ (2) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \text{... (3)}$$

(3) ਅਤੇ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x^4}{(x-1)\,(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ

$$\int \frac{x^4}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|\,x-1\,| - \frac{1}{4}\log\,(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 38. $\int \left[\log\,(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\text{I} = \int \left[\log\,(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$$= \int \log\,(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

ਆਉ, ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\text{I} = x\log\,(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}\,x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log\,(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \text{... (1)}$$

ਫਿਰ $\int \frac{dx}{\log x}$, ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰੋ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \qquad \ldots (2)$$

(2) ਅਤੇ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$\mathrm{I} = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਨ 39. $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਕਿ $\mathrm{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}(1 + \cot x)\, dx$

ਹੁਣ $\tan x = t^2$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

ਅਰਥਾਤ $dx = \dfrac{2t\, dt}{1+t^4}$

ਹੁਣ $$\mathrm{I} = \int t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

ਤਦ $t - \dfrac{1}{t} = y$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) dt = dy$

ਤਦ $$\mathrm{I} = 2\int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} + \mathrm{C} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

$$= \sqrt{2} \tan^{-1}\left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}\, t}\right) + \mathrm{C} = \sqrt{2} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2 \tan x}}\right) + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 40. $\int \frac{\sin 2x \cos 2x \, dx}{\sqrt{9-\cos^4(2x)}}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}} dx$

ਹੁਣ $\cos^2(2x) = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਤਾਂ ਕਿ $4 \sin 2x \cos 2x \, dx = -dt$

ਇਸ ਲਈ $$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, -1 \le x \le 1 \text{ ਦੇ ਲਈ} \\ -x \sin \pi x, 1 \le x \le \frac{3}{2} \text{ ਦੇ ਲਈ} \end{cases}$

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 42. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$

(P_4 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \text{I}$$

ਇਸ ਲਈ $$2\text{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ $$\text{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(P_6 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right]$$

($\tan x = t$ ਅਤੇ $\cot x = u$ ਰੱਖੋ।)

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x \, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosec^2 x \, dx}{a^2 \cot^2 x + b^2} \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 + t^2} - \int_1^0 \frac{dt}{a^2 u^2 + b^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{bt}{a} \right]_0^1 - \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{au}{b} \right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{b}{a} + \tan^{-1} \frac{a}{b} \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

ਅਭਿਆਸ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $\dfrac{1}{x - x^3}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

3. $\dfrac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [ਸੰਕੇਤ : $x = \dfrac{a}{t}$ ਰੱਖੋ] **4.** $\dfrac{1}{x^2 (x^4 + 1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [ਸੰਕੇਤ: $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$ ਰੱਖੋ]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\ e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$

19. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **20.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ **21.** $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

22. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

24 ਤੋਂ 31 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

24. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **25.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

27. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **29.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^4\left(|x-1|+|x-2|+|x-3|\right)dx$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਸ਼ਨ 32 ਤੋਂ 37 ਤੱਕ)।

32. $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2(x+1)}=\frac{2}{3}+\log\frac{2}{3}$ **33.** $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x dx=1$

34. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **35.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx = 1 - \log 2$

37. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$

38 ਤੋਂ 40 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

38. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\tan^{-1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$

(C) $\log(e^x - e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

39. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

40. ਜਦੋਂ ਕਿ $f(a + b - x) = f(x)$, ਤਾਂ $\int_a^b x\,f(x)\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\,dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\,dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਰਥਾਤ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜੋ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਹੈ

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$. ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਜਿਆਮਿਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ, ਸਮਿਤੀ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ।

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k, ਦੇ ਲਈ $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

   ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, ਫਲਨ ਹੈ, ਅਤੇ $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

   $$\int [k_1\, f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

   $$= k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\,dx$$

- **ਕੁੱਝ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲ**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$, $n \neq -1$. ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int dx = x + \mathrm{C}$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x + \mathrm{C}$

(iii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathrm{C}$

(iv) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + \mathrm{C}$

(v) $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + \mathrm{C}$

(vi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + \mathrm{C}$

(vii) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + \mathrm{C}$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + \mathrm{C}$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + \mathrm{C}$

(x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + \mathrm{C}$

(xii) $\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathrm{C}$

(xiv) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + \mathrm{C}$

◆ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$, ਦੋ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $\mathrm{P}(x)$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}(x)$, ਚਲ x ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $\mathrm{Q}(x) \neq 0$. ਜੇ ਬਹੁਪਦ $\mathrm{P}(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਬਹੁਪਦ $\mathrm{Q}(x)$, ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\mathrm{P}(x)$ ਨੂੰ $\mathrm{Q}(x)$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{T}(x) + \frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਇੱਥੇ $\mathrm{T}(x)$, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{P}_1(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $\mathrm{Q}(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਬਹੁਪਦ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ $\mathrm{T}(x)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b}, \; a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b} + \frac{\mathrm{C}}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \frac{\mathrm{C}}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+bx+c}$,

   ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦੇ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ।

◆ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਮੌਲਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਤਪਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + \mathrm{C}$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + \mathrm{C}$

(iii) $\int \sec x\, dx = \log \left| \sec x + \tan x \right| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log \left| \operatorname{cosec} x - \cot x \right| + C$

- **ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲ**

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C$

- **ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ**

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨਾਂ f_1 ਅਤੇ f_2, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\int f_1(x) \,.\, f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \,.\, \int f_2(x)\, dx \right] dx$, ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $=$ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ $\times$ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $-$ {ਪਹਿਲਾ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ $\times$ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ} ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਉਚਿਤ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

- $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + C$

- **ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਕਿਸਮਾਂ**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\; dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\; dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\; dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax + b) + \mathrm{B}$, A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

◆ ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ, $y = f(x)$, $a \le x \le b$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ordinates $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਦ $\int_a^x f(x)\,dx$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ A (x) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਾਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7.8.2 ਇਨਇਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ (First fundamental theorem of integral calculus)

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ $\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, ਸਾਰੇ $\forall\, x \ge a$, ਦੇ ਲਈ, ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ f ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ ਸਾਰੇ $\forall\; x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ।

◆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ f, x ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

ਤਦ $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਸਥਾਰ $[a, b]$ ਤੇ f ਦਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ a ਅਤੇ b ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਖਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, a ਨੂੰ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਉਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ **8**

ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ, ਆਇਤਾਂ, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਜਿਆਮਤੀ ਸ਼ਕਲਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੂਤਰ ਅਧਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅਧਾਰੀ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਸਾਧਾਰਨ ਸ਼ਕਲਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਸੂਤਰ ਵਕਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

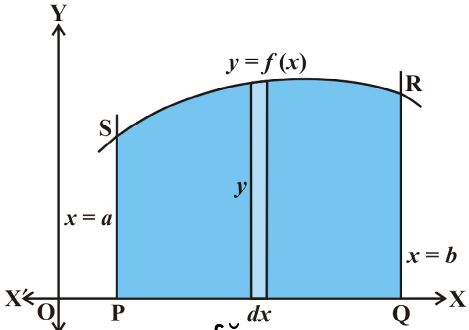
A.L. Cauchy (1789-1857)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ, ਪੇਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (ਕੇਵਲ ਮਾਨਕ ਰੂਪ) ਦੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਨਿਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਵਕਰਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਸਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ (Area Under Simple Curves)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ ਜਾਏ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 8.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਕਰ ਦੇ

ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਪਤਲੀ ਅਤੇ ਲੰਬਕਾਰੀ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਪੱਟੀਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। y ਉਚਾਈ ਅਤੇ dx ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਪੱਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ $d\text{A}$ (ਅਧਾਰੀ ਪੱਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) $= ydx$, ਜਿੱਥੇ $y = f(x)$ ਹੈ।



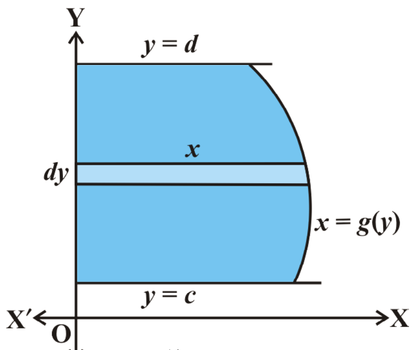
ਚਿੱਤਰ 8.1

ਇਹ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਸੇ ਇਖਤਿਆਰੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਅਤੇ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਕੋਟੀ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ x–ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ A ਨੂੰ, ਖੇਤਰ PQRSP ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਪਤਲੀ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\text{A} = \int_a^b d\text{A} = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

ਵਕਰ $x = g(y)$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c$, $y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

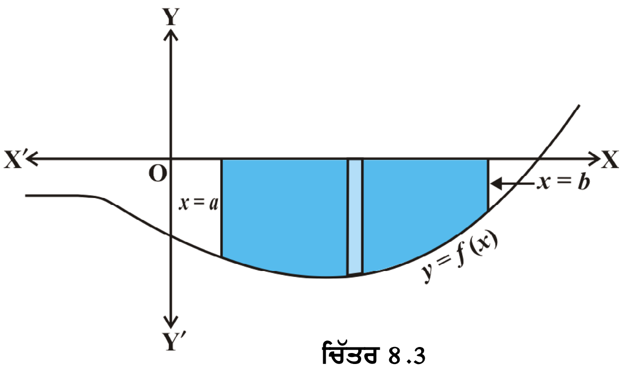
$$\text{A} = \int_c^d x dy = \int_c^d g(y)\, dy$$



ਚਿੱਤਰ 8.2

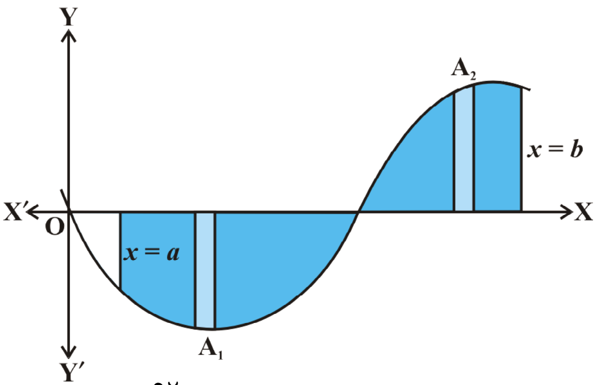
ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8 . 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਦਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਵਕਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ $x = a$ ਤੋਂ $x = b$ ਤੱਕ $f(x) < 0$ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਸਿਰਫ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਜਦਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਅਰਥਾਤ $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰ ਦਾ ਕੁੱਝ ਭਾਗ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਭਾਗ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ $A_1 < 0$ ਅਤੇ $A_2 > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਸੂਤਰ $A = |A_1| + A_2$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.4

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਚਿੱਤਰ 8.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

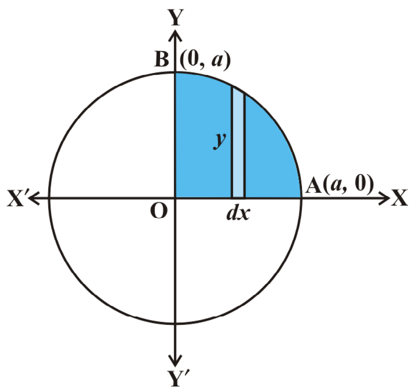
= 4 (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀ Ordinates $x = 0$ ਅਤੇ $x = a$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

[ਕਿਉਂਕਿ ਚੱਕਰ x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ y- ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।]

$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

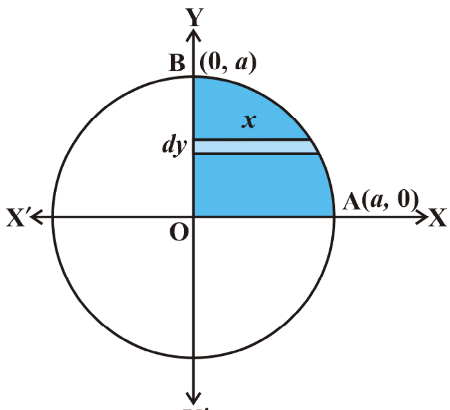
ਕਿਉਂਕਿ $x^2 + y^2 = a^2$ ਤੋਂ $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ y ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 8.5

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$



ਚਿੱਤਰ 8.6

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਇਲਿਪਸ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਦਾ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.7 ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ABA′B′A ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\begin{pmatrix}\text{ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, } x\text{–ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ } x = 0, x = a \text{ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ} \\ \text{ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}\end{pmatrix}$$

(ਕਿਉਂਕਿ ਇਲਿਪਸ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ)

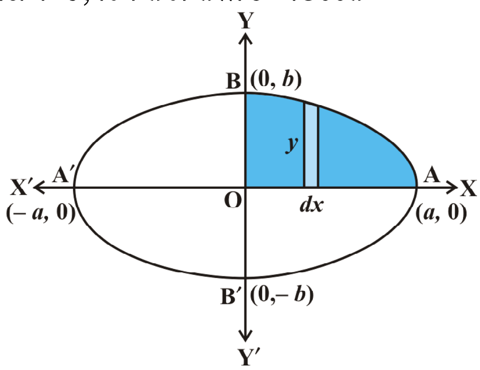
$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

ਹੁਣ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ y ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(ਕਿਉਂ)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.7

$$= \frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ ਹੈ।}$$

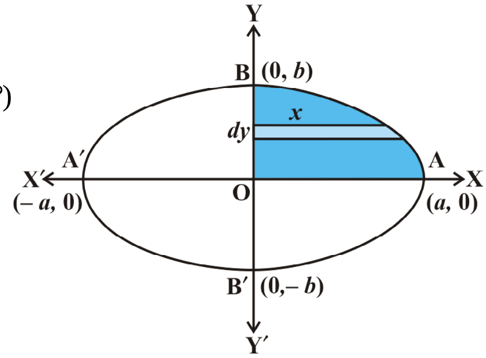
ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^b x\,dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\,dy \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ ਹੈ।}$$



ਚਿੱਤਰ 8.8

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

3. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 0$, $x = 2$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

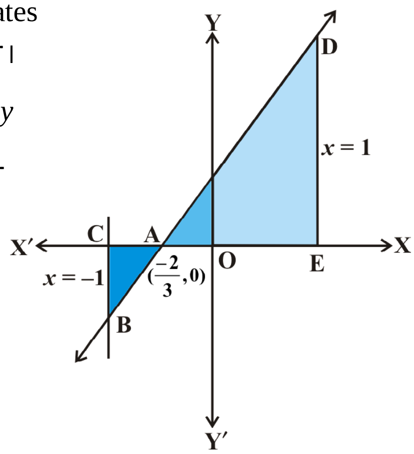
   (A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

4. ਵਕਰ $y^2 = 4x$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

   (A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 3. ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates $x = -1$ ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.9

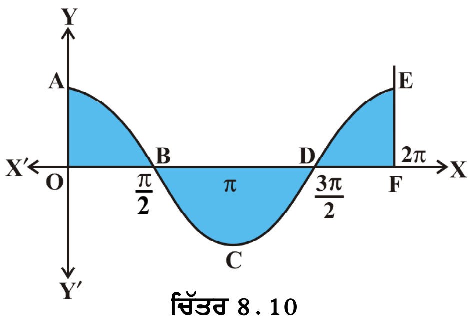
ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, x- ਧੁਰੇ ਨੂੰ $x = \frac{-2}{3}$ ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ।

ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ ACBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ ADEA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਵਕਰ $y = \cos x$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.10

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.10 ਤੋਂ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
= ਖੇਤਰ OABO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BCDB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ DEFD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

ਅਧਿਆਇ 8 ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $y = x^2; x = 1, x = 2$ ਅਤੇ x- ਧੁਰਾ

(ii) $y = x^4; x = 1, x = 5$ ਅਤੇ x- ਧੁਰਾ

2. $y = |x+3|$ ਦਾ ਗਰਾਫ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ $\int_{-6}^{0} |x+3| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਅਤੇ ਵਕਰ $y = \sin x$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

4. ਵਕਰ $y = x^3$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates $x = -2, x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$

(C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

5. ਵਕਰ $y = x|x|$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = -1$ ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[**ਸੰਕੇਤ** : $y = x^2$ ਜਦ ਕਿ $x > 0$ ਅਤੇ $y = -x^2$ ਜਦ $x < 0$]

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

◆ ਵਕਰ $y = f(x)$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ $(b > a)$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ : ਖੇਤਰਫਲ $= \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$ ਹੈ।

◆ ਵਕਰ $x = \phi(y)$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c, y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ :

$$\text{ਖੇਤਰਫਲ} = \int_c^d x dy = \int_c^d \phi(y) dy \text{ ਹੈ।}$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਮੂਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਵਿਕਾਸ ਕਾਲ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਰਾਣੇ ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਕਸਿਤ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਜਨਮ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਠੋਸ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ (exhaustion) ਵਿਧੀ, ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਖੀਣਤਾ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਕਾਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਯੂਡੋਕਸ (Eudoxus (440 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਅਤੇ ਆਰਕੀਮੀਡੀਜ਼ (Archimedes (300 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਕਲਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਵਿਕਾਸ ਈਸਾ ਤੋਂ 17ਵੀਂ ਸਦੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਸੰਨ 1665 ਵਿੱਚ ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਕਲਨ ਤੇ ਆਪਣਾ ਕੰਮ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Theory of fluxion) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਵਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ। ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਜਾਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦਾ ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ।

1684–86, ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਬਨਿਜ (Leibnitz) ਨੇ (Acta Eruditorum) ਵਿੱਚ ਆਰਟੀਕਲ ਛਾਪਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ (Calculous Summatorius) ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਣਗਣਿਤ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸੀ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਕੇਤ '∫' ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ। ਸੰਨ 1696 ਈ. ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਜੇਂ ਬਰਨੋਲੀ (J.Bernoulli) ਦੇ ਸੁਝਾਅ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ ਆਪਣੇ ਆਰਟੀਕਲ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕਲਨ (Calculus Integrali) ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਤੋਂ ਨਿਊਟਨ ਵੱਲੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੀ।

ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਲਿਬਨਿਜ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਪੂਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਰਸਤਾ ਅਪਣਾਇਆ ਜੋ ਬਿਲਕੁਲ ਵੱਖ ਸਨ। ਪਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਿਹਾਰਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਪਾਏ ਗਏ। ਲੈਵਨਿਜ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ।

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਤਾਰੀਫ਼ ਕੀਤੀ।

ਸਿੱਟਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀਆਂ ਆਧਾਰਭੂਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਪੀ . ਡੀ. ਫਰਮੈਟ, ਆਈ. ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਜੀ. ਲਿਬਨਿਜ ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਦੁਆਰਾ 17 ਵੀ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ, ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ 19ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਏ. ਐਲ. ਕੋਚੀ (A.L.Cauchy) ਵੱਲੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਲੀ ਸੋਫੀ (Lie Sophie) ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕੁਟੇਸ਼ਨ ਹੈ : "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".

ਅਧਿਆਇ 9

ਡਿ.ਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ
Differential Equations

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain – D. HILBERT* ❖

9.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਮਾਤ XI ਅਤੇ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਫਲਨ 'f' ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ; ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਦੱਸੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਰਸਾਏ x ਲਈ, $f'(x)$ ਕਿਵੇਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ g ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ f ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਭਿਆ (ਪਤਾ) ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਲੜੀਬੰਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

Henri Poincare
(1854-1912)

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ g ਲਈ ਫਲਨ f ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ ਇੱਥੇ } y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਬਕਾਇਦਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ, ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਜੀਵ-ਵਿਗਿਆਨ, ਰਾਜਨੀਤਕ ਭੂਗੋਲ, ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਆਧੁਨਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਨਾਲ ਪੜ੍ਹਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਕੁਝ ਮੂਲ ਰੂਪ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ (ਪੈਦਾ) ਕਰਨਾ, ਪਹਿਲੇ ਕੋਟੀ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਡਿਗਰੀ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ (ਤਰੀਕੇ) ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2 ਮੌਲਿਕ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad \text{... (2)}$$

$$x + y = 7 \qquad \text{... (3)}$$

ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈ **ਸਮੀਕਰਣ** ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{... (4)}$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਸੁਤੰਤਰ ਅਤੇ/ਨਿਭਰਰ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜੋ ਕਿ **ਸਮੀਕਰਣ** (4) ਵਿੱਚ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ (x) ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ (y) ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਸਾਪੇਖ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ (ਅਜ਼ਾਦ) ਚਲ ਦਾ, ਨਿਰਭਰ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, (ਆਮ ਵਿਆਪਕ) ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad \text{... (5)}$$

ਇੱਕ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਬੇਸ਼ੱਕ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੀ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਆਸ਼ੰਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਸ ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਆਮ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਹੀ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਸ਼ਾਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. ਉੱਚੇ ਦਰਜੇ ਵਾਲੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾ ਦੇ ਲਈ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਡੈਸ਼ (dashes) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਗੈਰ ਸੁਵਿਧਾਜਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ n ਵੇ ਕੋਟੀ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ਦੇ ਵਾਸਤੇ ਅਸੀਂ ਸੰਕੇਤ y_n ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2.1 *ਡਿ.ਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a differential equation)*

ਕਿਸੀ ਡਿ.ਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ, ਉੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ, ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \text{... (6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \qquad \text{...(8)}$$

ਸਮੀਕਰਨ (6), (7) **ਅਤੇ** (8) **ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਡੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹਾਜ਼ਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ** 1,2 **ਅਤੇ** 3 **ਹੈ।**

9.2.2 *ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ (Degree of a differential equation)*

ਕਿਸੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਬਹੁਪਦੀ y', y'', y''' **ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :**

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{... (9)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0 \qquad \text{... (10)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{... (11)}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (9) y''', y'' ਅਤੇ y' ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਸਮਕੀਰਣ (10) y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। (ਜੇਕਰ ਇਹ y ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿ.ਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ

ਦੀ ਕੋਟੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਸਮੀਕਰਣ (11) y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਡੈਰੀਵੇਟਵਾਂ ਦਾ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚਤਮ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਦੀ ਘਾਤ (ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (6), (7), (8) ਅਤੇ (9) ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਹੈ, ਸਮੀਕਰਣ (10) ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (11) ਦੀ ਘਾਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਦਰਸਾਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

ਹੱਲ :

(i) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{dy}{dx}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ। ਇਹ y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸੈਮੀਕਰਣ ਦੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ 1 ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2 ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ y''' ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਬਹੁਪਦੀ) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦਰਸਾਈ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$ **3.** $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\dfrac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ **5.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ **7.** $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$ **9.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **10.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ

$\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

12. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9.3. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਹੈ :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ **ਸਮੀਕਰਣ** x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (3)}$$

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਇਸ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ϕ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਫਲਨ ϕ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ y (ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ) ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਭਰ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ $y = \phi(x)$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਫਲਨ (ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਤਰ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਫਲਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \qquad \ldots (4)$$

