ਗਣਿਤ

(ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਭਾਗ -1

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

© ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2017 .... 10,000 ਕਾਪੀਆਂ

ਰੀਵਾਈਜ਼ਡ ਐਡੀਸ਼ਨ 2023

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

All rights, including those of translation, reproduction and annotation etc., are reserved by the Punjab Government.

ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ (ਆਰਟਿਸਟ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਅਨੁਵਾਦਕ
* ਸ਼੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ ਗੌ. ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਸਿੰਘ, ਧਨਾਲ ਕਲਾਂ ਬਲਾਕ ਪੂਰਬੀ-3 ਜਲੰਧਰ।
* ਸ਼੍ਰੀਮਤੀ ਬਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਸਹੌੜਾ, ਐਸ. ਏ. ਐਸ. ਨਗਰ।

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ਼ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਲ੍ਹੀ/ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

   (ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲ਼ੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਮੁੱਲ : ₹

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

— ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਮ. ਥੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਆਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
— ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿਰਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਬੀ. ਐਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਇ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

— ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

— ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਆਰ. ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।

— ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੋਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ।

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਅਧਿਆਇ 1	ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ	1–20
ਅਧਿਆਇ 2	ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ	21–38
ਅਧਿਆਇ 3	ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ	39–81
ਅਧਿਆਇ 4	ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ	82–111
ਅਧਿਆਇ 5	ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸੀਏਬਿਲਟੀ	112–158
ਅਧਿਆਇ 6	ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਅਣਉਪਯੋਗ	159–199
ਅੰਤਿਕਾ 1	ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ	200–208
ਅੰਤਿਕਾ 2	ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ	209–220
ਉੱਤਰਮਾਲਾ		221–233
ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ		234

ਅਧਿਆਇ 1

ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ (Relations and Functions)

❖ *There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it.* — *G. H. Hardy* ❖

1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ, ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਆਦਿ ਦੀ ਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਸਹਿਤ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਸੰਬੰਧ (Relation)' ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅਰਥ ਤੋਂ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਮੰਨ ਸਕਣ ਯੋਗ (Recognisable) ਕੜੀ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A, ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XII ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ B ਉਸ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b ਦਾ ਭਰਾ ਹੈ$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a ਦੀ ਉਮਰ b ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: ਪਿਛਲੀ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ a ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a ਉਸ ਥਾਂ ਤੇ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ b ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।$\}$.

ਜਦੋਂ ਕਿ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ R ਨੂੰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstracting) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ $A \times B$ ਦੇ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਉਪਸਮੂਹ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਬੰਧ R ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ a, b ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਫ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਮੰਨਣਯੋਗ ਕੜੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਫਲਨ ਇੱਕ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition), ਉਲਟਾਣਯੋਗ (Invertible) ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

1.2 ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Relations)

ਇਸ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ $A \times A$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ $\phi \subset A \times A$ ਹੈ ਅਤੇ $A \times A$ ਖੁਦ ਦੋ ਚਰਮ ਸੰਬੰਧ ਹਨ। ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਲਈ, $R = \{(a, b): a - b = 10\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਹ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਵੀ ਜੋੜਾ (pair) ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $a - b = 10$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$. ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ $A \times A$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $A \times A$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜੇ (a, b), $|a - b| \geq 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਰਮ ਉਦਾਹਰਨ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹਿੱਸਾ A ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹਿੱਸੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ $R = \phi \subset A \times A$.ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R, ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ **(universal)** ਸੰਬੰਧ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, ਭਾਵ $R = A \times A$.ਹੈ।

ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਤੁੱਛ (trivial) ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਕਿਸੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $R = \{(a, b) : a, b$ ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ $R' = \{(a, b) :$ a ਅਤੇ b ਦੀ ਉਚਾਈਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਕੂਲ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਕੂਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਭੈਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $R = \phi$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $R' = A \times A$ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਰੋਸਟਰ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿਧੀ। ਇਸ ਲਈ ਲੇਖਕਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4\}$ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $b = a + 1$ ਹੋਵੇ। ਜਦੋਂ ਆਸਾਨ ਹੋਵੇ, ਅਸੀਂ ਵੀ ਇਸ ਸੰਕੇਤ (notation) ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in$ R, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ "a, b ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ" ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ a R b ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਬੰਧ, ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ, ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (Equivalence Relation) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਨਾਮਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ (Reflexive), ਸਮਮਿਤਈ (Symmetric) ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ (Transitive) ਸੰਬੰਧਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R;

(i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ **(reflexive)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $a \in$ A ਲਈ $(a, a) \in$ R, ਹੋਵੇ।

(ii) ਸਮਮਿਤਈ **(symmetric)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2 \in$ A ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in$ R ਅਤੇ $(a_2, a_1) \in$ R ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

(iii) ਸਕਰਮਕ **(transitive)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2, a_3 \in$ A ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in$ R ਅਤੇ $(a_2, a_3) \in$ R ਤੋਂ $(a_1, a_3) \in$ R ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ T ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਸਮੂਹ T ਵਿੱਚ R = $\{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ$\}$ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸੰਬੰਧ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਪਣੇ ਆਪ ਤੋਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੋਬਾਰਾ $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow T_2, T_1$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ ਅਤੇ T_2, T_3 ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ। $\Rightarrow T_1, T_3$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ R = $\{(L_1, L_2) : L_1, L_2$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।$\}$ ਸਮੂਹ L ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

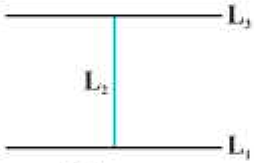
ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਰੇਖਾ L_1 ਆਪਣੇ ਆਪ 'ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ $(L_1, L_1) \notin R$. R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ L_2, L_1 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$

R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ L_1, L_2 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ L_2, L_3 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ L_1, L_3 'ਤੇ ਕਦੇ ਵੀ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ L_1, L_3 ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ, $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(L_1, L_3) \notin R$



ਚਿੱਤਰ 1.1

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ (1, 1), (2, 2) ਅਤੇ (3, 3), R ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ। R ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਪਰ $(2, 1) \notin R$.ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਅਤੇ $(2, 3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(1, 3) \notin R$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b)$: ਸੰਖਿਆ 2, $(a - b)$ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਲਈ 2, $(a - a)$ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R$. ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਤਾਂ 2. $a - b$ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ $b - a$ ਨੂੰ ਵੀ 2 ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(b, a) \in R$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R$, ਹਨ ਤਾਂ $a - b$ ਅਤੇ $b - c$ ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ। ਹੁਣ $a - c = (a - b