ਇੱਥੇ $a, b \in \mathbf{R}$. ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਦੋਨੋਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕੁਝ ਖਾਸ ਕੀਮਤ $a = 2$ ਅਤੇ $b = \frac{\pi}{4}$ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਲਾ ਫਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \ldots (5)$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੁੜ ਤੋਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ϕ_1 ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਫਲਨ ϕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ a, b ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, ϕ_1 ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ϕ_1 ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਹੱਲ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ a ਅਤੇ b ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ

ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = e^{-3x}$, ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $y = e^{-3x}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-3x} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9\ e^{-3x} - 9\ e^{-3x} = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਪੜਤਾਲ ਕਿ ਫਲਨ $y = a \cos x + b \sin x$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a, b \in \mathbf{R}$, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ

$$y = a \cos x + b \sin x \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\ a \cos x - b \sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (-\ a \cos x - b \sin x) + (a \cos x + b \sin x) = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.2

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਸਪੱਸ਼ਟ ਅਤੇ ਅਸਪੱਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$

2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$

3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$

4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

5. $y = Ax$: $xy' = y\ (x \neq 0)$

6. $y = x \sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ $(x \neq 0$ ਅਤੇ $x > y$ ਅਰਥਾਤ $x < -y)$

7. $xy = \log y + C$: $y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$ $(xy \neq 1)$

8. $y - \cos y = x$: $(y \sin y + \cos y + x)\, y' = y$

9. $x + y = \tan^{-1}y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}\ x \in (-a, a) : x + y \dfrac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

11. ਚਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4. ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

ਇਸ ਸ਼ੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀਆਂ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

9.4.1 ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ *(Differential equations with variables separable)*

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੇਠ ਦਰਸਾਇਆ ਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \dots (1)$$

ਜੇਕਰ $F(x, y)$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ $g(x)$, $h(y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $g(x)$, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $h(y)$, y ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੋਣ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = h(y)\, g(x) \qquad \dots (2)$$

ਜੇਕਰ $h(y) \neq 0$, ਤਾਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \dots (3)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \dots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਮੀਕਰਣ (4), ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C} \qquad \dots (5)$$

ਇੱਥੇ $\mathrm{H}(y)$ ਅਤੇ $\mathrm{G}(x)$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{h(y)}$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹਨ ਅਤੇ C ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, (y \neq 2)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \quad (y \neq 2) \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚੋਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx \qquad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

ਜਾਂ $\quad 2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + \mathrm{C}_1$

ਜਾਂ $\quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,\mathrm{C}_1 = 0$

ਜਾਂ $\quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + \mathrm{C} = 0 \qquad \dots (3)$

ਇੱਥੇ $\quad \mathrm{C} = 2\mathrm{C}_1$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $1 + y^2 \neq 0$, ਇਸ ਲਈ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

ਅਰਥਾਤ $\quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $y = 1$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ $y \neq 0$, ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\,dx$$

ਜਾਂ
$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

ਜਾਂ
$$y = \frac{1}{2x^2 - C} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $y = 1$ ਅਤੇ $x = 0$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ $C = -1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ (2) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ $y = \frac{1}{2x^2 + 1}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਬਿੰਦੂ (1, 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\,.dy = (2x^2 + 1).\,dx\ (x \neq 0)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)dx$$

ਜਾਂ
$$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

---

* ਲੈਬਨੀਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਸੰਕੇਤ $\frac{dy}{dx}$ ਬਹੁਤ ਲਚਕੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਿਣਤੀ ਅਤੇ ਔਪਚਾਰਿਕ ਰੁਪਾਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ dx ਅਤੇ dy ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਤਦੇ ਹਾਂ। dx ਅਤੇ dy ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਸਤ੍ਹਾ ਮੰਨ ਕੇ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਣਤੀਆਂ ਦਾ ਨੇੜਲੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ : Introduction to calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger — Verlog New York.

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$$

ਜਾਂ $$y = x^2 + \log|x| + C \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਖਾਸ ਮੈਂਬਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1, 1) ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 1$, $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $C = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = x^2 + \log|x|$ ਦਾ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਬਿੰਦੂ $(-2, 3)$, ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਵ (ਢਲਾਣ) $\frac{2x}{y^2}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿਸੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \ldots (1)$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

ਜਾਂ $$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = -2, y = 3$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $C = 5$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^3}{3} = x^2 + 5$ ਜਾਂ

$$y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਦੀ ਰਕਮ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਮੂਲਧਨ P ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੁਸ਼ਕਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

ਜਾਂ $$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨੀਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

ਜਾਂ $$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

ਜਾਂ $$P = C\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{ਇੱਥੇ } e^{C_1} = C) \qquad \ldots (3)$$

ਹੁਣ $P = 1000$, ਜਦੋਂ $t = 0$

P ਅਤੇ t ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ C = 1000 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

ਮੰਨ ਲਉ t ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਦੋਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

ਅਭਿਆਸ 9.3

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

3. $\frac{dy}{dx} + y = 1 (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

12. $x(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} = 1;\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = a\ \ (a \in \text{R});\ y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x\,;\ y = 2$ ਜੇਕਰ $x = 0$

15. ਬਿੰਦੂ $(0, 0)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y' = e^x \sin x$ ਹੈ।

16. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $xy\dfrac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(1, -1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਵਤਰ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਬਿੰਦੂ $(0, -2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ y ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

18. ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ, ਬਿੰਦੂ $(-4, -3)$. ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਵਤਰ ਬਿੰਦੂ $(-2, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਚਾਲ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 ਇਕਾਈ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ 6 ਇਕਾਈ ਹੈ ਤਾਂ t ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $r\%$ ਸਲਾਨਾ ਦੇ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ 100 ਰੁ: 10 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੁੱਗਣੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ r ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\log_e 2 = 0.6931$).

21. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ 10 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਇਹ ਰਕਮ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ($e^{0.5} =$

1.648)

22. ਕਿਸੀ ਜੀਵਾਣੂ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 1, 00, 000 ਹੈ। ਦੋ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 10% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2,00,000 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦਾ ਵਾਧਾ ਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੌਜੂਦ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

23. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $e^x + e^{-y} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

9.4.2 *ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (Homogenous differential equations)*

x ਅਤੇ y ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$F_1(x, y) = y^2 + 2xy$, $\quad F_2(x, y) = 2x - 3y$,

$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਚਲ λ ਦੇ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ λx ਅਤੇ λy ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

$$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$$

$$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$$

$$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, ਕੋਈ ਵੀ n ਦੇ ਲਈ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ F_1, F_2, F_3 ਨੂੰ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨ F_4 ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਫਲਨ $F(x, y)$, n ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ λ ਦੇ ਲਈ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$

ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ F_1, F_2, F_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, 1, 0 ਕੋਟੀ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ F_4 ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ $$F_1(x,y) = y^2\left(1+\frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_2(x,y) = x^1\left(2-\frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ $$F_2(x,y) = y^1\left(2\frac{x}{y}-3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_3(x,y) = x^\circ \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^\circ\ h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x,y) \neq x^n\ h_6\left(\frac{y}{x}\right)$$, $n \in \mathbf{N}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕੀਮਤ ਲਈ

ਜਾਂ $$F_4(x,y) \neq y^n\ h_7\left(\frac{x}{y}\right),\ n \in \mathbf{N}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਫਲਨ F (x, y), n ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$F(x,y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ਜਾਂ} \quad y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $F(x, y)$ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਕੋਟੀ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{y}{x} = v$ ਜਾਂ

$$y = v\,x \qquad \ldots (2)$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \text{... (4)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad \text{... (5)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x} dx + C \quad \text{... (6)}$$

ਜੇਕਰ v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (6), ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ $F(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{x}{y} = v$ ਜਾਂ $x = vy$ ਭਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x - y} \quad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $$F(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$$

ਹੁਣ $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x + 2y)}{\lambda(x - y)} = \lambda^{\circ} \cdot F(x, y)$$

ਇਸ ਲਈ $F(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅੰਤ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

ਬਦਲ :

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ y ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+2v}{1-v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+2v}{1-v}-v$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2+v+1}{1-v}$$

ਜਾਂ $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv=\frac{-dx}{x} \qquad \ldots (5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int\frac{v-1}{v^2+v+1}dv=-\int\frac{dx}{x}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int\frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv=-\log|x|+\mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int\frac{2v+1}{v^2+v+1}dv-\frac{3}{2}\int\frac{1}{v^2+v+1}dv=-\log|x|+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1|-\frac{3}{2}\int\frac{1}{v^2+v+1}dv=-\log|x|+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1|-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv=-\log|x|+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)=-\log|x|+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$, ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

ਜਾਂ $$\log|(y^2+xy+x^2)|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

ਜਾਂ $$\log|(x^2+xy+y^2)|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ਇੱਥੇ $\frac{dy}{dx}=\mathrm{F}(x,\ y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

ਇੱਥੇ $\mathrm{F}\ (x, y) = \dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ ਹੈ।

x ਨੂੰ λx ਨਾਲ ਅਤੇ y ਨੂੰ λy ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\mathrm{F}\ (\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)}=\lambda^{0}[\mathrm{F}(x,y)]$$

$\mathrm{F}\ (x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਤੇ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ y ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+1}{\cos v}-v$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$\cos v \, dv = \frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos v \, dv = \int \frac{1}{x} dx$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log |x| + \log |C|$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log |Cx|$$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x\, e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = 0$ ਜਦੋਂ $y = 1$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖ਼ਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\, e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\, e^{\frac{x}{y}}} \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

ਮੰਨ ਲਓ $$F(x, y) = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$$ ਤਾਂ $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^{\circ}\,[F(x, y)]$$

ਅੰਤ : F (x, y) ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ $x = vy$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ y ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ x ਅਤੇ $\frac{dx}{dy}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^v - 1}{2e^v}$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^v - 1}{2e^v} - v$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^v}$$

ਜਾਂ $$2e^v dv = \frac{-dy}{y}$$

ਜਾਂ $$\int 2e^v . dv = -\int \frac{dy}{y}$$

ਜਾਂ $$2\,e^v = -\log|y| + C$$

v ਨੂੰ $\frac{x}{y}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2\;e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = C \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\,e^0 + \log|1| = C \Rightarrow C = 2$$

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\;e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ਹੈ, $x^2 - y^2 = cx$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \ldots (1)$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $y = vx$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

$y = vx$ ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{ਜਾਂ} \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

ਅੰਤ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

ਜਾਂ $$\log |v^2 - 1| = -\log |x| + \log |C_1|$$

ਜਾਂ $$\log |(v^2 - 1)(x)| = \log |C_1|$$

ਜਾਂ $$(v^2 - 1)\, x = \pm\, C_1$$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) x = \pm C_1$$

ਜਾਂ $$(y^2 - x^2) = \pm C_1\, x \quad \text{ਜਾਂ} \quad x^2 - y^2 = Cx$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$

2. $y' = \frac{x + y}{x}$

3. $(x - y)\, dy - (x + y)\, dx = 0$

4. $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

5. $x^2\dfrac{dy}{dx}=x^2-2y^2+xy$

6. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

7. $\left\{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)+y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}y\,dx=\left\{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)-x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

8. $x\dfrac{dy}{dx}-y+x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$

9. $y\,dx+x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dy-2x\,dy=0$

10. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$

11 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤੀਬੰਦ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ।

11. $(x+y)\,dy+(x-y)\,dx=0;\ y=1$ ਜੇਕਰ $x=1$

12. $x^2\,dy+(xy+y^2)\,dx=0;\ y=1$ ਜੇਕਰ $x=1$

13. $\left[x\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0;\ y=\dfrac{\pi}{4}$ ਜੇਕਰ $x=1$

14. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}+\operatorname{cosec}\left(\dfrac{y}{x}\right)=0;\ y=0$ ਜੇਕਰ $x=1$

15. $2xy+y^2-2x^2\dfrac{dy}{dx}=0;\ y=2$ ਜੇਕਰ $x=1$

16. $\dfrac{dx}{dy}=h\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

(A) $y=vx$ (B) $v=yx$ (C) $x=vy$ (D) $x=v$

17. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ?

(A) $(4x+6y+5)\,dy-(3y+2x+4)\,dx=0$

(B) $(xy)\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$

(C) $(x^3+2y^2)\,dx+2xy\,dy=0$

(D) $y^2\,dx+(x^2-xy-y^2)\,dy=0$

9.4.3 *ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (Linear differential equations)*

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q},$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਕੁਝ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x\log x}\right) = \frac{1}{x}$$

ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੂਜਾ ਰੂਪ ਸੈਕਿੰਡ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P_1 ਅਤੇ Q_1 ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ y ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{-2x}{y} = y^2 e^{-y}$$

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}\,y = \mathrm{Q} \qquad \ldots (1)$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਦੇ ਫਲਨ $g(x)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.g(x)\,y = \mathrm{Q}.g(x) \qquad \ldots (2)$$

$g(x)$ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $y\,.\,g(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਬਣ ਜਾਵੇ :

ਜਾਂ $$g(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.g(x)\,y = \frac{d}{dx}[y.g(x)]$$

ਜਾਂ $$g(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.g(x)\,y = g(x)\frac{dy}{dx} + y\,g'(x)$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{P}.g(x) = g'(x)$$

ਜਾਂ $$\mathrm{P} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \mathrm{P}dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$$

ਜਾਂ $$\int \mathrm{P}.dx = \log\left(g(x)\right)$$

ਜਾਂ $$\mathrm{g}(x) = e^{\int \mathrm{P}\, dx}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ $g(x) = e^{\int pdx}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ x ਅਤੇ y ਦੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ $g(x) = e^{\int pdx}$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ **ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ (I.F.)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $g(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{\int pdx}\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}e^{\int pdx}y = \mathrm{Q}.\, e^{\int pdx}$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int \mathrm{P}dx}\right) = \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y\cdot e^{\int \mathrm{P}dx} = \int\left(\mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}dx}\right)dx$$

ਜਾਂ $$y = e^{-\int \mathrm{P}dx}\cdot\int\left(\mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}dx}\right)dx + \mathrm{C}$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਕਦਮ

(i) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P, Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਸਿਰਫ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ (I.F.) = $e^{\int \mathrm{P}dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$y\ .\ (\mathrm{I.F.}) = \int\left(\mathrm{Q}\times\mathrm{I.F.}\right)dx + \mathrm{C}$$

ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P_1 ਅਤੇ

Q_1 ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ y ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ I.F. = $e^{\int P_1 dy}$ ਅਤੇ

$$x \,.\, (\text{I.F.}) = \int \left(Q_1 \times \text{I.F.}\right) dy + C$$ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ:

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $P = -1$ ਅਤੇ $Q = \cos x$

ਇਸ ਲਈ $\text{I.F.} = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$

ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ I.F. ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x} y = e^{-x}\cos x$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(y e^{-x}\right) = e^{-x}\cos x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਇਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y\, e^{-x} = \int e^{-x}\cos x\, dx + C \qquad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$I = \int e^{-x}\cos x\, dx$$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int (-\sin x)\,(-e^{-x})\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \sin x\, e^{-x}\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \left[\sin x(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\, dx\right]$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x}\, dx$$

ਜਾਂ $$I = -e^{-x}\cos x + \sin x\, e^{-x} - I$$

ਜਾਂ $$2I = (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$$

ਜਾਂ $$I = \frac{(\sin x - \cos x)e^{-x}}{2}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\,e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ
$$y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \mathrm{C}e^{x}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

ਇਹ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\mathrm{P} = \frac{2}{x}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q} = x$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ I.F. = $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ [ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $e^{\log f(x)} = f(x)$]

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

$$y \cdot x^2 = \int (x)(x^2)\,dx + \mathrm{C} = \int x^3 dx + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ
$$y = \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}x^{-2}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

ਇਹ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਇੱਥੇ $\mathrm{P}_1 = -\frac{1}{y}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}_1 = 2y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = e^{\log(y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

ਇਸ ਲਈ $$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right)dy + C$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = \int 2dy + C$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = 2y + C$$

ਜਾਂ $$x = 2y^2 + Cy$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dx}{dy} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \; (x \neq 0)$$

ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \frac{\pi}{2}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇੱਥੇ $P = \cot x$ ਅਤੇ $Q = 2x + x^2 \cot x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + C$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \sin x\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x\left(\frac{2x^2}{2}\right)dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x + C \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{\pi}{2}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

ਜਾਂ $$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

ਜਾਂ $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} (\sin x \neq 0)$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਬਿੰਦੂ (0, 1) ਵਿੱਚ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ x ਭੁਜਾ ਅਤੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (ਅੰਕ) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1), $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ P = – x ਅਤੇ Q = x ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F.} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y.e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) dx + \mathrm{C} \qquad \text{... (2)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $$\mathrm{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

ਮੰਨ ਲਉ $\frac{-x^2}{2} = t$, ਤਾਂ $-x\,dx = dt$ ਜਾਂ $x\,dx = -dt$

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{I} = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\,e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$y = -1 + \mathrm{C}\,e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਮੈਂਬਰ ਦੀ Ãî ÆÈõä êåÅÕðéÅÚÅÔ¿¶Ô›Ü¯Ç¢ÇÈ (0, 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$1 = -1 + \mathrm{C}\,.\,e^0 \quad \text{ਜਾਂ} \quad \mathrm{C} = 2$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = -1 + 2\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

ਇਹ ਵਤਰਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.5

1 ਤੋਂ 12 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2$

4. $\dfrac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ **5.** $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ **7.** $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{2}{x} \log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx \ (x \ne 0)$

9. $x\dfrac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0 \ \ (x \ne 0)$ **10.** $(x + y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$ **12.** $(x + 3y^2)\dfrac{dy}{dx} = y \ \ (y > 0)$.

13 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

13. $\dfrac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x;\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \dfrac{\pi}{3}$

14. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{1}{1+x^2}; y=0$ ਜੇਕਰ $x=1$

15. $\dfrac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x; y=2$ ਜੇਕਰ $x=\dfrac{\pi}{2}$

16. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

17. ਬਿੰਦੂ $(0, 2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ 5 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

18. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\dfrac{dy}{dx}-y=2x^2$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

19. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy}+yx = ay(-1<y<1)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

ਫੁੱਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, ਜਿੱਥੇ c_1, c_2 ਸਵੈ ਇੱਛ ਅਚਲ ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+\left(a^2+b^2\right)y=0$$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ :

$$y=e^{ax}\left[c_1\cos bx+c_2\sin bx\right] \quad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax}\left[-bc_1\sin bx+bc_2\cos bx\right]+\left[c_1\cos bx+c_2\sin bx\right]e^{ax}.a$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \quad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-\sin bx \,.\, b) + (ac_2 - bc_1)(\cos bx \,.\, b)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2 c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2 c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $$= e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+(a^2 + b^2)e^{ax}[c_1\cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\begin{bmatrix} \left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ +(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0 \cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0 = \text{ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{4y} \quad \dots (1)$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x}dx$$

ਇਸ ਲਈ $$\int e^{-4y}dy = \int e^{3x}dx$$

ਜਾਂ $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$4e^{3x} + 3e^{-4y} + 12\,\mathrm{C} = 0 \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਜਾਂ $y = 0$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$4 + 3 + 12\,\mathrm{C} = 0 \text{ ਅਤੇ } \mathrm{C} = \frac{-7}{12}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

$$4e^{3x} + 3e^{-4y} - 7 = 0,$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$(x\,dy - y\,dx)\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\,x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\left[xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = \left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ x^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ; ਸਮੀਕਰਣ (1), $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਸਮਰੂਪੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$y = vx \qquad \ldots (2)$$

ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

ਜਾਂ $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2\sin v}{v\sin v - \cos v}$$ [ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ]

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = \frac{2\,dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\int \tan v\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$$

ਜਾਂ $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right| = \log|C_1|$$

ਜਾਂ $$\frac{\sec v}{v\,x^2} = \pm C_1 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C$$, ਜਿੱਥੇ $C = \pm C_1$

ਜਾਂ $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = C\,xy$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ
$(\tan^{-1}y - x)\,dy = (1 + y^2)\,dx$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \quad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1), $\frac{dx}{dy}+P_1\,x = Q_1$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ

$$P_1=\frac{1}{1+y^2} \text{ ਅਤੇ } Q_1=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \text{ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ}$$

$$\text{I.F.}=e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}=e^{\tan^{-1}y}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$x e^{\tan^{-1}y}=\int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}\,dy+C \quad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ $$I=\int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}\,dy$$

$\tan^{-1}y = t$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy=dt$

ਇਸ ਲਈ $$I=\int t\,e^t dt,\ I = t\,e^t - \int 1\,.\,e^t\,et,\ I = t\,e^t - e^t = e^t\,(t-1)$$

ਜਾਂ $$I = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y-1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚੋਂ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

$$x\,.\,e^{\tan^{-1}y}=e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y-1)+C \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ}$$

ਜਾਂ $$x=(\tan^{-1}y-1)+C\,e^{-\tan^{-1}y}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਕੋਟੀ (ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਅਸਪਸ਼ਟ ਜਾਂ ਸਪਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(i) $xy = a\,e^x + b\,e^{-x} + x^2$: $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a\cos x + b\sin x)$: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x\sin 3x$: $\frac{d^2y}{dx^2} + 9\,y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$: $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ ਇੱਥੇ c ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, $(x^3 - 3x\,y^2)\,dx = (y^3 - 3x^2y)\,dy$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

4. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, ਜਦੋਂਕਿ $x \neq 1$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1} = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ $(x + y + 1) = \mathrm{A}\,(1 - x - y - 2xy)$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ A ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ।

6. ਬਿੰਦੂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\sin x \cos y\,dx + \cos x \sin y\,dy = 0$ ਹੈ।

7. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1 + e^{2x})\,dy + (1 + y^2)\,e^x\,dx = 0$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

8. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\,e^{\frac{x}{y}}dx = \left(x\,e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy\ (y \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = -1$, ਜੇਕਰ $x = 0$ (ਸੰਕੇਤ $x - y = t$ ਰੱਖੋ)।

10. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1\,(x \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \ (x \neq 0)$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \frac{\pi}{2}$.

12. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x + 1) \frac{dy}{dx} = 2 e^{-y} - 1$ ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

13. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

14. $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $y\, e^{\int P_1\, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dy} \right) dy + C$

(B) $y \,.\, e^{\int P_1\, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dx} \right) dx + C$

(C) $x\, e^{\int P_1\, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dy} \right) dy + C$

(D) $x\, e^{\int P_1\, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dx} \right) dx + C$

15. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $e^x\, dy + (y\, e^x + 2x)\, dx = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $x\, e^y + x^2 = C$ (B) $x\, e^y + y^2 = C$ (C) $y\, e^x + x^2 = C$ (D) $y\, e^y + x^2 = C$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਚਾਲ (ਚਲਾਂ)ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ, ਉਸ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ) ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਦੀ ਉੱਚਤਮ ਘਾਤ (ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਫਲਨ, ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉੱਨੇ ਹੀ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੋਣ, ਜਿੰਨਾ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਖਾਸ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ y ਵਾਲੇ ਪਦ dy ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਅਤੇ x ਵਾਲੇ ਪਦ dx ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸਨੂੰ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ਜਾਂ $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f(x, y)$ ਅਤੇ $g(x, y)$ ਜ਼ੀਰੋ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਰੋਚਕ ਤੱਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਮੌਜੂਦਗੀ ਨਵੰਬਰ 11,1675 ਨੇ Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $\int y\, dy = \frac{1}{2} y^2$, ਨੂੰ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੂਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ $\int$ ਅਤੇ dy ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ। ਦਰਅਸਲ Leibnitz ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਮਗਨ ਸੀ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੇ ਸੰਨ 1691 ਚਲਾ ਨੂੰ ਵੱਖ ਕਰਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਅਗਵਾਈ ਦਾ ਮਾਰਗ ਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਇਆ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਕੀਤਾ। ਉਹ ਅੱਗੇ ਵਧੇ ਅਤੇ ਥੋੜ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ 'ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ। ਕਿੰਨਾਂ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਖੋਜ ਇਕੱਲੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦੇ ਪੰਜੀ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪੂਰੀ ਹੋਈ ।

ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ 'ਹੱਲ' ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਇਨਟੈਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਸੰਨ 1690 ਵਿੱਚ : James Bernoulli, (1654 – 1705) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਚਲਣ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ। ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰਯੋਗ Joseph Louis Lagrange (1736–1813), ਦੁਆਰਾ ਸੰਨ 1774

ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਹ ਘਟਨਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜਨਮ ਤੋਂ ਲੱਗਭਗ 100 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਘਟਿਤ ਹੋਈ। ਇਹ Jules Henri Poincare (1854 – 1912), ਸੀ, ਜਿਸ ਨੇ ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲਈ ਸਖਤ ਵਕਾਲਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਇਸ ਲਈ ਆਧੁਨਿਕ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਹੱਲ ਨੂੰ ਆਪਣਾ ਉੱਚਿਤ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ। ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਨਾਮਕਰਨ John Bernoulli (1667–1748), James Bernoulli ਦੇ ਭਰਾ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮਈ 20, 1715 ਨੂੰ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੀ ਆਪਣੀ ਚਿੱਠੀ ਵਿੱਚ, ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ।

$$x^2 y'' = 2y$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਅਤੇ ਘਣਾਕਾਰ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਸਰਲ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੇਕ ਰੂਪ ਧਾਰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। 20ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਅੱਧ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਸੁਭਾਅ ਅਤੇ ਸਿਰਲੇਖ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਕਠਿਨਾਈ ਕੁਦਰਤ ਦੀ ਖੋਜ ਲਈ ਧਿਆਨ ਆਕਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਨੇ ਸਾਰੀਆਂ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ।

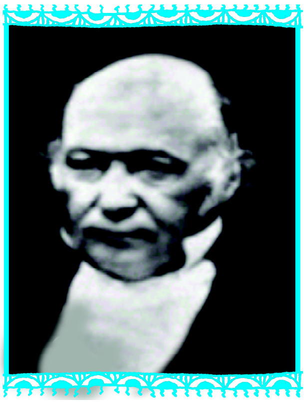
ਅਧਿਆਇ 10

ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Vector Algebra)

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

10.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਮਿਲਦੇ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਉਚਾਈ ਕੀ ਹੈ ? ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਖਿਡਾਰੀ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਟੀਮ ਦੇ ਦੂਜੇ ਖਿਡਾਰੀ ਕੋਲ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਗੇਂਦ ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਹਾਰ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ? ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਸੰਭਾਵਿਤ ਉੱਤਰ 1.6 ਮੀਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ (ਸਿਰਫ) ਇੱਕ ਕੀਮਤ (ਅਕਾਰ) ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਕੇਲਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰ ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ) ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਾਸਪੇਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਅਕਾਰ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਖਿਲਾੜੀ ਸਥਿਤ ਹੈ) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਭਾਵ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ, ਪੁੰਜ, ਸਮੇਂ, ਦੂਰੀ, ਗਤੀ, ਖੇਤਰਫਲ, ਆਇਤਨ, ਤਾਪਮਾਨ, ਕੰਮ, ਧਨ, ਵੋਲਟੇਜ ਘਣਤਾ, ਪ੍ਰਤੀਰੋਧਕ ਆਦਿ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਵਿਸਥਾਪਨ, ਵੇਗ, ਪ੍ਰਵੇਗ, ਬਲ ਭਾਰ, ਘੁੰਮਣ (ਮੁਵਮੈਂਟ) ਬਿਜਲਈ ਖੇਤਰ ਦੀ ਤੀਬਰਤਾ ਆਦਿ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ।



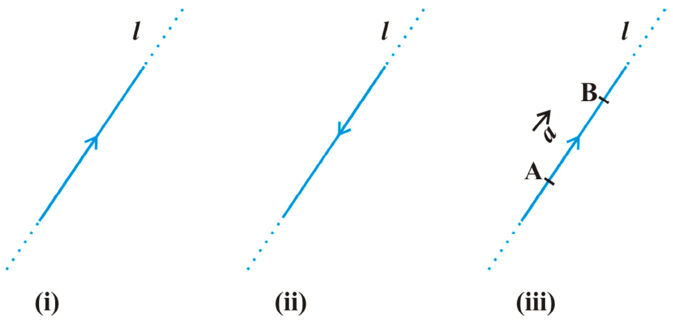
W.R. Hamilton (1805-1865)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਕੁਝ ਅਧਾਰਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਵਿਭਿੰਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜਕ ਅਤੇ ਜਿਉਮੈਟ੍ਰਿਕ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਮਿਲਿਆ ਰੂਪ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪੂਰਨ ਸੋਝੀ (ਬੋਧ) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਿਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

10.2 ਕੁਝ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (ਸੰਕਲਪ) (Some Basic Concepts)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤਲ ਜਾਂ ਤਿੰਨ-ਵਿਮਾਈ ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ l ਕੋਈ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.1 (i), (ii)]।

ਹੁਣ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ 'l' ਨੂੰ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ



ਚਿੱਤਰ 10.1

ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ 'l' ਦੇ ਅਕਾਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii))। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii)), ਜਿਸਨੂੰ $\overrightarrow{AB}$ ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ $\vec{a}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ '$\overrightarrow{AB}$' ਜਾਂ ਵੈਕਟਰ '$\vec{a}$' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

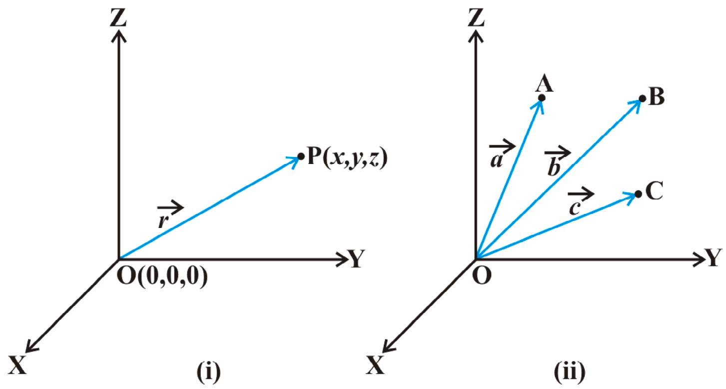
ਉਹ ਬਿੰਦੂ A ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਆਰੰਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ B ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$, ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਅਕਾਰ (ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $|\overrightarrow{AB}|$ ਜਾਂ $|\vec{a}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* ਕਿਉਂਕਿ ਲੰਬਾਈ ਕਦੀ ਵੀ ਰਿਣਾਤਮ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ $|\vec{a}| < 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (Position Vector)

ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ, ਤਿੰਨ-ਵਿਮਾਈ ਸਮਕੋਣੀ ਅਧਿਤਕਾਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ right handed rectangular Co-ordination System ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10.2 (i))। ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O(0, 0, 0) ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ P ਲਵੋ ਜਿਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹੈ। ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ O ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ (ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) ਦਾ ਅਕਾਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



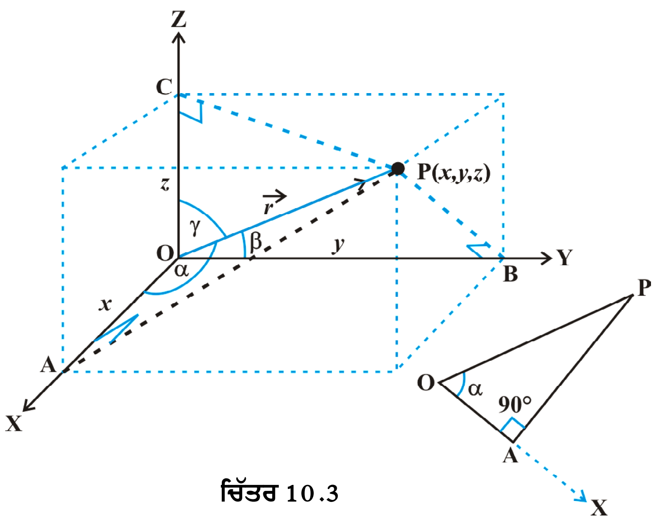
ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਆਦਿ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.2(ii)]।

ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ (Direction Cosines)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੁਆਰਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਕੋਣ α, β, ਅਤੇ γ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕੋਮਾਇਨ ਕੀਮਤ ਭਾਵ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ l, m ਅਤੇ n ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAP ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਿਕੋਣ ਤੋਂ



ਚਿੱਤਰ 10.3

ਅਸੀਂ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\left(r \text{ ਨੂੰ } |\vec{r}| \text{ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OBP ਅਤੇ OCP ਤੋਂ ਅਸੀਂ $\cos\beta = \frac{y}{r}$ ਅਤੇ $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਭੁਜਾਂ ਨੂੰ (lr, mr, nr) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਿਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ lr, mr ਅਤੇ nr ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a, b, c ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ਪਰ ਵਿਆਪਕ : $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

10.3 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Vectors)

ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ [Zero (null) Vector] ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{\mathbf{0}}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜ਼ੀਰੋ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਿਕਲਪੀ : ਇਸ ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਧਾਰਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ (Unit Vector) ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਇੱਕ (ਭਾਵ 1 ਇਕਾਈ) ਹੈ, ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ $\hat{a}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (Co-initial Vectors) ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੈਕਟਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਸਹਿ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ **(Collinear Vectors)** ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ੜ ਵੱਧ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਨਅੰਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

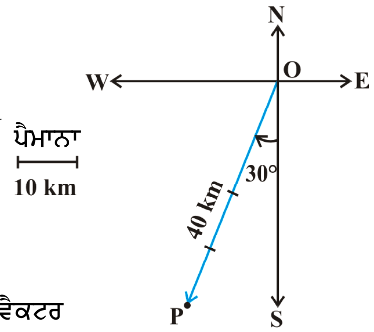
ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ (Equal Vectors) ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $\vec{a} = \vec{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਰਿਣਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ (Negative of a Vector) ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ (ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}$) ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਪਰ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਉਲਟ ਹੈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ $\overrightarrow{BA}$, ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਬਦਲੀ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਆਪਣੇ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਵਿਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸੁਤੰਤਰ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਸ ਪੂਰੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੁਤੰਤਰ (ਆਜ਼ਾਦ) ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਹੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਦੱਖਣ ਤੋਂ 30° ਪੱਛਮ ਵਿੱਚ, 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.4 ਦੇਖੋ)।



ਚਿੱਤਰ 10.4

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।

(i) 5 s (ii) 1000 cm^3 (iii) 10 N
(iv) 30 km/h (v) 10 g/cm^3
(vi) 20 m/s ਉੱਤਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਹੱਲ :

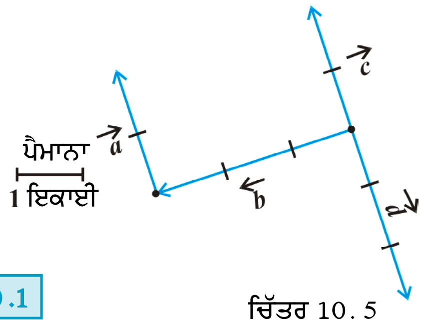
(i) ਸਮੇਂ-ਸਕੇਲਰ (ii) ਆਇਤਨ-ਸਕੇਲਰ (iii) ਬਲ-ਵੈਕਟਰ
(iv) ਗਤੀ-ਸਕੇਲਰ (v) ਘਣਤਾ-ਸਕੇਲਰ (vi) ਵੇਗ-ਵੈਕਟਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਚਿੱਤਰ 10.5 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ?

(i) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ
(ii) ਸਮਾਨ ਹੈ।
(iii) ਸਹਿ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) .... : $\vec{a}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$
(ii) ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ : $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{c}$
(iii) ....ਵੈਕਟਰ : $\vec{b}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$



ਚਿੱਤਰ 10.5

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੂਰਬ ਵਿੱਚ 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਨ ਕਰੋ।
2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) 10 kg (ii) 2 ਮੀਟਰ ਉੱਤਰ ਪੱਛਮ (iii) 40°
   (iv) 40 ਵੋਲਟ (v) 10^{-19} ਕੁਲਮ (vi) 20 m/s^2
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) ਸਮੇਂ ਦੀ ਮਿਆਦ (ii) ਦੂਰੀ (iii) ਬਲ
   (iv) ਵੇਗ (v) ਕੰਮ
4. ਚਿੱਤਰ 10.6 (ਇੱਕ ਵਰਗ) ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।
   (i) ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (ii) ਸਮਾਨ
   (iii) ਸਮਰੇਖੀ ਪਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ

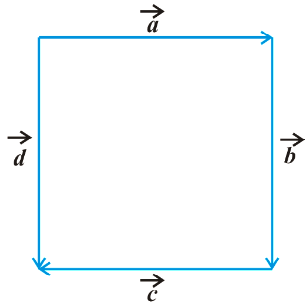
5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਜਾਂ ਗਲਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਉ।

(i) $\vec{a}$ ਅਤੇ $-\vec{a}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

(ii) ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਅਕਾਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

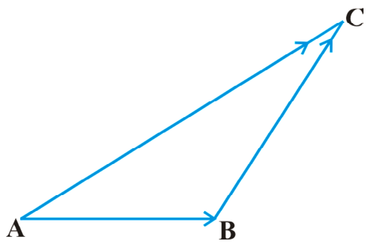
(iv) ਸਮਾਨ ਅਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.6

10.4 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ (Addition of Vectors)

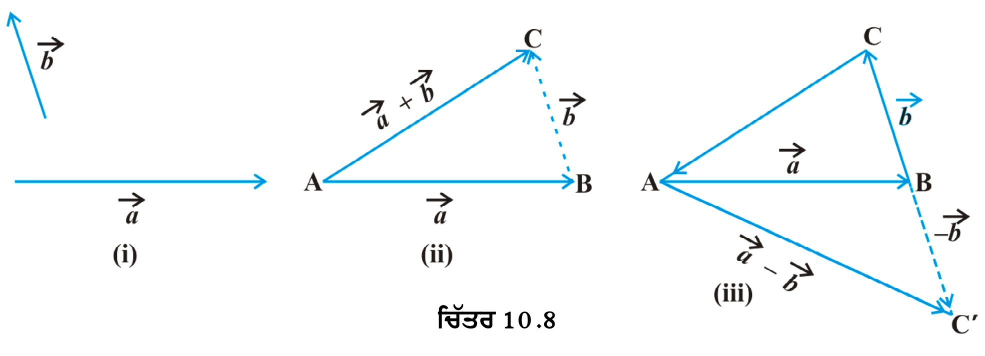
ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਵਿਸਥਾਪਨ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.7)। ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਲੜਕੀ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕੁਲ ਵਿਸਥਾਪਨ ਜੋ ਵੈਕਟਰ ਕਿ $\overrightarrow{AC}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ : ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ10.8 (i)], ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂਕਿ ਇੱਕ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਦੂਜੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਵੇ [ਚਿੱਤਰ 10.8(ii)]।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ, $\vec{a}$ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ AC ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b}$ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਜੋੜ (ਜਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ) ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ; ਭਾਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii)]।



ਚਿੱਤਰ 10.8

ਹੁਣ ਦੁਬਾਰਾ : ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਇਹ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਜੀਰੋ ਅਕਾਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.8(iii)]।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC'}$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC}$, ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਪਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ $\overrightarrow{BC}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਹੋਵੇ ਚਿੱਤਰ 10.8 (iii) ਭਾਵ $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ [ਚਿੱਤਰ 10.8 (iii)] ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}$

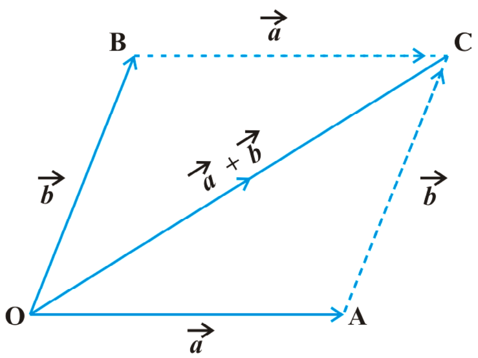
$= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{a} - \vec{b}$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕਿਸੀ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਨਾਉ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਸ ਨਾਵ (ਕਿਸ਼ਤੀ) ਤੇ ਦੋ ਵੇਗ ਵੈਕਟਰ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ, ਇੱਕ ਇੰਜਨ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਵੇਗ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨਦੀ ਦੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦਾ ਵੇਗ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ (ਭਾਵ ਵਿਲੋਪਣ ਵੇਗ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਵਿਚਾਰ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ (ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ) ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.9) ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਿਕਰਣ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜ $\vec{a} + \vec{b}$ ਨੂੰ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ 10. 9 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ਜਾਂ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$) ਜੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਦੋ ਨਿਯਮ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (**Properties of vector addition**)

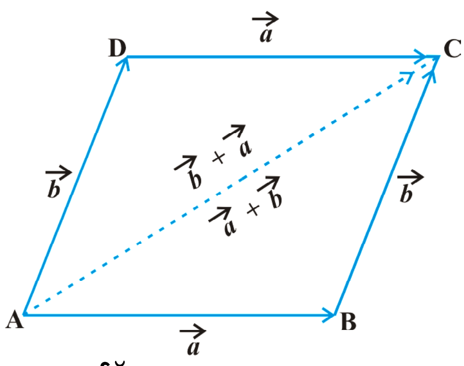
ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ)}$$

ਸਬੂਤ : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਲਉ (ਚਿੱਤਰ 10.10) ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਸਮਾਂਨਤਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 10.10 ਵਿੱਚ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \vec{b}+\vec{a}$

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$



ਚਿੱਤਰ 10.10

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਵਾਸਤੇ

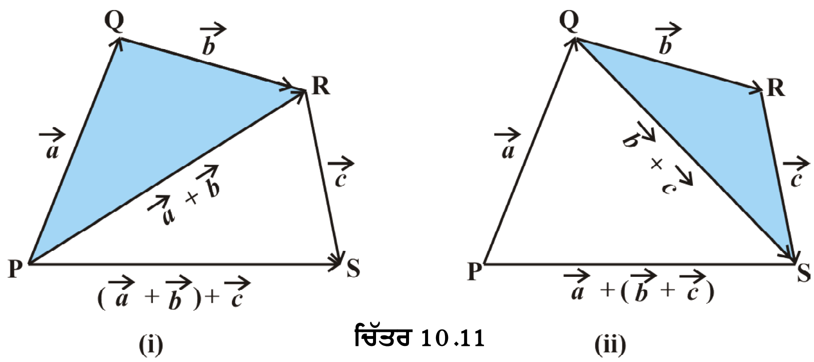
ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ)

ਵਿਸ਼ੇਸਤਾ : ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ ਅਤੇ $\overline{RS}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.11(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਤਾਂ $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$

ਅਤੇ $\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$

ਇਸ ਲਈ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$



ਚਿੱਤਰ 10.11

ਅਤੇ $$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$$

ਇਸ ਲਈ $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

ਟਿੱਪਣੀ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੀ ਬਰੈਕਟ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

ਇੱਥੇ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{0}$ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਲਈ ਜੁੜਣਯੋਗ ਪਛਾਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

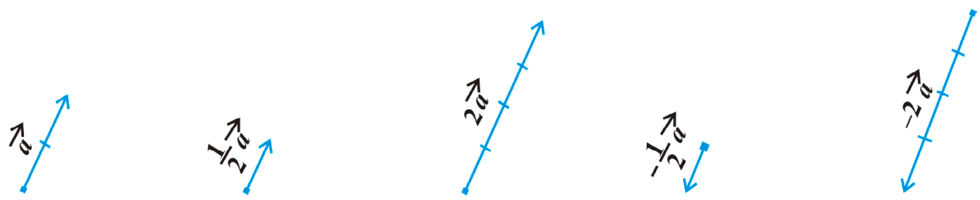
10.5 ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ (Multiplication of a Vector by Scalar)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ। ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ, ਨਾਲ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸ ਨੂੰ $\lambda\vec{a}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $\lambda\vec{a}$ ਵੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\lambda\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ, $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਜਾਂ ਉਲਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। $\lambda\vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਤੋਂ $|\lambda|$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਧਾਰਨ [ਰੂਪ ਦੀ ਕਲਪਨਾ (visualisation)] ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਜਦੋਂ $\lambda=-1$, ਤਾਂ $\lambda\vec{a}=-\vec{a}$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਉਲਟ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $-\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ (ਜਾਂ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਮੇਸ਼ਾ $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ ਹੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.12

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\lambda=\dfrac{1}{|\vec{a}|}$, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\neq 0$, ਜੋ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਨਿਰੁਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

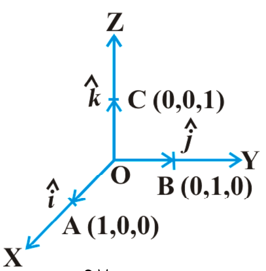
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \text{ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਕੈਲਰ k ਦੇ ਲਈ $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਘਟਕ (Components of a vector)

ਆਉ ਬਿੰਦੂਆਂ A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) ਅਤੇ C(0,0, 1) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x-ਭੁਜਾ y-ਭੁਜ ਅਤੇ z-ਭੁਜ ਤੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{OC}| = 1$$



ਚਿੱਤਰ 10.13

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OC}$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਕਾਰ 1 ਹੈ। ਕ੍ਰਮਵਾਰ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.13)।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ P_1 ਦੇ ਤਲ XOY ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ P_1 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P_1P, z-ਭੁਜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z-ਭੁਜ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

ਅਤੇ

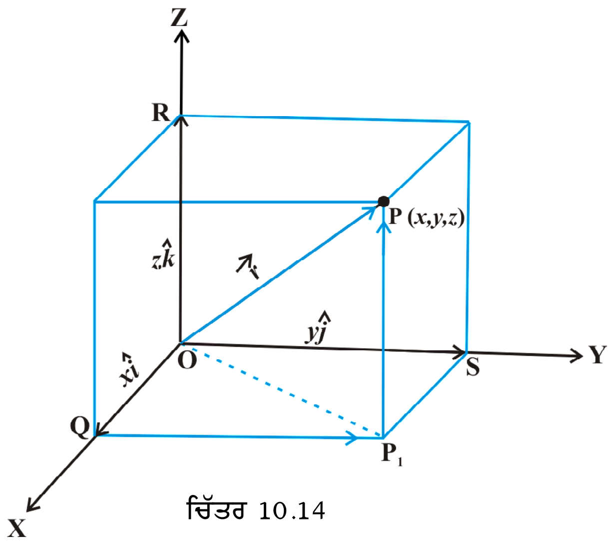
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਦੇ ਨਾਲ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਇਹ ਰੂਪ ਘਟਕ ਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x, y ਅਤੇ z, $\vec{r}$ ਦੇ ਸੇਕੈਲਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ ਅਤੇ $z\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ $\vec{r}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ x, y ਅਤੇ z ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਘਟਕ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਦੀ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਦੋ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤੁਰੰਤ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OQP_1 ਵਿੱਚ (ਚਿੱਤਰ 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



ਚਿੱਤਰ 10.14

ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤਿਕੋਣ OP_1P, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2+y^2)+z^2}$$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ **ਦੀ ਲੰਬਾਈ** $|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।**

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ **ਅਤੇ** $\vec{b}$ **ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :** $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ **ਅਤੇ** $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ **ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ**

(i) **ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਅਤੇ** $\vec{b}$ **ਦਾ ਜੋੜ**

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$ **ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

(ii) **ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਅਤੇ** $\vec{b}$ **ਦਾ ਅੰਤਰ**

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1-b_1)\hat{i} + (a_2-b_2)\hat{j} + (a_3-b_3)\hat{k}$ **ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

(iii) **ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਅਤੇ** $\vec{b}$ **ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਜੇਕਰ**

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ **ਅਤੇ** $a_3 = b_3$

(iv) **ਕਿਸੇ ਸਕੈਲਰ** λ **ਦਾ ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਦਾ ਗੁਣਾ**

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ **ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।**

ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸਕਲੇਰ ਨਾਲ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਗੁਣਾ ਇਕੱਠੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੰਡਣਾਤਮਕ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ k ਅਤੇ m ਦੋ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$ (ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ (iii) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਤੁਸੀਂ ਨੋਟਿਸ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ λ ਨੂੰ **ਕਿਸੀ ਵੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ** $\lambda\vec{a}$ **ਹਮੇਸ਼ਾ ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ **ਸਮਰੇਖੀ ਤਾਂ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ** λ **ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੌਜੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ** $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ **ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ **ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਭਾਵ** $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ **ਅਤੇ** $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, **ਤਾਂ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਰੇਖੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ**

$$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda a_2,\ b_3 = \lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

2. **ਜੇਕਰ** $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ **ਤਾਂ** a_1, a_2, a_3 **ਵੈਕਟਰ** $\vec{a}$ **ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ।**
3. **ਜੇਕਰ** l, m, n **ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਇਨ ਹੈ ਤਾਂ**

$$l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$$

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿੱਥੇ : α, β ਅਤੇ γ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੁਆਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z ਭੁਜ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :4. x, y **ਅਤੇ** z **ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ** $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ **ਅਤੇ** $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ **ਬਰਾਬਰ ਹਨ।**

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $x = 2, y = 2, z = 1$

ਉਦਾਹਰਣ :5. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ਤਦ ਕੀ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ਹੈ ? ਕੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ **ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ?**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ **ਅਤੇ** $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

ਹੱਲ. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੁਣ $$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

ਉਦਾਹਰਣ :7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 7 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ 7 ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ :8. ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \text{ ਜਿੱਥੇ } \vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਹੈ।}$$

ਅਤੇ $$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 9. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

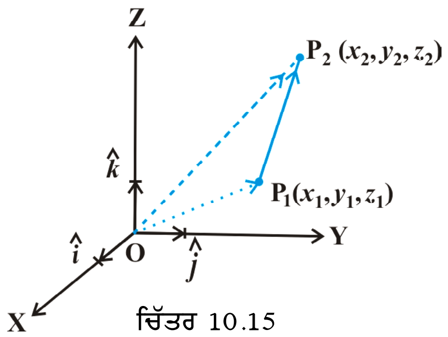
ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਵੈਕਟਰ ਦੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ x, y, z ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a = 1, b = 1$ ਅਤੇ $c = -2$ ਹੈ। ਅੱਗੇ : ਜੇਕਰ l, m ਅਤੇ n ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਇਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } |\vec{r}| = \sqrt{6})$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ ਹਨ।

10.5.2 *ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ* *(Vector joining two points)*

ਜੇਕਰ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ P_1 ਨੂੰ P_2 ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.15)। P_1 ਅਤੇ P_2 ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OP_1P_2 ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



ਚਿੱਤਰ 10.15

ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

ਭਾਵ
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 10. ਬਿੰਦੂਆਂ P(2, 3, 0) ਅਤੇ Q(– 1, – 2, – 4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਅਤੇ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

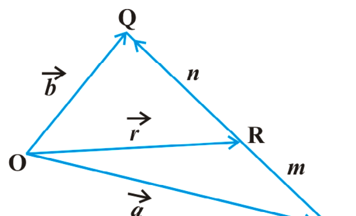
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ; P ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਅਤੇ Q , ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

ਭਾਵ
$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 *ਕਾਟ ਸੂਤਰ* *(Section Formula)*

ਮੰਨ ਲਉ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ P ਅਤੇ Q ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਿੰਦੂਆਂ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਕਿਸੇ ਤੀਜੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਿਭਜਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਅੰਦਰੂਨੀ ਚਿੱਤਰ 10.16) ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ (ਚਿੱਤਰ 10.17)। ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OR}$ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.16

ਸਥਿਤੀ: ਜਦੋਂ **R, PQ** ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)। ਜੇਕਰ R, $\overrightarrow{PQ}$ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $m\,\overrightarrow{RQ} = n\,\overrightarrow{PR}$, ਜਿੱਥੇ m ਅਤੇ n ਧਨਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ R,

$\overrightarrow{PQ}$ ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ORQ ਅਤੇ OPR ਤੋਂ

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

ਅਤੇ

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$$

ਇਸ ਲਈ

$$m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

ਜਾਂ

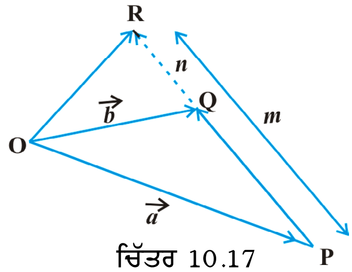
$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \qquad (\text{ਹੱਲ/ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ})$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ R ਜੋ ਕਿ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ II ਜਦੋਂ R, PQ ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.17)। ਇਹ ਤਸਦੀਕ ਕਰਨਾ ਅਸੀਂ ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਛੱਡਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R $\left(\text{ਭਾਵ } \frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}\right)$ **ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ**

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.17

ਟਿੱਪਣੀ : **ਜੇਕਰ** R, PQ **ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ** $m = n$ **ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ** I **ਤੋਂ** $\overrightarrow{PQ}$ **ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ** R **ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ** $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ : 11. ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਲਵੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2.1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 12. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4j-4\hat{k})$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

ਅਤੇ
$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6+35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਅੰਕ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :

$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
3. ਸਮਾਨ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
4. x ਅਤੇ y ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}+3\hat{j}$ ਅਤੇ $x\hat{i}+y\hat{j}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।
5. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ (2, 1) ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ (–5, 7) ਹੈ। ਇਸ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ (1, 2, 3) ਅਤੇ (4, 5, 6) ਹਨ।
9. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਵੈਕਟਰ $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 8 ਇਕਾਈ ਹੈ।
11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $-4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
12. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, 2, –3) ਅਤੇ B(–1, –2, 1) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ A ਤੋਂ B ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਧੁਰਿਆਂ OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ (ਸਮਾਨ) ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

15. ਬਿੰਦੂਆਂ P $(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ਅਤੇ Q $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(2, 3, 4) ਅਤੇ Q(4, 1, –2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਹੈ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ।

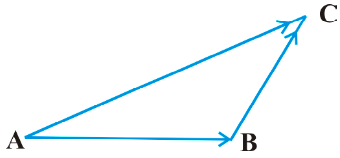
18. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC (ਚਿੱਤਰ 10.18), ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$



ਚਿੱਤਰ 10. 18

19. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, ਕਿਸੀ ਸਕੇਲਰ λ ਦੇ ਲਈ

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ ਸਮਾਨਅਨੁਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(D) ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ; ਪਰ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਿਭਿੰਨ ਹੈ।

10.6 ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (Product of Two Vectors)

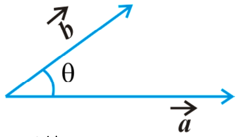
ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਦੂਜੀ ਅਲਜਬਰੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵੀ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਇਹ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਜਿਉਮੈਟਰੀ, ਮਕੈਨਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਉਪਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ (ਅਨੁਭਾਗ) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

10.6.1 *ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ* [*Scalar (or dot) product of two vectors*]

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ θ, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0 \le \theta \le \pi$ (ਚਿੱਤਰ 10.19)।

ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$, ਤਾਂ θ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.19

ਨਿਰੀਖਣ

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਹੈ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \pi$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ θ, π ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
5. ਨਿਰੀਖਣ ਪ੍ਰੇਖਣ 2 ਅਤੇ 3 ਦੀ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

ਅਤੇ

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

6. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ ਜਾਂ } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \text{ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$

7. ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Two important properties of scalar product)

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1. (ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਜੋੜ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ) ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})$$

$$+ a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

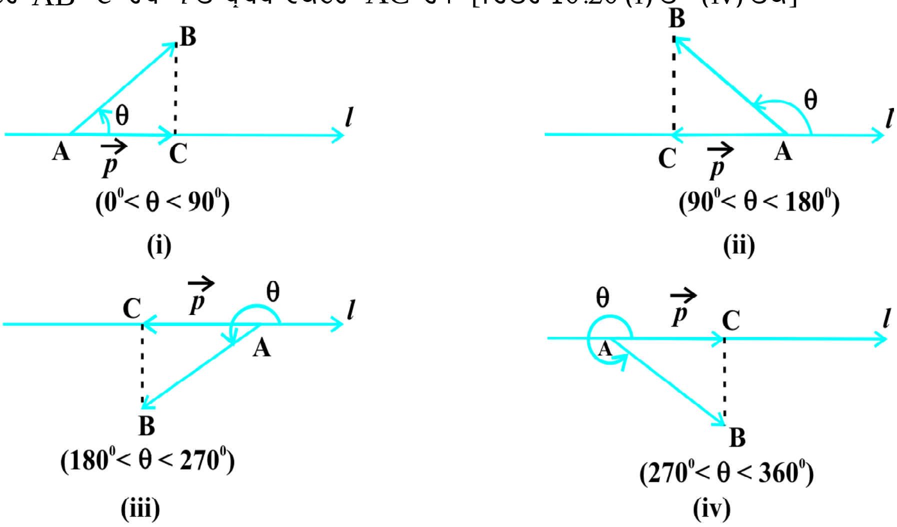
(ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$ (ਨਿਰੀਖਣ 5 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

10.6.2 *ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਕਿਸੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ* **(*Projection of a vector on a line*)**

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਕਿਸੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ l (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ ਨਾਲ ਖੱਬੇ ਗੇੜੇ (ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ å°Àñ à Ç̧ ôÅ) ਵਿੱਚ θ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.20 ਦੇਖੋ) ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ l ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਖੇਪ Projection ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਾ l ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਵੱਲ (ਜਾਂ ਉਲਟ) ਹੋਣਾ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\cos\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ। ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਖੇਪ (Projection) ਵੈਕਟਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\vec{p}|$, ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC}$ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.20 (i) ਤੋਂ (iv) ਤੱਕ]



ਚਿੱਤਰ 10.20

ਨਿਰੀਖਣ

1. ਰੇਖਾ l ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $\hat{p}$ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਪ੍ਰਖੇਪ $\vec{a}.\hat{p}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਦੂਜੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$, ਤੇ $\vec{a}\cdot\hat{b}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, ਜਾਂ $\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਖੁਦ $\overrightarrow{AB}$ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\theta = \pi$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BA}$ ਹੋਵੇਗਾ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \frac{\theta}{2}$ ਜਾਂ $\theta = \frac{3\theta}{2}$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ α, β ਅਤੇ γ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \text{and} \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ ਅਤੇ $|\vec{a}|\cos\gamma$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਵੈਕਟਰ a_1, a_2 ਅਤੇ a_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x, y,$ ਅਤੇ z ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 13. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, ਇਹਨਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1, |\vec{a}|=1$ ਅਤੇ $|\vec{b}|=2$. ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 14. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 1-1-1 = -1$$

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cos\theta = \dfrac{-1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 15. ਜੇਕਰ $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜੀਰੋ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $\vec{a} + \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

ਇਸ ਲਈ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 24 - 8 - 16 = 0$

ਇਸ ਲਈ $\vec{a} + \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b}$ ਪਰਸਪਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ : 16. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹੈ।

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}}(2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 + 2 \,.\, 1) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 17. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ ਅਤੇ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ਤਾਂ $|\vec{a} - \vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \vec{a}.\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\
&= (2)^2 - 2(4) + (3)^2
\end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$, ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}| = 1$. ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$$

ਜਾਂ $\vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{x} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 8$

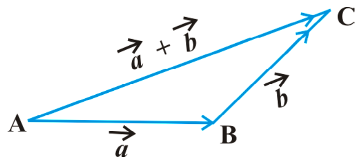
ਜਾਂ $|\vec{x}|^2 - 1 = 8$ ਜਾਂ $|\vec{x}|^2 = 9$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{x}| = 3$(ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz ਅਸਮਾਨਤਾ)।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$. ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$. ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$ ਹਾਂ ਅਸੀਂ

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਇਸ ਲਈ $\quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ)

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ, ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ $\vec{a} = 0$ ਜਾਂ $\vec{b} = 0$ ਵਿੱਚ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ ?)। ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $|\vec{a}| \ne \vec{0} \ne |\vec{b}|$ ਤਾਂ

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$ (ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ।)

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \le |x| \; \forall x \in \mathbf{R}$)

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$ (ਉਦਾਹਰਨ 19 ਤੋਂ)

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

ਇਸ ਲਈ : $\quad |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨਤਾ ਰੱਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ 20 ਵਿੱਚ) ਇਸ ਲਈ
>
> $$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$ ਤਾਂ
>
> $$|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$
>
> ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ ਅਤੇ $C(7\hat{i}-\hat{k})$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-5)\hat{k} = 3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j}+(-1-3)\hat{k} = 6\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i}+(0-3)\hat{j}+(-1-5)\hat{k} = 9\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਉਦਾਹਰਨ 21 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+\hat{j}$ ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}-\hat{j}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :
   $$\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}),\ \frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}),\ \frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$$
   ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ।
6. ਜੇਕਰ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=8$ ਅਤੇ $|\vec{a}|=8|\vec{b}|$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|\vec{a}|$ ਅਤੇ $|\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਆਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।
9. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, ਦੇ ਲਈ $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=12$ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਜੇਕਰ $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਤਾਂ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

12. ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿ ਨਿਸ਼ਕਰਸ਼ (ਨਤੀਜਾ) ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

13. ਜੇਕਰ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b}=\vec{0}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਸਿਖਰ, A, B, C ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) ਹੈ ਤਾਂ $\angle ABC$ ਪਤਾ ਕਰੋ। [$\angle ABC$, ਸਿਖਰ $\overrightarrow{BA}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ।]

16. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) ਅਤੇ C(3, 10, –1) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

17. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

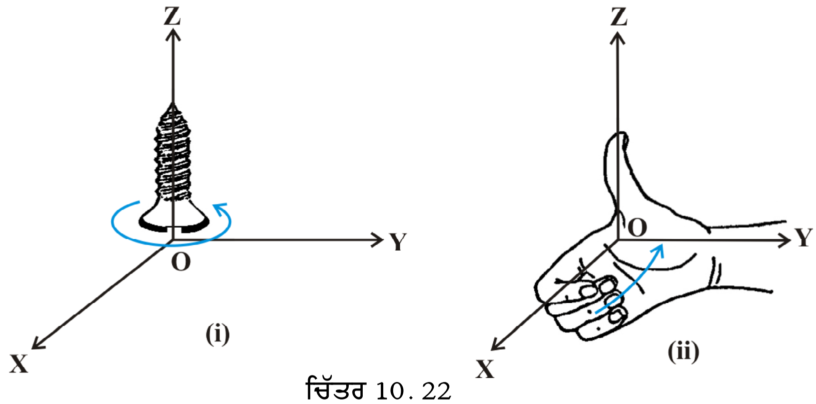
18. ਜੇਕਰ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ 'a' ਹੈ ਤਾਂ λ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ $\lambda\vec{a}$ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

10.6.3 ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ *[Vector (or cross) product of two vectors]*

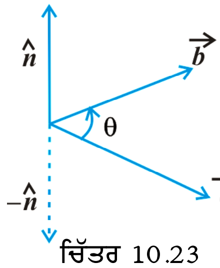
ਭਾਗ 10.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰੈ ਵਿਮਾਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਆਇਤਾਕਾਰ ਤਾਲਮੇਲ ਸਿਸਟਮ (ਪ੍ਰਣਾਲੀ) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ x ਭੁਜ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਗੇੜ (ਘੜੀ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਘੁਮਾ ਕੇ ਧਨਾਤਮਕ y-ਭੁਜ ਤੇ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਧਨਾਤਮਕ z-ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ (ਮਿਆਰੀ) ਪੇਂਚ ਅੱਗੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.22 (i)]।

ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀਆਂ ਉਂਗਲੀਆਂ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ x- ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਦੂਰ ਧਨਾਤਮਕ y-ਭੁਜ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਗੂਠਾ ਧਨਾਤਮਕ z-ਭੁਜਾ ਦੇ ਵੱਲ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.22 (ii)] ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10. 22

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b}$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ θ, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0\le\theta\le\pi$ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$,ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.23) ਇਸ ਲਈ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁੰਮਾਉਣ ਤੇ ਇਹ $\hat{n}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.23

ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਅਤੇ $\vec{b}=\vec{0}$, ਤਾਂ θ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

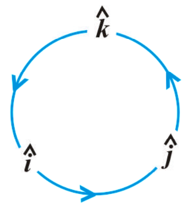
ਪ੍ਰੇਖਣ :

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।

2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ (ਜਾਂ ਸਮਰੇਖੀ) ਹੈ ਇਸ ਲਈ
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$$
ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ ਅਤੇ $\vec{a}\times(-\vec{a})=\vec{0}$, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = \pi$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ $\sin\theta$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

4. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਝਲਕ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰਾਂ $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ ਦੇ ਲਈ (ਚਿੱਤਰ 10.24), ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j}= \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$



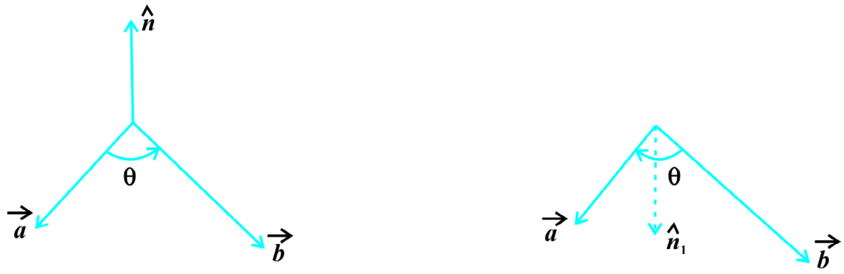
ਚਿੱਤਰ 10.24

5. ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
$$\sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

6. ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, ਜਿੱਥੇ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ θ , $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਵੱਲ ਲੰਘੇ ਹੁੰਦੇ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.25(i) ਜਦੋਂ ਕਿ

$\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}_1$, ਜਿੱਥੇ $\vec{b}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\theta, \vec{b}$ ਤੋਂ $\vec{a}$ ਤੋਂ ਦੇ ਵੱਲ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮਹੁੰਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 10.25(ii)।

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ



(i) ਚਿੱਤਰ 10.25 (ii)

ਲੰਬ ਹੋਣਗੇ $\hat{n}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ (ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਹੋਵੇਗਾ ਇਸ ਲਈ $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

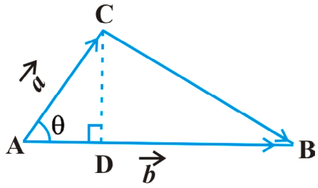
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\qquad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}_1 = -\vec{b} \times \vec{a}$$

7. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 4 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਝਲਕ ਵਿੱਚ

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \text{ ਅਤੇ } \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \text{ ਹੈ।}$$

8. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.26

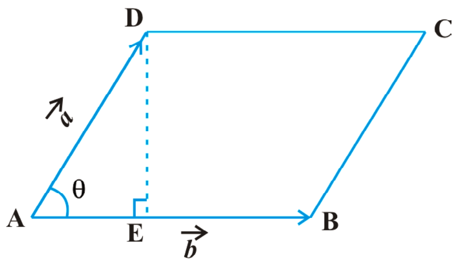
ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 10.26 ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{CD}$. ਪਰੰਤੂ $\text{AB} = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ) ਅਤੇ

$\text{CD} = |\vec{a}| \sin\theta$

ਇਸ ਲਈ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

9. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10.27 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = AB. DE.



ਚਿੱਤਰ 10.27

ਪਰ $AB = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ), ਅਤੇ

$DE = |\vec{a}|\sin\theta$ ਇਸ ਲਈ

ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ

ਖੇਤਰਫਲ $= |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta \;= |\vec{a}\times\vec{b}|$

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3. ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ (Distributivity of vector product over addition) ਜੇਕਰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਖਿਆ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})\\ &\quad + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})\\ &\quad + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \qquad \text{(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 ਤੋਂ)}\\ &= a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})-a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i})-a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j})\\ &\quad + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})-a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k})\end{aligned}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ ਅਤੇ $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k}-a_1b_3\hat{j}-a_2b_1\hat{k}+a_2b_3\hat{i}+a_3b_1\hat{j}-a_3b_2\hat{i}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$)

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$, ਤਾਂ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15)-(-4-9)\hat{j}+(10-3)\hat{k} = -17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2} = \sqrt{507}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਵੈਕਟਰ $(\vec{a}+\vec{b})$ ਅਤੇ $(\vec{a}-\vec{b})$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ, ਜੋ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}\ \ (=\vec{c},\text{ ਮੰਨ ਲਓ })$$

ਹੁਣ $\quad |\vec{c}| = \sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}\text{ ਹੈ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੇ ਦੋ ਅਭਿਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾਵਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਤੇ ਦੂਜਾ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ ਹੋਵੇਗਾ।ਪਰੰਤੂ ਇਹ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) ਅਤੇ C(2, 3, 1) ਹੈ।

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = -4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਉਸ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ। ਉਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\sqrt{42}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.4

1. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਤਾਂ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b}$ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, $\hat{i}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਬਣਦਾ ਹੈ ਕਿ θ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦਾ ਘਟਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

5. λ ਅਤੇ μ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

6. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ਅਤੇ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

7. ਮੰਨ ਲਉ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k},\ c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ, ਹੁਣ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

8. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਉਲਟ ਸਹੀ ਹੈ ? ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

9. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) ਅਤੇ C(1, 5, 5) ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹਨ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = 3$ ਅਤੇ $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ :

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/3$ (D) $\pi/2$

12. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਸਿਖਰ A, B, C ਅਤੇ D ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k},\ \hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k},\ \hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ ਅਤੇ $-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, ਹੈ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

(C) 2 (D) 4

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣਾਂ 26. XY-ਤਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।

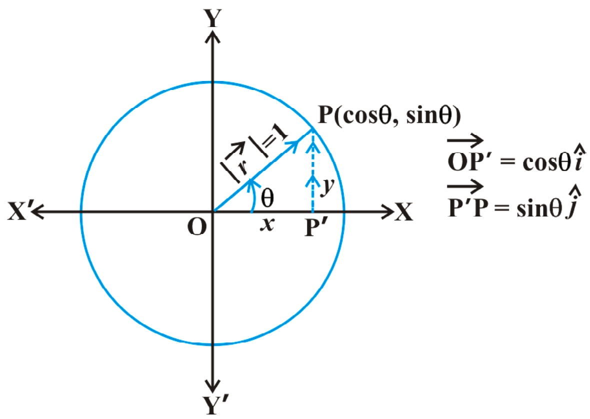
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, XY-ਤਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.28)। ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਅਤੇ $y = \sin\theta$ (ਕਿਉਂਕਿ $|\vec{r}| = 1$). ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਨੂੰ

$$\vec{r}\,(=\overline{\text{OP}}) = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \qquad \dots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $$|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ θ, 0 ਤੋਂ 2π, ਤੱਕ ਤਬਦੀਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਬਿੰਦੂ P (ਚਿੱਤਰ 10.28) ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵਿੱਚ



ਚਿੱਤਰ 10.28

ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 1$ ਦੀ ਬਣਾਵਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ XY-ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D, ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ ਹੈ, ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਟਾ ਕੱਢੋ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ θ, AB ਅਤੇ CD, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਤਾਂ θ, $\overrightarrow{\text{AB}}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{\text{CD}}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਵੀ ਕੋਣ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\overrightarrow{\text{AB}} = \text{B ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ} - \text{A ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ}$$

$$= (2\hat{i} + 5\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $$|\overrightarrow{\text{AB}}| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

ਇਸ ਲਈ $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = 6\sqrt{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$$
$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq \theta \leq \pi$, ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\theta = \pi$. ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਵਿਕਲਪ : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ, ਹੋਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

ਹੁਣ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$
$$+ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$
$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸ਼ਰਤ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ ਅਤੇ $|\vec{c}| = 2$ ਤਾਂ ਰਾਸ਼ੀ $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

ਇਸ ਲਈ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -9 \quad \ldots (1)$$

ਦੁਬਾਰਾ
$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} = -|\vec{b}|^2 = -16 \quad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4$ ... (3)

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -29$$

ਜਾਂ $$2\mu = -29, \text{ i.e., } \mu = \frac{-29}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਜੇਕਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i},\ \hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੀ ਸੱਜ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਨਾਲ $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$, ਤਾਂ $\vec{\beta}$ ਨੂੰ $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i} - \lambda\hat{j}$

ਹੁਣ $$\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i} + (1+\lambda)\hat{j} - 3\hat{k}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$

ਜਾਂ $$3(2-3\lambda) - (1+\lambda) = 0$$

ਜਾਂ $$\lambda = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\vec{\beta}_1 = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} \text{ ਅਤੇ } \vec{\beta}_2 = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - 3\hat{k}$$

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. XY-ਤਲ ਵਿੱਚ, x-ਭੁਜ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
2. ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਘਟਕ ਅਤੇ ਅਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਪੱਛਮੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 4 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੱਛਮ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 3 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਥਾਨ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੜਕੀ ਦਾ ਵਿਸਥਾਪਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, ਤਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
5. x ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ 5 ਇਕਾਈ ਹੈ।

7. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ ਅਤੇ $C(11, 3, 7)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ AC ਨੂੰ ਵੰਡਣ ਵਾਲਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P $(2\vec{a} + \vec{b})$ ਅਤੇ $Q(\vec{a} - 3\vec{b})$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 1:2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P ਰੇਖਾਖੰਡ RQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ।

12. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{d}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$

13. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰਾਂ $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰਾਂ ਵਾਲੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਭ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

15. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

16 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ :

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (B) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < \theta < \pi$ (D) $0 \leq \theta \leq \pi$

17. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a} + \vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ :

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (C) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (D) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}.(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i} \times \hat{j})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਹੈ ?

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਜਦੋਂ θ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}(=\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਹੈ ਅਤੇ ਆਕਾਰ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਘਟਕ ਇਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ ਅਤੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਜੈਕਸ਼ਨ (ਵਧਾ) ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ (r), ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਇਨ (l, m, n) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ :

$$l=\frac{a}{r},\quad m=\frac{b}{r},\quad n=\frac{c}{r}$$

- ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਣ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ $\vec{0}$ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਹਿ-ਮੁੱਢਲੇ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਇਸ ਦੇ ਆਕਾਰ ਨੂੰ $|\lambda|$ ਦੇ ਗੁਣਾਕ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਬਾਰਬਰ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।
- ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ, ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (i) $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਤੇ (ii) $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਤੇ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ

$\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ 'θ', $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ

  $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਸਮਕੋਣ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

- ਜੇਕਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ਅਤੇ $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਲੈਟਿਨ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ਬਦ ਵੈਕਟਸ (vectus) ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਲੈ ਲਈ"। ਆਧੁਨਿਕ ਵੈਕਟਰ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪੈਦਾਇਸ਼ੀ ਵਿਚਾਰ ਦੀ ਮਿਤੀ ਸੰਨ 1800 ਦੇ ਆਸ ਪਾਸ ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ Caspar Wessel (1745-1818 ਈ.) ਅਤੇ Jean Robert Argand (1768-1822 ਈ.) ਨੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜ-ਤਲ (ਨਿਰਦੇਸ਼-ਤਲ) ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਲਾਇਨ ਖੰਡ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a + ib$ ਦਾ ਜਨਮ ਜਾਂ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਆਇਰਿਸ਼ ਗਣਿਤਕਾਰ William Rowen Hamilton (1805-1865 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਿਤਾਬ "*Lectures on Quaternions*" (1853 ਈ.) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। (quaternians) [ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬੀਜਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $a + b\,\hat{i} + c\,\hat{j} + d\,\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ] ਦੀ ਹੈਮਿਲਟਨ ਵਿਧੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿ-ਵਿਮਾਈ ਬ੍ਰਹਿਮੰਡ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਸ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਜ਼ਰੂਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ

ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਬਹੁਤ-ਦਿਨਾਂ ਤੋਂ Plato (384-322 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਇੱਕ ਅਨੁਜਾਈ ਅਤੇ ਯੂਨਾਨੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨਕ Aristotle (427-348 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕਾਲ ਵਿੱਚੋਂ ਹੈ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਬਲਾਂ ਦੀ ਸੰਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਪਾਤ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਬਲਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਹੀ ਨਿਯਮ ਕਿ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਖੋਜ Sterin Simon (1548-1620 ਈਸਵੀ) ਦੁਆਰਾ ਲੰਬਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਨ 1586 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ "*DeBeghinselen der Weeghconst*" (ਵਜਨ ਕਰਨ ਦੀ ਕਲਾ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ) ਵਿੱਚ ਬਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੀ ਜਿਊਮੈਟਰੀ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਯੰਤਰਿਕ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ। ਪਰ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 200 ਸਾਲ ਲੱਗ ਗਏ।

ਸੰਨ 1880 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਮਰੀਕੀ ਭੌਤਿਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਹਿਸਾਬਦਾਨ Josaih Willard Gibbs (1839-1903 ਈਸਵੀ) ਅਤੇ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਇੰਜੀਨੀਅਰ Oliver Heaviside (1850-1925 ਈਸਵੀ) ਨੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ (ਸਕੈਲਰ) ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ (ਵੈਕਟਰ) ਭਾਗ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਦਾ ਬਿਊਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਸੰਨ 1881 ਅਤੇ 1884 ਵਿੱਚ Gibbs ਨੇ "*Entitled Element of Vector Analysis*" ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ ਛਪਾਈ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਵਰਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਤੀ D. Heaviside ਅਤੇ P.G. Tait (1831-1901 ਈਸਵੀ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਸਬੂਤ (ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ) ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 11

ਤਿੰਨ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ
(Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Leonhard Euler
(1707-1783)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਵਿਸਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਵਿਧੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਿਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੈੱਕਟਰਜ਼ ਦੀ ਮੂਲ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਜ਼ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਉਪਗਮਨ (approach) ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇਸ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਅਤੇ ਰੁਚੀਪੂਰਨ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। *

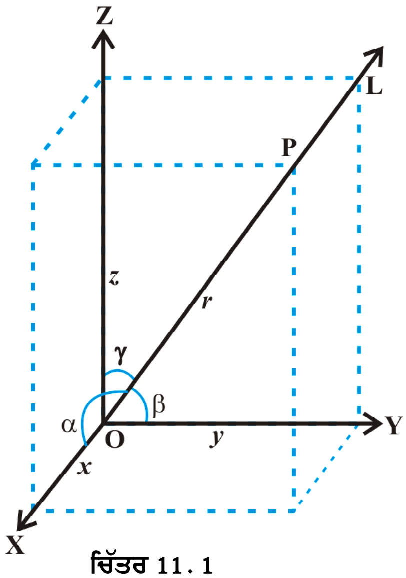
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਿਖ (space) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ, ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਧੇਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ (Vecters) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਨੁਵਾਦ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਚਿੱਤਰਣ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

11.2 ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

ਅਧਿਆਇ 10 ਵਿੱਚ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ L ਦੁਆਰਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ α, β ਅਤੇ γ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools",*** NCERT, 2005

ਦੇ ਕੋਸਾਈਨ ਦਾ ਨਾਮ : $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਰੇਖਾ L ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਇਨ (direction cosines or dc's) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 11.1

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ L ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਪਰੀਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਕਾਂ ਅਰਥਾਤ π-α, π-β ਅਤੇ π-γ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਪਰੀਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਸਮੂਹ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ l, m ਅਤੇ n ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (direction ratios or *dr*'s) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ $\lambda \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ ਅਤੇ $c = \lambda n$

ਟਿੱਪਣੀ ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹੈ। ਤਦ

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=k \text{ (ਮੰਨ ਲਓ), } k \text{ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad l = ak,\ m = bk,\ n = ck \qquad \dots (1)$

ਪਰੰਤੂ $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ਇਸ ਲਈ $\quad k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

ਜਾਂ
$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ($d.c.$'s) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

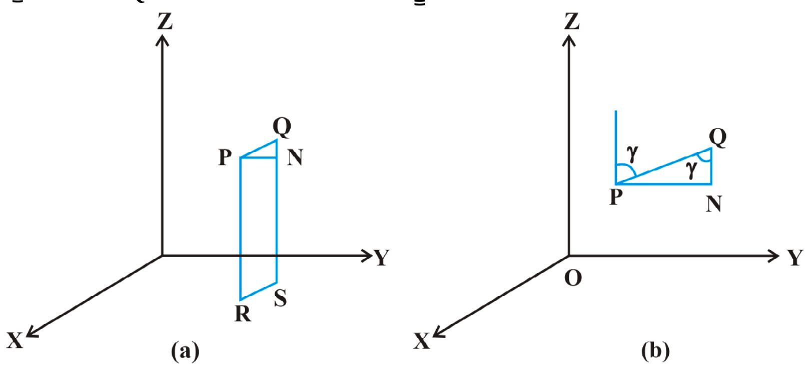
ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a, b, c ਹਨ, ਤਾਂ $ka, kb, kc;\ k \neq 0$ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

11.2.1 ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ *(Direction cosines of a line passing through two points)*

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.2(a))।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : α, β, γ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਓ P ਅਤੇ Q ਤੋਂ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ XY-ਤਲ ਨੂੰ R ਅਤੇ S ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। P ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਲੰਬ



ਚਿੱਤਰ 11.2

ਖਿੱਚੀਏ ਜੋ QS ਨੂੰ N ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PNQ ਵਿੱਚ, $\angle PQN = \gamma$ (ਚਿੱਤਰ 11.2 (b)) ਇਸ ਲਈ

$$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ} \text{ और } \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

$$x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1, \text{ ਜਾਂ } \ x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 90°, 60° ਅਤੇ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ। ਤਦ $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \frac{1}{2}$,

$n = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 2, –1, –2 ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :-

$$\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

ਭਾਵ $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, 4, -5)$ ਅਤੇ $(1, 2, 3)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ ਹਨ।}$$

ਜਿੱਥੇ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ਇੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (– 2, 4, – 5) ਅਤੇ (1, 2, 3) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ :

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x-ਧੁਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਾ ਦੇ ਨਾਲ 0°, 90° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ cos 0°, cos 90°, cos 90° ਅਰਥਾਤ 1,0,0 ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 0, 1, 0 ਅਤੇ 0, 0, 1 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A (2, 3, – 4), B (1, – 2, 3) ਅਤੇ C (3, 8, – 11) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ

1 –2, –2 –3, 3 + 4 ਅਰਥਾਤ– 1, – 5, 7 ਹਨ।

B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ 3 –1, 8 + 2, – 11 – 3, ਅਰਥਾਤ, 2, 10,– 14 ਹਨ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ BC ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਅਤੇ BC ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ AB ਅਤੇ BC ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ B ਸਾਂਝਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A, B, ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 90°, 135°, 45° ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ –18, 12, – 4, ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕੀ ਹਨ।
4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (2, 3, 4), (– 1, – 2, 1), (5, 8, 7) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ (3, 5, – 4), (– 1, 1, 2) ਅਤੇ (– 5, – 5, – 2) ਹਨ।

11.3 ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a Line in Space)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

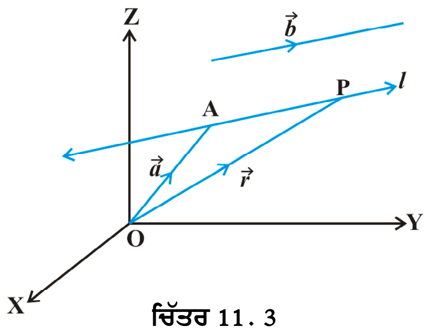
ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

(i) ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਾਂ

(ii) ਇਹ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

11.3.1 *ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ A ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

ਸਮਕੋਣਿਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ l ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ l ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.3)।



ਚਿੱਤਰ 11. 3

ਤਦ $\overrightarrow{AP}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$, ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ $\qquad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

ਭਾਵ $\qquad \lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

ਉਲਟ : ਪੈਰਾਮੀਟਰ λ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} \qquad \text{... (1)}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹੋਣ ਤਾਂ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ b ਨੂੰ $|\vec{b}|$ ਨਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾਵੇ।

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਰੂਪ ਵਿਉਂਤਪੰਨ ਕਰਨਾ (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x_1, y_1, z_1) ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ a, b, c ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ। ਤਾਂ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\ \vec{a} = x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j} + z_1\,\hat{k}$$

ਅਤੇ $\qquad \vec{b} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = x_1 + \lambda a;\ \ y = y_1 + \lambda\, b;\ \ z = z_1 + \lambda c \qquad \dots (2)$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ। (2) ਤੋਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰ λ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad \dots (3)$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਬਿੰਦੂ $(5, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \quad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

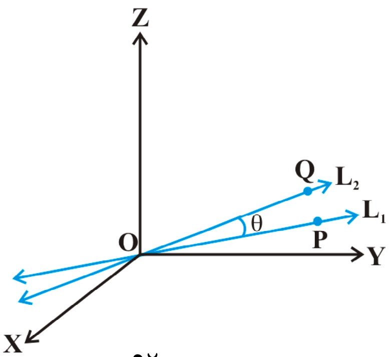
ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

11.4 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ (Angle between two lines)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L_1 ਅਤੇ L_2 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲ਼ੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2, ਹਨ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L_1 ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ L_2 ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11.4 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ OP ਅਤੇ

OQ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਹੁਣ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਦੇ ਘਟਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.4

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sin\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

$$= \sqrt{1-\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1\,b_2-a_2\,b_1)^2+(b_1\,c_2-b_2\,c_1)^2+(c_1\,a_2-c_2\,a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \qquad \ldots (2)$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਨਿਕਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : L'_1 ਅਤੇ L'_2 ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਥਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹੋਣ ਜਿਵੇਂ L_1 ਦੇ ਲਈ l_1, m_1, n_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਲਈ l_2, m_2, n_2 ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਲੈਣਗੇ।

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \qquad \ldots (3)$$

ਅਤੇ
$$\sin\theta = \sqrt{(l_1\,m_2-l_2\,m_1)^2-(m_1\,n_2-m_2\,n_1)^2+(n_1\,l_2-n_2\,l_1)^2} \qquad \ldots (4)$$

ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) ਅਭਿਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $\theta = 90°$, ਅਰਥਾਤ (1) ਤੋਂ $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਅਰਥਾਤ (2) ਤੋਂ $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਾਂ
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ
$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ
$$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \quad \ldots (2)$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਹੈ ਤਾਂ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

ਅਤੇ
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 3, 5, 4 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 1, 1, 2 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

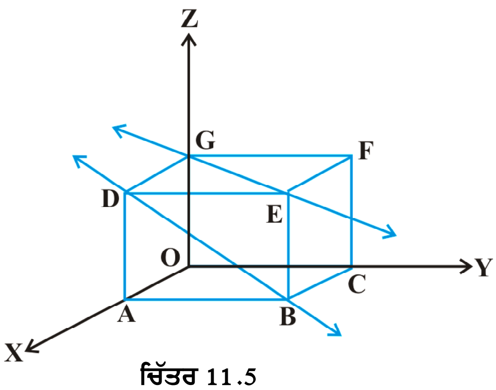
$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\,\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\,\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\cos^{-1}\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ ਹੈ।

11.5 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ (Shortest Distance between two lines)

ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇਗੀ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਵੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਗੈਰ ਸਹਿਸਮਤਲੀ (noncoplanar) ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (skew lines) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.5 ਵਿੱਚ *x, y* ਅਤੇ *z*-ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 1, 3, 2 ਇਕਾਈ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਕਮਰੇ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 11.5

ਰੇਖਾ GE ਛੱਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ DB, A ਦੇ ਠੀਕ ਉੱਪਰ ਛੱਤ ਦੇ ਕੋਨੇ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੋਈ ਦੀਵਾਰ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਦੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

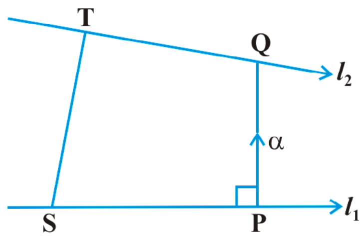
ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੋਵੇਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ।

11.5.1 *ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ* (Distance between two skew lines)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ (ਚਿੱਤਰ 11.6) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\,\vec{b}_1 \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\,\vec{b}_2 \qquad \ldots (2)$$



ਚਿੱਤਰ 11.6

ਰੇਖਾ l_1 ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ S ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ l_2 ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ T ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਲਉ। ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ST ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ (ਸੈਕਸ਼ਨ10.6.2)।

ਜੇਕਰ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋਵੇਂ $\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗੀ। $\overrightarrow{PQ}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \ldots (3)$$

ਤਾਂ $$\overrightarrow{PQ} = d\,\hat{n}$$

ਜਿੱਥੇ d, ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{PQ}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ, ਤਾਂ

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਪਰੰਤੂ $$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \quad \text{(ਕਿਉਂਕਿ } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1\text{)}$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad \text{((3) ਦੇ ਦੁਆਰਾ)}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਜਾਂ $$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਰੇਖਾਵਾਂ :

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

ਅਤੇ
$$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

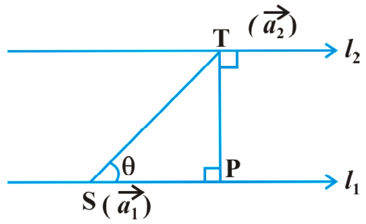
11.5.2 *ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ (Distance between parallel lines)*

ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਹਿ ਸਮਤਲੀ (Coplanar) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ
$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b} \qquad \text{... (2)}$$

ਹਨ, ਜਿੱਥੇ l_1 ਤੇ ਬਿੰਦੂ S ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ l_2 ਤੇ ਬਿੰਦੂ T ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.7)



ਚਿੱਤਰ 11.7

ਕਿਉਂਕਿ l_1, ਅਤੇ l_2 ਸਹਿਸਮਤਲੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ T ਤੋਂ l_1 ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ P ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ = |TP|

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਤਦ

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \text{... (3)}$$

ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ
$$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ਇਸ ਲਈ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\mathrm{PT}\,\hat{n} \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ PT = ST}\sin\theta)$$

ਅਰਥਾਤ $$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\mathrm{PT}\cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = |\overrightarrow{\mathrm{PT}}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \ldots (2)$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$, ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

ਅਤੇ $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ ÇÕ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (ਕਿਉਂ) ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ ਵਾਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੈ।
2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (0, 3, 2) ਅਤੇ (3, 5, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
3. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ (4, 7, 8), (2, 3, 4) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂਆਂ (– 1, – 2, 1), (1, 2, 5) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
4. ਬਿੰਦੂ (1, 2, 3) ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
5. ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i} - j + 4\hat{k}$ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (– 2, 4, – 5) ਤੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ-ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

9. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ-ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ ਅਤੇ $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ ਅਤੇ $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

10. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$

ਅਤੇ $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ ਅਤੇ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

12. ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ ਦੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ ਅਤੇ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ ਦੇ ਵਿਚਾਕਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

15. ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ $b-c, c-a, a-b$ ਹਨ।

2. x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2k} = \dfrac{z-3}{2}$ ਅਤੇ $\dfrac{x-1}{3k} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਬਿੰਦੂ $(1, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+19}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$ ਅਤੇ $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦਾ ਕੋਸਾਈਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਤਾਂ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

  $\dfrac{x_2-x_1}{PQ}, \dfrac{y_2-y_1}{PQ}, \dfrac{z_2-z_1}{PQ}$ ਹਨ।

  ਜਿੱਥੇ $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$
- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹਨ ਤਾਂ

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ** : ਅੰਤਰਿਖ ਦੀਆਂ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਕਾਟਵੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਭਿੰਨ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- **ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ : ਉਹ ਕੋਣ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (ਤਰਜੀਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ) ਤੋਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਦੋ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।**
- ਜੇਕਰ l_1, m_1, n_1 ਅਤੇ l_2, m_2, n_2 ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ
$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$
- ਜੇਕਰ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ
$$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ ਵਿੱਚ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1, z_1) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ ਹੈ।
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹਨ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਨਿਊਨਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$$
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ ਅਤੇ
$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ
$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.
- ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਉਹ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਜੋ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$\left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$ ਹੈ।

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ ਅਤੇ $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$ ਹੈ।

- ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ

$$\left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$$ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 12

ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

12.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

L. Kantorovich

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ ਗਿਆਰਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਗਣਿਤ ਦੇ ਕਈ ਉਪਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/ (Inequations) ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਕ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਜਿਵੇਂ ਮੇਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦਾ ਵਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਨਿਵੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੋਲ 50,000 ਰੁ: ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਤੇ 2500 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਤੇ 500 ਰੁ: ਦੀ ਲਾਗਤ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਨੂੰ ਵੇਚ ਕੇ ਉਹ 250 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਤੇ 75 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਉਸ ਨੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਦ ਉਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਨਿਵੇਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਖੋਜਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ (Optimisation Problems) ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ, ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਜਾਂ ਸੰਸਧਾਨਾਂ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਉਪਯੋਗ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਰਸਾਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆ ਵੀ ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਉਦਯੋਗ, ਵਣਿਜ, ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਕਾਰਣ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਸ਼ਾਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਦਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵੀ ਹਨ।

12.2 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਫਰਨੀਚਰ ਡੀਲਰ ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨਪੂਰਵਕ ਦੇਖਿਆ ਕਿ

(i) ਵਪਾਰੀ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਜਾਂ ਕੁਰਸੀਆਂ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਯੋਜਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ।

(ii) ਕੁਝ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ/ਬੰਦਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਸਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਅਧਿਕਤਮ 50,000 ਰੁ: ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਅਧਿਕਤਮ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਕੁਰਸੀ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦਦਾ ਕੇਵਲ ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚੈ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉਹ $50{,}000 \div 2500$, ਜਾਂ 20 ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs (250×20) ਜਾਂ Rs 5000 ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਮੇਜ਼ ਨਾ ਖਰੀਦ ਕੇ ਕੇਵਲ ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਣੀ ਉਪਲਬਧ 5000 ਰੁ: ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ $50{,}000 \div 500$, ਅਰਥਾਤ 100 ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਨਗਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਰੱਖ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਬੰਧਿਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs 60×75 ਅਰਥਾਤ **Rs 4500** ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਜਿਹੀਆਂ ਹੋਰ ਵੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਹ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਦੇ ਕੋਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦਾ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਰੁ: $(10 \times 250 + 50 \times 75)$, ਅਰਥਾਤ Rs 6250 ਆਦਿ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਵਿਭਿੰਨ ਚੋਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਪਣਾ ਕੇ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ। ਹੁਣ ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਤੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

12.2.1 *ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Mathematical Formulation of the Problem)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ y ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad \ldots (1) \\ y \geq 0 \quad \ldots (2) \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l}\text{ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ} \\ \text{ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਬੰਦਿਸ਼}\end{array}\right)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ

ਵਪਾਰੀ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਇੱਥੇ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀ Rs 50,000 ਹੈ) ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ ਵਪਾਰੀ ਦੇ ਕੋਲ ਕੇਵਲ ਅਧਿਕਤਮ ਵਸਤੂਆਂ (ਇੱਥੇ ਇਹ 60 ਹੈ)ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ।

ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ

$$2500x + 500y \le 50,000 \quad \text{(ਨਿਵੇਸ਼ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)}$$

ਜਾਂ
$$5x + y \le 100 \qquad \dots (3)$$

ਅਤੇ
$$x + y \le 60 \quad \text{(ਸਟੋਰ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)} \qquad \dots (4)$$

ਵਪਾਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਉਸ ਦਾ ਲਾਭ Z (ਮੰਨ ਲਉ) ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$Z = 250x + 75y$ (ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੁਣ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$Z = 250x + 75y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ

$$5x + y \le 100$$
$$x + y \le 60$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਅਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ Z , ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ x ਅਤੇ y ਵਰਗੇ ਕੁਝ ਅਨੇਕ ਚਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z (ਜੋ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖੀ ਪਦ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤੀ ਸੰਬੰਧ ਰੇਖੀ ਹਨ ਜਦਕਿ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਜਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਪਦਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਪਰ ਹੋ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ) ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ : ਰੇਖੀ ਫਲਨ $Z = ax + by$, ਜਦਕਿ a, b ਅਚਲ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮਕੀਰਣ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਹੋਣਾ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $Z = 250x + 75y$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਚਲ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਨਿਰਣਾਤਮਕ ਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ : ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਚਲਾਂ ਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਬੰਦਸ਼, ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸ਼ਰਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਨੂੰ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਅਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਜੋ ਚਲਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y) ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰੇ, ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮ (optimal) ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਵਪਾਰੀ ਦੁਆਰਾ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਖਰੀਦ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

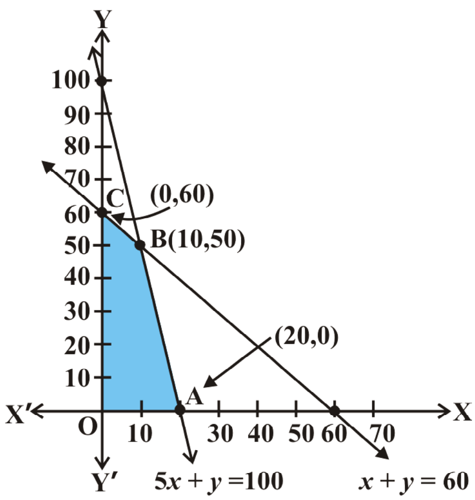
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

12.2.2 *ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ (Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)*

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੈਕਸ਼ਨ 12.2 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਹੁਣ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖੀਚੀਏ।

$$5x + y \leq 100 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \leq 60 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ) ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (4) ਤੱਕ, ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਰੇ ਅਰਧਤਲਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਮਿਤ ਹੈ ਇਸ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਵਿਕਲਪ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਖੇਤਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਸ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ



ਚਿੱਤਰ 12.1

ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (Feasible Ragion) ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ $x, y \geq 0$ ਅਧੀਨ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ (ਜਾਂ ਹੱਲ ਖੇਤਰ) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਖੇਤਰ OABC (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੋ ਖੇਤਰ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਸਮੂਹ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (10, 50) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (0, 60), (20, 0) ਆਦਿ ਵੀ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (25, 40) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹਨ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਦੋ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਦੇਵੇ, ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਜਿਹੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = 250x + 75y$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੁੱਢਲਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਅਧਾਰਭੂਤ) ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ।

ਥਿਊਰਮ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ* (ਉੱਤਮ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦੋਂ Z ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੋਵੇ ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਚਲ x ਅਤੇ y ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨੇ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ R ਪ੍ਰਬਿੰਧਤ ਖੇਤਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z, R ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ R ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (corner) (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ R ਗੈਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ R ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਥਿਊਰਮ 1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (ਉਪਯੁਕਤ) ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ O, A, B ਅਤੇ C ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਜਿਵੇਂ (0, 0), (20, 0), (10, 50) ਅਤੇ (0, 60) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ	Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ
O (0,0)	0
A (0,60)	4500
B (10,50)	**6250** ← ਅਧਿਕਤਮ
C (20,0)	5000

ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾ (10, 50) ਅਰਥਾਤ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਸੁਮੇਲ ਹੈ :

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਸਿਖਰ) ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਰੀਖਣ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = ax + by$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨਿਆ ਕਿ M ਅਤੇ m, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
3. (i) ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ (bounded) ਹੈ, M ਅਤੇ m, Z ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹਨ।

   (ii) ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਗੈਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
4. (a) M ਨੂੰ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by > M$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਰਧ ਤਲ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਨਾ ਪਵੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (b) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, m, ਨੂੰ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by < m$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੋਨਾਂ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$x + y \leq 50 \quad \ldots (1)$$

* ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

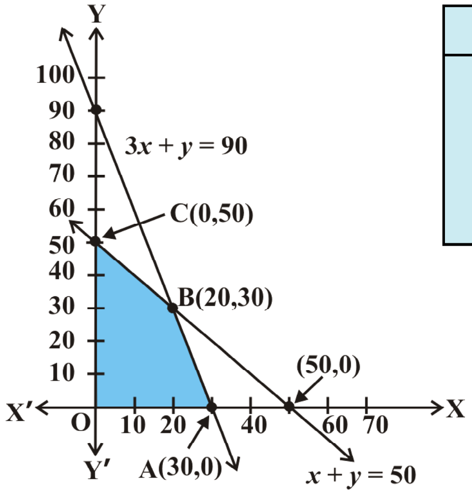
** ਇੱਕ ਕਾਟ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$3x + y \leq 90 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \text{... (3)}$$

$Z = 4x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।



ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	ਅਧਿਕਤਮ
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

ਚਿੱਤਰ 12.2

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ O, A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (30, 0), (20, 30) ਅਤੇ (0, 50) ਹਨ। ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : ਬਿੰਦੂ (30, 0) ਤੇ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 120 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਆਲੇਖ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

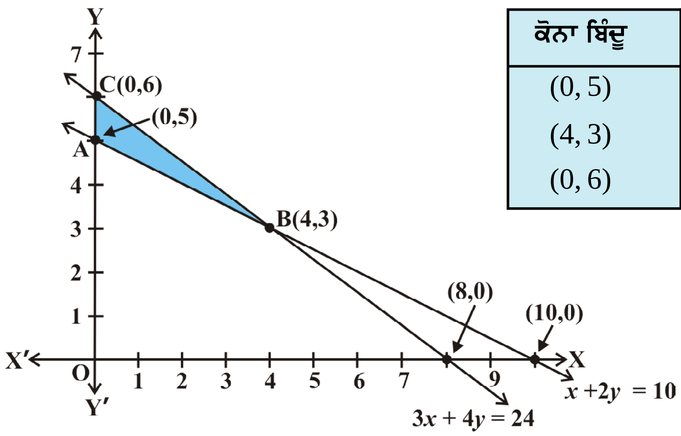
$$x + 2y \geq 10 \qquad \text{... (1)}$$

$$3x + 4y \leq 24 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \text{... (3)}$$

$Z = 200\,x + 500\,y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12. 3 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABC ਹੈ ਜੋ ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 5), (4, 3) ਅਤੇ (0, 6) ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ $Z = 200x + 500y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ	
(0, 5)	2500	
(4, 3)	**2300** ←	ਨਿਊਨਤਮ
(0, 6)	3000	

ਚਿੱਤਰ 12.3

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (4, 3) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ Rs 2300 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

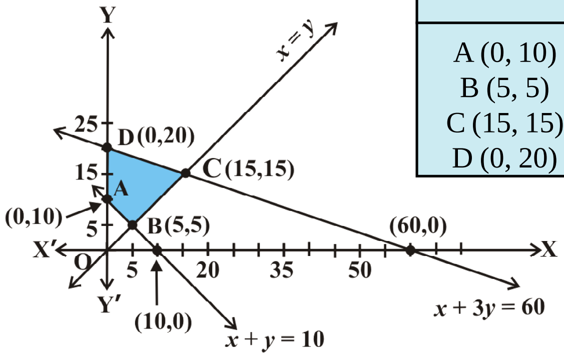
ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$x + 3y \leq 60 \quad \dots (1)$$
$$x + y \geq 10 \quad \dots (2)$$
$$x \leq y \quad \dots (3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \dots (4)$$

$Z = 3x + 9y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABCD ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਖੇਤਰ ਸੀਮਾਬੱਧ /ਘਿਰਿਆ

ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗ ਮੁੱਲ $Z = 3x + 9y$	
A (0, 10)	90	
B (5, 5)	**60** ←	ਨਿਊਨਤਮ
C (15, 15)	**180** } ←	ਅਧਿਕਤਮ
D (0, 20)	**180**	(ਬਹੁ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ)



ਚਿੱਤਰ 12.4

(bounded) ਹੈ। ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 10), (5, 5), (15,15) ਅਤੇ (0, 20) ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ Z ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਬਿੰਦੂ B (5, 5) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 60 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

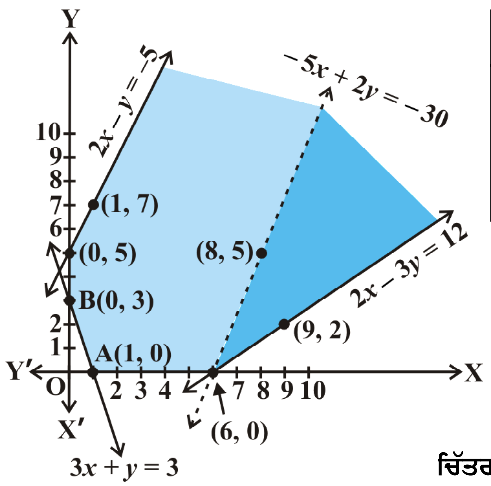
Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਹਰੇਕ C (15, 15) ਅਤੇ D (0, 20) ਤੇ 120 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਸਮੱਸਿਆ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ C ਅਤੇ D, ਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ ਦੋਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 180 ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ CD ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ C ਅਤੇ D ਵੀ ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = -50x + 20y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$2x - y \geq -5 \quad \dots (1)$$
$$3x + y \geq 3 \quad \dots (2)$$
$$2x - 3y \leq 12 \quad \dots (3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \dots (4)$$

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ



ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ← ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ

ਚਿੱਤਰ 12.5

ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ :

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ (6, 0) ਤੇ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਇਹ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ (ਥਿਊਰਮ 2 ਤੋਂ) ਹੁੰਦਾ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ –300, Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸਿੱਟਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

$$-50x + 20y < -300$$

ਅਰਥਾਤ

$$-5x + 2y < -30$$

ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ–300 ਹੋਵੇਗਾ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $Z = -50x + 20y$, ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $Z = -50x + 20y$, (0, 5) ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 100 ਰੱਖਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ, ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ $-50x + 20y > 100$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :

$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$

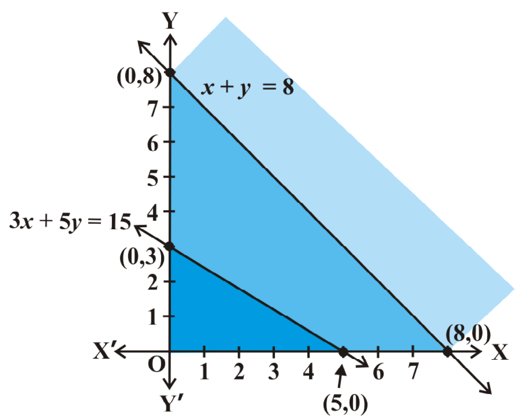
$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

ਹੱਲ : ਅਸਮਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (3) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 12.6)। ਕੀ ਕੋਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ? ਇਹ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ?

ਚਿੱਤਰ 12.6 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਵੇਚਨਾ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

(1) ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ (ਕੋਨੇ ਤੇ) ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਦੇਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 12.1

ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 4y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

2. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = -3x + 4y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \leq 8, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$

3. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 3y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$3x + 5y \leq 15, 5x + 2y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$

4. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 5y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$

5. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 15, x, y \geq 0$

6. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x, y \geq 0$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 10y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \geq 0$

8. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200; x, y \geq 0$

9. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = -x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$

10. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਈ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੋਵੇ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਚਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਦੂਜੇ ਵਿਸ਼ਵ ਯੁੱਧ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਯੁੱਧ ਸੰਚਾਲਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣੀ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦੁਸ਼ਮਣਾਂ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹਾਨੀ ਪਹੁੰਚੇ, ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਆਈ।

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਕਾਰ L.Kantoro Vich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ F.L.Hitch Cock ਨੇ 1941 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ। ਦੋਵਾਂ ਨੇ ਸਵਤੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਨੂੰ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਗਿਆ। ਸੰਨ 1945 ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ G.Stigler ਨੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਤਹਿਤ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ। ਸੰਨ 1947 ਵਿੱਚ G.B. Dantzig ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਪੁੰਨ ਵਿਧੀ ਜੋ SIMPLEX METHOOD ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੈ ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਦਿੱਤਾ ਜੋ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸੀਮਤ ਤਦਬੀਰਾਂ (Steps) ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮਰੱਥ ਵਿਧੀ ਹੈ।

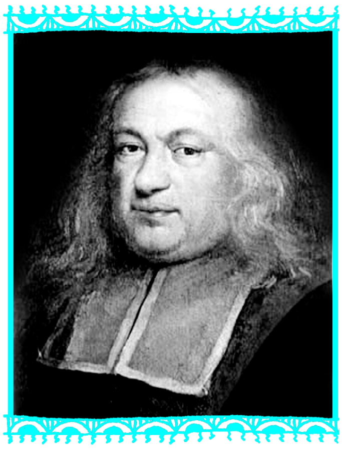
ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਰੰਭਿਕ ਕੰਮ ਕਰਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਸੰਨ 1975 ਵਿੱਚ L.Katorovich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਗਣਿਤ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ T.C.Koopmans ਨੂੰ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿੱਚ ਨੋਬਲ ਪੁਰਸਕਾਰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਅਤੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਦੇ ਨਾਲ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਜਟਿਲ ਸਮੱਸਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਮਾਡਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਹੁਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 13

ਸੰਭਾਵਨਾ Probability

❖ *The Theory of probabilities is simply the science of logic quantitatively treated – C.S. PEIRCE* ❖

13.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



Pierre de Fermat
(1601-1665)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਤਿਤਾ ਦੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ।ਅਸੀ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਏ.ਐਨ.ਕੌਲਮੋਗਰੋਵ (1903-1987) ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਸੀ।ਅਸੀ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਅਤੇ ਕਲਾਸੀਕਲ ਸਿਧਾਂਤਾ (classical theory) ਦੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵੀ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀ ਵਿਲੱਗ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (conditional probability) ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੋਵੇ, ਅਤੇ ਇਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' theorem), ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਅਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਸਮਝਾਂਗੇ।

13.2 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (Conditional Probability)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (sample space) ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ, ਕੀ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਆਉ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੇ (fair) ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਨਿਰਪੱਖ (fair) ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਿੱਕੇ ਨਿਰਪੱਖ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{8}$ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਆਉਣ" ਅਤੇ F ਘਟਨਾ "ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ" ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ:

ਤਾਂ $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

ਅਤੇ $F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \text{ (ਕਿਉਂ ?)}$$

ਅਤੇ $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $E \cap F = \{THH\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਘਟਨਾ E ਲਈ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਤੋਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਤੋਂ ਘਟਾ ਕੇ ਇਸਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ F ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਬਾਕੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਸਾਨੂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਾਲਾਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਨਵੇਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਨਾਲ ਹਨ।

ਹੁਣ F ਦਾ ਉਹ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ E ਦੀ ਅਨੁਕੂਲ ਹੈ, THH ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

F ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਜਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ P (E|F) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $P(E|F) = \frac{1}{4}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ F ਦੇ ਉਹ ਤੱਤ ਜਿਹੜੇ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਵੀ ਸੰਗਤ ਵਿੱਚ ਹਨ, E ਅਤੇ F ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ $E \cap F$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$P(E|F) = \frac{(E \cap F) \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{F \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

ਹੁਣ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P (E|F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \ldots (1)$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ (1) ਤਾਂ ਹੀ ਮੰਨਣ ਯੋਗ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(F) \neq 0$ ਭਾਵ $F \neq \phi$ (ਕਿਉਂ ?)
ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1: ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ, E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

13.2.1 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ *(Properties of conditional probability)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਅਤੇ F ਕਿਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ:

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 $P(S|F) = P(F|F) = 1$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $P(F) \neq 0$, ਤਾਂ,

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F) - P[(A \cap B)|F]$$

ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ,

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P[(A \cup B)|F)] = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

(ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਤੇ ਸੰਘ ਦੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ)

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F)$$

ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੇ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P[(A \cap B)|F)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ, $P(A \cup B) = P(A|F) + P(B|F)$

ਗੁਣ 3 $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

ਗੁਣ 1 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $P(S|F) = 1$

$$\Rightarrow \quad P[(E \cup E')|F)] = 1 \qquad \text{ਕਿਉਂਕਿ } S = E \cup E'$$

$\Rightarrow \quad P(E|F) + P(E'|F) = 1$ ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ E′ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ $$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$$

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, ਤਾਂ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਲੜਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ b ਲੜਕੇ ਨੂੰ ਅਤੇ g ਲੜਕੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{(b,b),\ (g,b),\ (b,g),\ (g,g)\}$$

ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ: ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ:

E : ਦੋਵੇਂ ਬੱਚੇ ਲੜਕੇ ਹਨ

F : ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਹੈ

ਤਾਂ $E = \{(b,b)\}$ ਅਤੇ $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

ਹੁਣ $E \cap F = \{(b,b)\}$

ਇਸ ਲਈ $P(F) = \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੱਸ ਕਾਰਡ 1ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖ ਕੇ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਬਕਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ ' ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਤਾਂ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਅਤੇ $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

ਹੁਣ $$P(A) = \frac{5}{10},\ P(B) = \frac{7}{10} \text{ ਅਤੇ } P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 1000 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 430 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 430 ਵਿੱਚੋਂ 10% ਲੜਕੀਆਂ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ P (E|F) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43 \text{ ਅਤੇ } P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043 \quad (\text{ਕਿਉਂ?})$$

ਤਾਂ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ:

A : ' ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ'

B : ' ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣਾ'

ਜੇਕਰ B ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 216 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਹੁਣ, $$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

$$A = \left\{\begin{matrix} (1,1,4) & (1,2,4) \ldots (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) \ldots (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) \ldots (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{matrix}\right\}$$

ਅਤੇ $$A \cap B = \{(6,5,4)\}$$

ਹੁਣ $$P(B) = \frac{6}{216} \text{ ਅਤੇ } P(A \cap B) = \frac{1}{216}$$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਸੰਖਿਆ 4 ਦੇ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਘਟਿਤ ' ਸੰਖਿਆ 4 ਦਾ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣਾ ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ' ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੋਣਾ ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

ਅਤੇ $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(E) = \frac{11}{36}$, $P(F) = \frac{5}{36}$

ਅਤੇ $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

ਹੁਣ $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

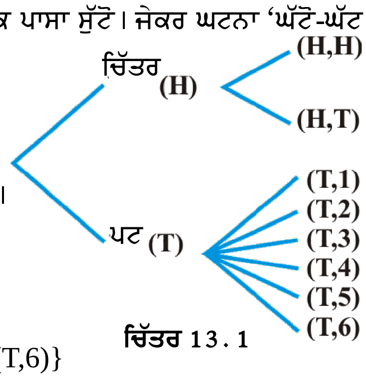
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਾ ਹੋਣ। ਸੰਭਾਵਨਾ $P(E \cap F)$ ਅਤੇ $P(F)$ ਦਾ ਪਰੀਕਲਨ ਉਸ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਇਸਨੂੰ ਸਮਝੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੇ ਜਾਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਪਰ ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੋ। ਜੇਕਰ ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆਂ ਦਾ ਆਉਣਾ' ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਚਿੱਤਰ 13.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਰੂਪ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

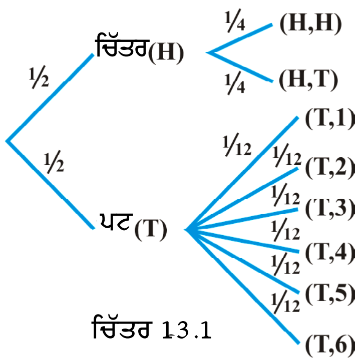


ਚਿੱਤਰ 13.1

ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$

ਜਿੱਥੇ (H,H) ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ, ਅਤੇ (T, i) ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਪਟ ਆਇਆ ਅਤੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਸੰਖਿਆਂ i ਆਈ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

ÇÂÃñÂÆ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ (H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3) (T,4), (T,5), (T,6) ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13.2 ਤੋਂ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ F ਘਟਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $$F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$E = \{(T,5), T,6)\} \text{ ਅਤੇ } E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$$

ਹੁਣ $$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

ਅਤੇ $$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ P (E) = 0.6, P (F) = 0.3 ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.2$, ਹੈ, ਤਾਂ P (E|F) ਅਤੇ P (F|E) ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. P(A|B) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ P(B) = 0.5 ਅਤੇ $P(A \cap B) = 0.32$ ਹੋਵੇ।
3. ਜੇਕਰ P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 ਅਤੇ P (B|A) = 0.4 ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$
4. $P(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ ਅਤੇ $P(A|B) = \frac{2}{5}$

5. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ ਅਤੇ $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਵਿੱਚ $P(E|F)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ:

(i) E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਚਿੱਤ, F : ਪਹਿਲੀ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ

(ii) E : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ, F : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿੱਤ

(iii) E : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ, F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ

7. ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ :

(i) E : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ F : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ

(ii) E : ਕੋਈ ਪਟ ਨਾ ਆਉਣਾ F ਕੋਈ ਚਿੱਤ ਨਾ ਆਉਣਾ

8. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ

F : ਪਹਿਲੀ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 6 ਅਤੇ 5 ਆਉਣਾ

9. ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਮਾਤਾ, ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਪੁੱਤਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਖੜੇ ਹਨ:

E : ਪੁੱਤਰ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ, F : ਪਿਤਾ ਵਿਚਕਾਰ ਖੜਾ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਕਾਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :

(a) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਆਇਆ ਹੈ।

(b) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾਵਾਂ $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$, ਅਤੇ $G = \{2,3,4,5\}$ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(E|F)$ ਅਤੇ $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ ਅਤੇ $P(G|E)$

(iii) $P(E \cup F|G)$ ਅਤੇ $P(E \cap F|G)$

12. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਨਮ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚੇ ਦਾ ਮੁੰਡਾ ਜਾਂ ਕੁੜੀ ਹੋਣਾ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ (*i*) ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ (*ii*) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।

13. ਇੱਕ ਅਧਿਆਪਕ ਦੇ ਕੋਲ 300 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 200 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 500 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਤੇ 400 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

14. ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਖ- ਵੱਖ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ç ÅÜö 4 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਸੁੱਟੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੋ। ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ਼ੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ ' ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

16. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ ਤਾਂ $P(A|B)$ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ (D) 1

17. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ ਤਾਂ

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$ (C) $A \cap B = \phi$

(D) $P(A) = P(B)$

13.3 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ (Multiplication Theorem on Probability)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਅਤੇ F ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੂਹ $E \cap F$ ਦੋਵੇਂ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $E \cap F$ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ $E \cap F$ ਨੂੰ EF ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਸੰਯੁਕਤ ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਾਣੀ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਇਛੁਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ $P(E|F)$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(F) \, . \, P(E|F) \qquad \ldots (1)$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

ਜਾਂ $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F = F \cup E$)

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E)$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(F).\ P(E|F)$ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਦੂਜੀ ਦੇ ਕੱਢਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਮੁੜ ਨਹੀਂ ਰੱਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ ਕਿ E 'ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ F 'ਦੂਜੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ $P(E \cap F)$ ਜਾਂ P (EF) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(E) = P =$ (ਪਹਿਲੀ ਕੱਢੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ) $\frac{10}{15}$

ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੁਣ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 9 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੈ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕੇਵਲ F ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ E ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਪਤਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(E)\ .\ P(F|E),\ P(G|EF)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ: ਜੇਕਰ E, F ਅਤੇ G ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|E \cap F) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|EF)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਚਾਰ ਜਾਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪੱਤੇ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ K ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਨੂੰ ਅਤੇ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੈ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ P (KKA) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ:

ਹੁਣ $$P(K) = \frac{4}{52}$$

ਨਾਲ ਹੀ P(K|K) ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ ਕਿ 'ਪਹਿਲਾ ਕੱਢਿਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਪਰ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ $(52 - 1) = 51$ ਪੱਤੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

ਇਸ ਲਈ P(A|KK) ਤੀਜੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਕੇ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਕੱਢੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ 50 ਪੱਤੇ ਹੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(A|KK) = P(A|KK) = \frac{4}{50}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ:

$$P(KKA) = P(K)\ P(K|K)\ P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ (Independent Events)

52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ: ਘਟਨਾਵਾਂ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

ਅਤੇ

$$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ ਤਥਾ } P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ਨਾਲ ਹੀ 'E ਅਤੇ F 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $$P(E \cap F) = \frac{1}{52}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

ਕਿਉਂਕਿ $P(E) = \frac{1}{4} = P(E|F)$, ਹੈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ $\quad P(F|E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{13} = P(F)$

ਦੁਬਾਰਾ $P(F) = \dfrac{1}{13} = P(F|E)$ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ F ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2: ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(F|E) = P(F) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(E) \neq 0$$

$$P(E|F) = P(E) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) \qquad \ldots (1)$$

ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F) \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਲਈ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3: ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(E \cap F) = P(E)\ \ P(F)$$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਆਸ਼ਰਿਤ (dependent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਾ ਹੋਣ ਭਾਵ ਜੇਕਰ $P(E \cap F) \neq P(E) \,.\, P(F)$ ਹੈ।
2. ਕਦੇ-ਕਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਭਰਮ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਸਦਾ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜੇ ਸਦਾ ਲਈ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ 'ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਅਤੇ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਇਹੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹਨ। ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੀਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

3. ਦੋ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਜਾਦ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਜੋੜਾ E ਅਤੇ F ਲਈ, ਜਿੱਥੇ E ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਅਤੇ F ਦੂਜੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪੂਰੇ ਕੀਤੇ ਜਾਣ, ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਅਤੇ P(F) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $P(E\cap F) = P(E), P(F)$

4. ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$P(A\cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$P(A\cap C) = P(A)\ P(C)$$
$$P(B\cap C) = P(B)\ P(C)$$

ਅਤੇ
$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\ P(B)\ \ P(C)$$

ਜੇਕਰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵੀ ਸ਼ਰਤ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ', ਨੂੰ E ਤੋਂ ਅਤੇ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ', ਨੂੰ F ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕੀ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ਹੁਣ $E = \{3, 6\}, F = \{2, 4, 6\}$ ਅਤੇ $E \cap F = \{6\}$

ਤਾਂ $P(E) = \frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ P(F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(E\cap F)=\frac{1}{6}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $P(E \cap F) = P(E) . P(F)$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ (unbiased) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਵੋ A ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ 36 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2} \text{ ਅਤੇ } P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A \cap B) = P$ (ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤਾ ਹੋਣਾ)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ $$P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ ' ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ' ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ G ਘਟਨਾ ' ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੋੜੇ (E,F), (E,G) ਅਤੇ (F,G) ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ? ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਨਿਰਭਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, $$E = \{HHH, TTT\}, \quad F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

ਅਤੇ $$G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$E \cap F = \{HHH\}, \quad E \cap G = \{TTT\}, \quad F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \; P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \; P(G) = \frac{7}{8}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8}, \; P(E \cap G) = \frac{1}{8}, \; P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(E) \,.\, P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \; P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$$ ਅਤੇ $$P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

$$P(E \cap G) \neq P(E) \,.\, P(G)$$

ਅਤੇ $$P(F \cap G) \neq P(F) \,.\, P(G)$$

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ (E ਅਤੇ F) ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ (F ਅਤੇ G) ਅਤੇ (E ਅਤੇ G) ਆਸ਼ਰਿਤ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਦੋ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$ ... (1)

ਚਿੱਤਰ 13.3 ਦੇ ਵੈੱਨ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$$

ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

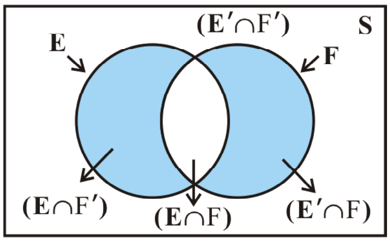
ਜਾਂ $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) . P(F)$ (1) ਤੋਂ

$= P(E) [1 - P(F]$

$= P(E) . P(F')$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ,



ਚਿੱਤਰ 13. 3

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ

(a) E′ ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

(b) E′ ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

ਉਦਾਹਰਣ 14: ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ, A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= 1- P(A')\ P(B')$

ਹੱਲ: P(A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦਾ ਹੋਣਾ) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)\ P(B)$$
$$= P(A) + P(B)\ [1-P(A)]$$
$$= P(A) + P(B) . P(A')$$
$$= 1- P(A') + P(B)\ P(A')$$
$$= 1- P(A')\ [1- P(B)]$$
$$= 1- P(A')\ P\ (B')$$

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(A \cap B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਦੋਵੇਂ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕੋਂ ਬਕਸੇ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਤਿੰਨ ਸੰਤਰੇ ਕੱਢ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਸੰਤਰੇ ਚੰਗੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਕਸੇ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਬਕਸੇ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15 ਸੰਤਰੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਚੰਗੇ ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਸੰਤਰੇ ਹਨ, ਕੀ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ 'ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

5. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ 1, 2, 3 ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਅਤੇ 4, 5, 6 ਹਰੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ 'ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਸੰਖਿਆ ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੀ ਹੋਈ ਹੈ', ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

6. ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ ਤਾਂ ਕੀ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

7. A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $P(B) = p$ ਹੈ। p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ (i) ਘਟਨਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (ii) ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ।

8. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $P(A) = 0.3$ ਅਤੇ $P(B) = 0.4$. ਹੈ, ਤਾਂ

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ਤਾਂ P(A-ਨਹੀਂ ਅਤੇ B-ਨਹੀਂ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{7}{12}$ ਅਤੇ P(A-ਨਹੀਂ ਅਤੇ B-ਨਹੀਂ) $= \frac{1}{4}$ ਹੈ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੈ ?

11. A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $P(A) = 0.3$, ਅਤੇ $P(B) = 0.6$ ਤਾਂ

(i) P(A ਅਤੇ B) (ii) P(A ਅਤੇ B-ਨਹੀਂ)

(iii) P(A ਜਾਂ B) (iv) P(A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ) ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦੋ ਗੇਂਦਾ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 8 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ (i) ਦੋਵੇਂ ਗੇਂਦਾ ਲਾਲ ਹਨ।, (ii) ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ (iii) ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ।

14. ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ, ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ:

(i) ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਉਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਹੱਲ ਕਰੇਗਾ।

15. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ ?

(i) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ।

(ii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ।

(iii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਜਾਂ ਬੇਗਮ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬੇਗਮ ਜਾਂ ਗੁਲਾਮ ਹੈ।

16. ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 60% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਿੰਦੀ ਦਾ, 40% ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਤੇ 20% ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(a) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਨਾ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(c) ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ, ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਜੇਕਰ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੈ ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ

(A) A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (B) $P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' Theorem)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 2 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 3 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ

4 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲਾ I) ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਖਾਸ ਰੰਗ (ਮੰਨ ਲਉ ਸਫ਼ੇਦ) ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਹੜੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਪਰ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲੇ-II) ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਪਤਾ ਹੈ ? ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਥੈਲੇ II ਦੇ ਚੁਨਣ ਦੀ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਘਟਨਾ ਦਾ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਗਣਿਤਗ ਜਾਨ ਬੇਯਜ਼ ਨੇ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹਲ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸੂਤਰ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਦੇ ਬਾਅਦ 1763 ਈ. ਵਿੱਚ ਪਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ ਸੀ। ਬੇਯਜ਼ ਦੇ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

13.5.1 ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ *(Partition of a sample space)*

ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2 \ldots E_n$ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ:

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ ਅਤੇ

(c) $P(E_i) > 0$, ਹਰੇਕ $i = 1, 2, \ldots, n$ ਲਈ ਹੋਵੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, \ldots E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਗੈਰ ਸੰਯੁਕਤ ਹਨ, ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਘਟਨਾ E ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ E′ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ $E \cap E' = \phi$ ਅਤੇ $E \cup E' = S$.

ਵੈੱਨ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ 13.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\{E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ E ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ।

ਸਮੂਹ $\{E' \cap F, E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ $E \cup F$ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

13.5.2 ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ *(Theorem of Total Probability)*

ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ,

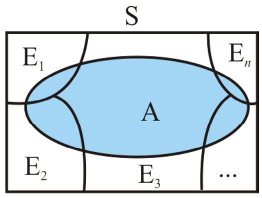
$$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + \ldots + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

ਉਤਪੱਤੀ: ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ13.4) ਇਸ ਲਈ,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ... (1)$$

ਅਤੇ $$E_i \cap E_j = \phi \ \forall \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., n$$



ਚਿੱਤਰ 13. 4

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A, ਲਈ

$$A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 ... E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

ਨਾਲ ਹੀ $A \cap E_i$, ਅਤੇ $A \cap E_j$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੂਹਾਂ E_i ਅਤੇ E_j ਦੇ ਉਪਸਮੂਹ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $i \neq j$ ਹੈ, ਲਈ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $i \neq j, \ i, j = 1, 2 ..., n$ ਲਈ $A \cap E_i$ ਅਤੇ $A \cap E_j$ ਵੀ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .....\cup (A \cap E_n)]$$
$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

ਹੁਣ $$P(A \cap E_i) = P(E_i) \ P(A|E_i) \text{ ਕਿਉਂਕਿ } P(E_i) \neq 0 \forall i = 1,2,..., n$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ $$P(A) = P(E_1) \ P(A|E_1) + P(E_2) \ P(A|E_2) + ... + P(E_n) \ P(A|E_n)$$

ਜਾਂ $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

ਉਦਾਹਰਣ 15: ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਠੇਕਾ ਲਿਆ ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.65 ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਅਤੇ ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦੇ ਸਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0.80 ਅਤੇ 0.32 ਹਨ। ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 'ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣਾ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ A ਅਤੇ 'ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ B ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ P(A) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(B) = 0.65, \ P(\text{ਹੜਤਾਲ ਨਹੀਂ}) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$
$$P(A \mid B) = 0.32, \ P(A \mid B') = 0.80$$

ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ B ਅਤੇ B′ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$= P(B) \ . \ P(A \mid B) + P(B') \ P(A \mid B')$$
$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

ਇਸ ਲਈ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.488 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਕਥਨ ਲਿਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਬੇਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' Theorem) ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਵਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਭਾਵ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਜੋੜਿਆ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup ,..., \cup E_n = S$ ਹੈ ਅਤੇ A ਕੋਈ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

ਉਤਪੱਤੀ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)} \qquad \text{(ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)} \qquad \text{(ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਰਤੀ ਜਾਦੀ ਹੈ: ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ... E_n$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ (hypotheses) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$P(E_i)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ E_i ਦੀ ਪੂਰਵਕਾਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (a priori) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ $P(E_i A)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ E_i ਦੀ ਉੱਤਰਕਾਲ ਦੀ (a posteriori) ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਕਾਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ E_i ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ E_i ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਦੀ ਹੈ (ਭਾਵ E_i ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਨਾ ਘਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਘਟਿਤ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ) ਇਸ ਲਈ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ E_i (ਭਾਵ ਇੱਕ ਕਾਰਣ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ A ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਯੋਗ ਹੈ। ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਨੂੰ ਹੇਠ-ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16: ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ E_1 ਦੀ ਚੋਣ ਥੈਲੇ I ਨੂੰ, ਘਟਨਾ E_2 ਦੀ ਚੋਣ ਥੈਲੇ II ਤੋਂ ਅਤੇ A ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਤਾਂ $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(A|E_1) = P(\text{ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{3}{7}$$

ਅਤੇ $$P(A|E_2) = P(\text{ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{5}{11}$$

ਹੁਣ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ = $P(E_2|A)$,

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ :$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A\,|\,E_2)}{P(E_1)P\,(A\,|\,E_1)+P(E_2)P(A\,|\,E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17: ਤਿੰਨ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਸੋਨੇ ਦੇ ਹਨ, ਬਕਸੇ II ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਕਸੇ III ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੋਨੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਾਂਦੀ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਨਸਾਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ E_1, E_2 ਅਤੇ E_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦੇ ਚੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ।

ਤਾਂ $$P(A|E_1) = P(\text{ਬਕਸੇ I ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A|E_2) = P(\text{ਬਕਸੇ II ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = 0$$

$$P(A|E_3) = P(\text{ਬਕਸੇ III ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{1}{2}$$

ਹੁਣ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= ਕੱਢਿਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦੇ ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= $P(E_1|A)$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)PA|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਯੋਗਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 90% ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਵਿੱਚ ਅਤੇ 10% ਪਤਾ ਨਾ ਲੱਗਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ। ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ, ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 99% ਸਹੀ ਪਤਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਨੈਗੀਟਿਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 1% ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ 0.1% ਵਿਅਕਤੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਰੋਗ ਵਿਗਿਆਨੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਸੀਂ $P(E|A)$ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ E' ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $\{E, E'\}$ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E)$ = P (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ.ਆਈ. ਵੀ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ) = 90% = $\frac{9}{10} = 0.9$

ਅਤੇ $P(A|E') = P$ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਹੀਂ ਹੈ) $= 1\% = 0.01$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001\times 0.9}{0.001\times 0.9+0.999\times 0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ, 0.083 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19: ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬਣਉਣ ਦੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨਾਂ A, B ਅਤੇ C ਕੁਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 25%, 35% ਅਤੇ 40% ਬੋਲਟ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5, 4, ਅਤੇ 2 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਭਾਗ ਖਰਾਬ ਹੈ। ਬੋਲਟਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਰਾਬ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ B_1, B_2, B_3 ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

B_1 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

B_2 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

B_3 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ C ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ B_1, B_2, B_3 ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਪਰਿਪੂਰਣ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ: E ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੈ।

ਘਟਨਾ E, ਘਟਨਾਵਾਂ B_1 ਜਾਂ B_2 ਜਾਂ B_3 ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ:

$$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ P(B_2) = 0.35 \text{ ਅਤੇ } P(B_3) = 0.40$$

ਦੁਬਾਰਾ $P(E|B_1)$ =ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

$$= 5\% = 0.05$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(E|B_2) = 0.04,\ P(E|B_3) = 0.02$

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E+|B_3)}$$

$$= \frac{0.35\times 0.04}{0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02} = \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

ਉਦਾਹਰਣ 20: ਇੱਕ ਡਾਕਟਰ ਨੇ ਇੱਕ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਆਉਣਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਤਜ਼ਰਬਿਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੋਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ ਅਤੇ $\frac{2}{5}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਤੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, ਅਤੇ $\frac{1}{12}$ ਹਨ, ਪਰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੇ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਇਆ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਤੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 'ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਰੋਗੀ ਕੋਲ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ" ਦੀ ਘਟਨਾ E ਹੈ। ਜੇਕਰ ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ, ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ T_1, T_2, T_3, ਅਤੇ T_4 ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10} \text{ ਅਤੇ } P(T_4) = \frac{2}{5} \qquad \text{(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

$$P(E|T_1) = \text{ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{4}$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E|T_4) = 0$, ਕਿਉਂਕਿ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(T_1|E)$ = ਡਾਕਟਰ ਰਾਹੀਂ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਤੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1) + P(T_2)P(E|T_2) + P(T_3)P(E|T_3) + P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਵਾਰੀ ਸੱਚ ਬੋਲਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E, 'ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਕਿ ਉਸ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ S_1, ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਅਤੇ S_2 ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਨਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।

$$P(S_1) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{6}$$

$$P(S_2) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{5}{6}$$

$P(E|S_1)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{3}{4}$$

$P(E|S_2)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਨਹੀਂ ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਨਾਂ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(S_1|E)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ

$$= \frac{P(S_1)\,P(E|S_1)}{P(S_1)\,P(E|S_1) + P(S_2)\,P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{8}$ ਹੈ।

ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਉਹ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ : $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ਜੇਕਰ X ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1,\ X(TH) = 1,\ X(TT) = 0$$

ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ Y, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦੇ ਲਈ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਣਿਤੀ ਵਿਚੋਂ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਘਟਾਓ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2$$

ਇਸ ਲਈ X ੱਤੇ Y, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ ਦੋ ਭਿੰਨ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੰਗ ਨੋਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੁਬਾਰਾ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਰੰਗ ਦੀਆਂ 2 ਹੋਰ ਗੇਂਦਾਂ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਲਸ਼ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

2. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਥੈਲਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਪਹਿਲੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਹੈ ?

3. ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 60% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 40% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30% ਅਤੇ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 20% ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ A-ਗਰੇਡ ਲਿਆ। ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕਾਲਜ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਕਿ ਉਸਨੂੰ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲਾ ਹੈ ?

4. ਇੱਕ ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਸਦੇ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਤੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ?

5. ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੋਗ ਦੇ ਸਹੀ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਲਈ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ 99% ਅਸਰਦਾਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਰੋਗੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਹੈ। ਪਰ 0.5% ਵਾਰੀ ਕਿਸੇ ਠੀਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਗਲਤ ਰਿਪੋਰਟ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ 0.1% ਲੋਗ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਹਨ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਅਕਤੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਰੋਗ ਹੈ ?

6. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇੱਕੋ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਚਿੱਤ ਹੈ। ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਪੱਖਪਾਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ 75% ਵਾਰੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਸਿੱਕਾ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ। ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤ ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ ?

7. ਇੱਕ ਬੀਮਾ ਕੰਪਨੀ 2000 ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕਾਂ, 4000 ਕਾਰ ਚਾਲਕਾਂ ਅਤੇ 6000 ਟਰੱਕ ਦਾ ਬੀਮਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0.01, 0.03 ਅਤੇ 0.15 ਹੈ। ਬੀਮਾ ਕਰਵਾਉਣ ਵਾਲੇ ਚਾਲਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੁਰਘਟਨਾ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

8. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਵਿਵਰਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ 60% ਮਸ਼ੀਨ A ਅਤੇ 40% ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਪੈਦਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮਸ਼ੀਨ A ਦਾ 2% ਅਤੇ ਮਸ਼ੀਨ B ਦਾ1% ਪੈਦਾਵਾਰ ਖਰਾਬ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਢੇਰ ਬਣਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਢੇਰ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਖਰਾਬ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

9. ਦੋ ਟੋਲੀਆਂ ਇੱਕ ਨਿਗਮ ਦੇ ਨਿਦੇਸ਼ਕ ਮੰਡਲ ਵਿੱਚ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0.6 ਅਤੇ 0.4 ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.7 ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.3 ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਦੂਜੇ ਦਲ ਰਾਹੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੋਈ ਕੁੜੀ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 5 ਜਾਂ 6 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 1, 2, 3 ਜਾਂ 4 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਆਉਣਾ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸਤੇ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਪੱਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਉਛਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1, 2, 3 ਜਾਂ 4 ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

11. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਦੇ ਕੋਲ A, B ਅਤੇ C ਮਸ਼ੀਨ ਆਪਰੇਟਰ ਹਨ। ਪਹਿਲਾ ਆਪਰੇਟਰ A 1% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਪਰੇਟਰ B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5% ਅਤੇ 7% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਾਰਜ 'ਤੇ A ਕੁੱਲ 50% ਸਮਾਂ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ, B ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 30% ਅਤੇ C ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 20% ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ A ਰਾਹੀਂ ਬਨਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

12. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਤਾ ਗਵਾਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹਨ। ਗਵਾਚੇ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

13. A ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{4}{5}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $A \subset B$ ਹੈ ਅਤੇ $P(B) \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਠੀਕ ਹੈ:

(A) $P(A|B) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਚਾਰ ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰੰਗੀਨ ਗੇਂਦਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਡੱਬਾ	ਰੰਗ			
	ਕਾਲਾ	ਸਫ਼ੇਦ	ਲਾਲ	ਨੀਲਾ
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

ਇੱਕ ਡਿੱਬੇ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਡੱਬੇ III ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A, E_1, E_2, E_3 ਅਤੇ E_4 ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

A : ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ E_1 : ਡੱਬੇ-I ਦੀ ਚੋਣ

E_2 : ਡੱਬੇ-II ਦੀ ਚੋਣ E_3 : ਡੱਬੇ-III ਦੀ ਚੋਣ

E_4 : ਡੱਬੇ-IV ਦੀ ਚੋਣ

ਕਿਉਂਕਿ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ:

ਇਸ ਲਈ $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \dfrac{1}{4}$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A|E_1) = \dfrac{3}{18}$, $P(A|E_2) = \dfrac{2}{8}$, $P(A|E_3) = \dfrac{1}{7}$ ਅਤੇ $P(A|E_4) = \dfrac{4}{13}$

P(ਡੱਬੇ- III ਦੀ ਚੋਣ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ)

$= P(E_3|A)$ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3).P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. A ਅਤੇ B ਵਾਰੀ ਸਿਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਛੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਖੇਡ ਜਿੱਤ ਨਹੀਂ ਲੈਂਦਾ। ਜੇਕਰ A ਤੋਂ ਖੇਡ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ: ਮੰਨ ਲਉ S ਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਅਤੇ F ਅਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਨਾ ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(S)=\frac{1}{6},\ P(F)=\frac{5}{6}$

$P(\text{A ਦੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ}) = P(S) = \frac{1}{6}$

A ਨੂੰ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਦਾ ਮੌਕਾ ਤਾਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ A ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਤੇ B ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਸਫਲਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$P(\text{A ਦਾ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ}) = P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(\text{A ਦਾ ਪੰਜਵੀਂ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ}) = P\ (FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$

ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਰ, ਇਸ ਲਈ $P(\text{A ਦਾ ਜਿੱਤਣਾ}) = \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{B ਜਿੱਤਣਾ}) = 1 - P(\text{A ਜਿੱਤਣਾ}) = 1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ $(a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...,$ ਜਿੱਥੇ $r|< 1,)$ ਤਾਂ ਇਸ ਅਨੰਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{a}{1-r}\cdot$ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ A.1.3)

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ 90% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਤਾਂ ਇਹ ਮਾਤਰ 40% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਤਜਰਬਾ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ 80% ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਠੀਕ ਸਥਾਪਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ 2 ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦੋ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤੂਆਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ B_1 ਸਹੀ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B_2 ਗਲਤ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad P(B_1) = 0.8, P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ ਅਤੇ $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

ਇਸ ਲਈ
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8\times 0.9\times 0.9}{0.8\times 0.9\times 0.9 + 0.2\times 0.4\times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. A ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਹੈ $P(B|A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) A, ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ $\qquad$ (ii) $A \cap B = \phi$

2. ਇੱਕ ਸ਼ਾਦੀਸ਼ੁਦਾ ਜੋੜੇ ਦੇ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ :

(i) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਮੁੰਡਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੁੰਡਾ ਹੈ।

(ii) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।

3. ਸੋਚੋ ਕਿ 5% ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ 0.25% ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਵਾਲ ਧੌਲੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਧੌਲੇ ਵਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਮਰਦ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਮੰਨੋ ਕਿ ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 90% ਵਿਅਕਤੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ 10 ਇਨਸਾਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਗਏ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 6 ਇਨਸਾਨ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹੋਣਗੇ ?

5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੀਪ ਸਾਲ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ 53 ਮੰਗਲਵਾਰ ਹੋਣਗੇ ?

6. ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਕੋਲ A, B, C ਅਤੇ D ਬਕਸੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੀ ਲਾਲ, ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ ਕਾਲੀਆਂ ਟੁਕੜੀਆਂ ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਟੁਕੜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੁਕੜਾ ਲਾਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਬਾਕਸ A; ਬਾਕਸ B, ਬਾਕਸ C ਤੋਂ ਕੱਢੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਬਾਕਸ	ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦਾ ਰੰਗ		
	ਲਾਲ	ਸਫ਼ੇਦ	ਕਾਲਾ
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ 40% ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦੇ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 30% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਵਾਈ ਰਾਹੀਂ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 25% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਰੋਗੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਰੋਗੀਆਂ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਰੋਗੀ ਦਿਲ ਦੇ ਦੌਰੇ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰੋਗੀ ਰਾਹੀਂ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਜੇਕਰ 2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਇੱਕ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? (ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।)

9. ਇੱਕ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਅਸੈਂਬਲੀ ਦੇ ਦੋ ਸਹਾਇਕ ਬਟਨ A ਅਤੇ B ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਹਨ :

P(A ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.2

P (ਸਿਰਫ਼ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.15

P(A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.15

ਤਾਂ, ਹੇਠਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) P (A ਅਸਫਲ/ B ਅਸਫਲ ਹੋ ਚੁੱਕਾ ਹੋਵੇ)

(ii) P (ਕੇਵਲ A ਅਸਫਲ)

10. ਥੈਲੇ 1 ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 1 ਤੋਂ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚ ਭੇਜੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ। ਭੇਜੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਸੀ ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ:

11. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਅਤੇ $P(B/A) = 1$, ਤਾਂ

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

12. ਜੇਕਰ $P(A/B) > P(A)$, ਹੈ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਹੀ ਹੈ :

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

13. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ :

$P(A) + P(B) - P(A$ ਅਤੇ $B) = P(A)$, ਤਾਂ

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ:

- ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ : $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$
- $0 \leq P(E|F) \leq 1$, $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

  $P(E \cup F|G) = P(E|G) + P(F|G) - P(E \cap F|G)$
- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E)$, $P(E) \neq 0$

  ਜਾਂ $P(E \cap F) = P(F)\ (E|F)$, $P(F) \neq 0$
- ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ

  $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

  ਅਤੇ $P(E|F) = P(E)$, $P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F)$, $P(E) \neq 0$

- **ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ :**
  ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, ...E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ $E_1, E_2, ...E_n$, ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ
  $P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + ... + P(E_n)\,P(A|E_n)$
- **ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ:** ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ...E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਜੋੜਵਾਰ ਨਾ ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ਅਤੇ A ਇੱਕ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ (ਮੌਕਾ) ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸੰਦਰਭ ਦਾਤੇ ਤੇ ਦੈਵੀ ਸੁਖਾਂਤ ਨਾਟਕ ਤੇ ਇੱਕ ਵਿਆਖਿਆ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਜੇਰਨੀਮੋਂਕਾਰਡਨ (1501–1576) ਨੇ ਜੂਏ ਦੇ ਖੇਡ ਤੇ ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਨਿਬੰਧ ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ 'ਲਿਬਰ ਡੇ ਲੂਡੋ ਅਲਕਾਏ' ਲਿਖਿਆ ਸੀ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1663 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਇਸ ਨਿਬੰਧ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ (1564–1642) ਨੇ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੈਰਾਨੀ ਵਾਲੀ ਟਿੱਪਣੀ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 10 ਹੋਣਾ ਜੋੜ 9 ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜ ਨੂੰ 10 ਹੋਣ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋੜ 9 ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਇਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਯੋਗਦਾਨ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਵਿਤ ਲੇਖ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਦੋ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤਗਾਂ ਪਾਸਕਲ (1623–1662) ਅਤੇ ਪਿਅਰੇ ਦ ਫ਼ਰਮਾਂ (1601–1665) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ-ਵਿਹਾਰ ਤੋਂ ਹੋਇਆ। ਇੱਕ ਫ਼ਰਾਂਸੀਸੀ ਜੁਆਰੀ ਸ਼ੇਵੇਲਿਅਰ ਡੇ ਮੇਰੇ ਨੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਤਰਕ ਅਤੇ ਜੂਏ ਵਿੱਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰੇਖਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਵਿਰੋਧ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਪਾਸਕਲ ਤੋਂ ਪੁੱਛਿਆ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ 1654 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਦੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਨੀਂਹ ਰੱਖੀ ਗਈ। ਪਾਸਕਲ ਨੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਫ਼ਰਮਾਂ ਨੇ ਸੰਚਯ ਦੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ।

ਮਹਾਨ ਹਾਲੈਂਡ ਨਿਵਾਸੀ ਵਿਗਿਆਨੀ ਹਿਯਜੇਨ (1629–1695) ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ 'ਡੇ ਰੇਸ਼ਿਯੋਸਿਨਿਸ ਇਨ ਲੂਡੋ ਅਲਾਇ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ

ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਰੋਚਕ ਪਰ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਸਿਆਂਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਿੱਤੇ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਅੱਗੇ ਮਹਾਨ ਕਾਰਜ ਜੈਕਬ ਬਰਨੌਲੀ (1654-1705) ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰਸ ਕੰਜੇਕਟੇਂਡੀ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਭਤੀਜੇ ਨਿਕਾਲਸ ਬਰਨੌਲੀ ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ 'ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਵੰਡ' ਦੀ ਖੋਜ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਵੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਅੱਗੇ ਖਾਸ ਕਾਰਜ 'ਅਬਰਾਹਮ ਡੇ ਮੋਵਿਅਰ' (1667 - 1754) ਦੀ ਪੁਸਤਕ 'ਦੀ ਡਾਕਟ੍ਰਿਨ ਆਫ ਚਾਂਸ' ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 1718 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਥਾਮਸ ਬੇਜ਼ (1702-1761) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਾਂ ਤੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪ੍ਰਮੇਯ 'ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ' ਨੂੰ ਵਿਉਤਪੱਤੀ ਕਰਨ ਲਈ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ। ਮਸ਼ਹੂਰ ਖਗੋਲਸ਼ਾਸਤਰੀ 'ਪਿਅਰੇ ਸਾਈਮਨ ਡੇ ਲਾਪਲਾਸ' (1749-1827) ਨੇ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕੀਤਾ ਅਤੇ 1812 ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਿਊਰੀ ਐਨਾਲਿਟਿਕ ਡੇਸ ਪ੍ਰਾਬੇਬਿਨਿਟੀਜ਼' ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਗਾਂ ਸ਼ੇਬੀਸ਼ੇਵ (1821-1894), ਮਾਰਕੋਵ (1856-1922), ਏ. ਲਿਆਪੋਨੋ (1821-1918), ਅਤੇ ਏ. ਐਨ. ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ (1903-1987) ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਸਾਰਥਕ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਮੂਹ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਜਿਸਨੂੰ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ' ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸ੍ਰੇਸ਼ਟ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$
7. $\frac{x^3}{3}-x+C$
8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$
9. $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$
10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$
11. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$
13. $\frac{x^3}{3}+x+C$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$
16. $x^2-3\sin x+e^x+C$
17. $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
18. $\tan x+\sec x+C$
19. $\tan x-x+C$
20. $2\tan x-3\sec x+C$
21. C
22. A

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. $\log(1+x^2)+C$
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$
3. $\log|1+\log x|+C$
4. $\cos(\cos x)+C$
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$
8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$
9. $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$
10. $2\log|\sqrt{x}-1|+C$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$

13. $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$

15. $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$

16. $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$

18. $e^{\tan^{-1}x}+C$

19. $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$

21. $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$

23. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$

25. $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$

27. $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

28. $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$

30. $-\log|1+\cos x|+C$

31. $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$

33. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$

35. $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$

36. $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$

38. D

39. B

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$ **5.** $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$ **8.** $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$ **10.** $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$ **12.** $x-\sin x+C$

13. $2(\sin x+x\cos\alpha)+C$ **14.** $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$ **16.** $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x-\operatorname{cosec} x+C$ **18.** $\tan x+C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$ **20.** $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$ **22.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A **24.** B

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. $\tan^{-1}x^3+C$ **2.** $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$ **4.** $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+C$

5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$ **6.** $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+C$

12. $\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C$

13. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

15. $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\frac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

19. $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B

25. B

ਅਭਿਆਸ 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

17. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

ਅਭਿਆਸ 7.6

1. $-x\cos x+\sin x+C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4} + C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin^{-1}x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

9. $(2x^2 - 1)\frac{\cos^{-1}x}{4} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$

10. $\left(\sin^{-1}x\right)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + C$

11. $-\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x + x\right] + C$

12. $x\tan x + \log|\cos x| + C$

13. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C$

15. $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \frac{x^3}{9} - x + C$

16. $e^x \sin x + C$

17. $\frac{e^x}{1+x} + C$

18. $e^x \tan\frac{x}{2} + C$

19. $\frac{e^x}{x} + C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2} + C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C$

22. $2x\tan^{-1}x - \log(1 + x^2) + C$

23. A

24. B

ਅਭਿਆਸ 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + C$

6. $\dfrac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\dfrac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\dfrac{13}{8}\sin^{-1}\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\dfrac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\dfrac{9}{8}\log\left|x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\dfrac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\dfrac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

ਅਭਿਆਸ 7.8

1. 2
2. $\log\dfrac{3}{2}$
3. $\dfrac{64}{3}$
4. $\dfrac{1}{2}$
5. 0
6. $e^4(e-1)$
7. $\dfrac{1}{2}\log 2$
8. $\log\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$
9. $\dfrac{\pi}{2}$
10. $\dfrac{\pi}{4}$
11. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$
12. $\dfrac{\pi}{4}$
13. $\dfrac{1}{2}\log 2$
14. $\dfrac{1}{5}\log 6+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$
15. $\dfrac{1}{2}(e-1)$
16. $5-\dfrac{5}{2}\left(9\log\dfrac{5}{4}-\log\dfrac{3}{2}\right)$
17. $\dfrac{\pi^4}{1024}+\dfrac{\pi}{2}+2$
18. 0
19. $3\log 2+\dfrac{3\pi}{8}$
20. $1+\dfrac{4}{\pi}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$
21. D
22. C

ਅਭਿਆਸ 7.9

1. $\frac{1}{2}\log 2$ **2.** $\frac{64}{231}$ **3.** $\frac{\pi}{2}-\log 2$

4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ **5.** $\frac{\pi}{4}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7. $\frac{\pi}{8}$ **8.** $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ **9.** D

10. B

ਅਭਿਆਸ 7.10

1. $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\frac{\pi}{4}$ **3.** $\frac{\pi}{4}$ **4.** $\frac{\pi}{4}$

5. 29 **6.** 9 **7.** $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8. $\frac{\pi}{8}\log 2$ **9.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ **10.** $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{\pi}{2}$

12. π **13.** 0 **14.** 0 **15.** 0

16. $-\pi\log 2$ **17.** $\frac{a}{2}$ **18.** 5 **20.** C

21. C

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$ **2.** $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

3. $-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$ **4.** $-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

5. $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$

6. $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+9)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$

7. $\sin a \log|\sin(x-a)| + x\cos a + C$ **8.** $\frac{x^3}{3}+C$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$ **10.** $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$

11. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$ **12.** $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

13. $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$ **14.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

15. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$ **16.** $\frac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

17. $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$ **18.** $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

19. $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

20. $e^x \tan x + C$ **21.** $-2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3\log|x+2| + C$

22. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\right]+C$ **23.** $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$

24. $e^{\frac{\pi}{2}}$ **25.** $\frac{\pi}{8}$

26. $\frac{\pi}{6}$ **27.** $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

28. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **29.** $\frac{1}{40}\log 9$

30. $\frac{\pi}{2}-1$ **31.** $\frac{19}{2}$

38. A **39.** B

40. D

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. 12π **2.** 6π **3.** A **4.** B

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. 9 **3.** 4 **4.** D **5.** C

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ **2.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

3. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **4.** ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ

5. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **6.** ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 2

7. ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 1 **8.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

9. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **10.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1

11. D **12.** A

ਅਭਿਆਸ 9.2

11. D **12.** D

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$ **2.** $y = 2\sin(x + C)$

3. $y = 1 + Ae^{-x}$ **4.** $\tan x \tan y = C$

5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$ **6.** $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$

7. $y = e^{cx}$ **8.** $x^{-4} + y^{-4} = C$

9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ **10.** $\tan y = C(1 - e^x)$

11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2 (x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + 1$

12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$ **13.** $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$

14. $y = \sec x$ **15.** $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$ **17.** $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x+4)^2 = y+3$

19. $(63t+27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93%

21. Rs 1648

22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\dfrac{11}{10}\right)}$

23. A

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. $(x-y)^2 = Cx\, e^{\frac{-y}{x}}$

2. $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$

4. $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$

6. $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$

8. $x\left[1-\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right] = C\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\dfrac{y}{x} - 1$

10. $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11. $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + \log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$

13. $\cot\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

15. $y = \dfrac{2x}{1-\log|x|}\,(x \neq 0,\ x \neq e)$

16. C

17. D

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. $y = \dfrac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\,e^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3. $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$

4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5. $y = (\tan x - 1) + C e^{-\tan x}$

6. $y = \frac{x^2}{16}(4 \log|x| - 1) + Cx^{-2}$

7. $y \log x = \frac{-2}{x}(1 + \log|x|) + C$

8. $y = (1+x^2)^{-1} \log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$

9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x \sin x}$

10. $(x + y + 1) = C e^y$

11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$

12. $x = 3y^2 + Cy$

13. $y = \cos x - 2 \cos^2 x$

14. $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2e^x$

18. C

19. D

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1
   (ii) ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 3
   (iii) ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ

4. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$

6. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

7. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

8. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$

9. $\log|x - y| = x + y + 1$

10. $y e^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$

11. $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2} \ (\sin x \neq 0)$

12. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1$

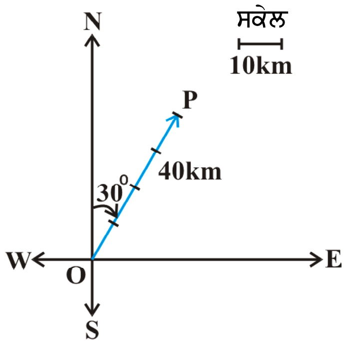
13. C

14. C

15. C

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



2. (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਵੈਕਟਰ (iii) ਸਕੇਲਰ (iv) ਸਕੇਲਰ (v) ਸਕੇਲਰ (vi) ਵੈਕਟਰ
3. (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਸਕੇਲਰ (iii) ਵੈਕਟਰ (iv) ਵੈਕਟਰ (v) ਸਕੇਲਰ
4. (i) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕੋ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਹਨ।
   (ii) ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{d}$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
   (iii) ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ।
5. (i) ਸੱਚ (ii) ਝੂਠ (iii) ਝੂਠ (iv) ਝੂਠ

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$
2. ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।
3. ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।
4. $x = 2, y = 3$
5. -7 ਅਤੇ 6; $-7\hat{i}$ ਅਤੇ $6\hat{j}$
6. $-4\hat{j}-\hat{k}$
7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$
8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$
9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ **15.** (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

16. $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **18.** (C) **19.** (B), (C), (D)

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ **3.** 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$ **6.** $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}},\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$ **7.** $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$ **9.** $\sqrt{13}$ **10.** 8

12. ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। **13.** $\frac{-3}{2}$

14. ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਲਵੋ।

15. $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

ਅਭਿਆਸ 10.4

1. $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\frac{2}{3}\hat{i}\mp\frac{2}{3}\hat{j}\mp\frac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$

5. $3,\frac{27}{2}$ **6.** ਜਾਂ $|\vec{a}|=0$ ਜਾਂ $|\vec{b}|=0$

8. ਨਹੀਂ, ਕੋਈ ਵੀ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਲਵੋ।

9. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\frac{-5}{2}\hat{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. ਨਹੀਂ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **6.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$ **7.** $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. $2:3$ **9.** $3\vec{a}+5\vec{b}$ **10.** $\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k});\ 11\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$ **13.** $\lambda=1$ **16.** (B)

17. (D) **18.** (C) **19.** (B)

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17};\ \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}};\ \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

ਅਭਿਆਸ 11.2

4. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ ਹੈ।

6. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

7. $\vec{r}=(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

8. (i) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$, (ii) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

9. (i) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

10. $p = \dfrac{70}{11}$ **12.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **13.** $2\sqrt{29}$

14. $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$ **15.** $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. 90° **2.** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$

3. $k = \dfrac{-10}{7}$ **4.** 9

5. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. (0, 4) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 16

2. (4, 0) ਤੇ ਘੱਟ-ਘੱਟ Z = – 12

3. $\left(\dfrac{20}{19}, \dfrac{45}{19}\right)$ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = $\dfrac{235}{19}$

4. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 7

5. (4, 3) ਤੇ Z = 18

6. (6, 0) ਅਤੇ (0, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 6.

7. (60, 0) ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 300;

(120, 0) ਅਤੇ (60, 30) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 600;

8. (0, 50) ਅਤੇ (20, 40) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 100.

(0, 200) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 400

9. Z ਦਾ ਕੋਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10. ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਸੰਗਤ ਖੇਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ Z ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. $P(E|F)=\frac{2}{3}, P(F|E)=\frac{1}{3}$ 2. $P(A|B)=\frac{16}{25}$

3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$

7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ 9. 1 10. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ 13. $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ 15. 0 16. C 17. D

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. $\frac{3}{25}$ 2. $\frac{25}{102}$ 3. $\frac{44}{91}$

4. A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਹਨ।

6. E ਅਤੇ F ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

7. (i) $p=\frac{1}{10}$ (ii) $p=\frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ 10. A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$

13. (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$

15. (i), (ii)

16. (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

17. D

18. B

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{13}$ **4.** $\frac{12}{13}$

5. $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

9. $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

13. A **14.** C

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$

4. $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. $\frac{2}{7}$

6. $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$ **7.** $\frac{14}{29}$ **8.** $\frac{3}{16}$

9. (i) 0.5 (ii) 0.05

10. $\frac{16}{31}$

11. A **12.** C **13.** B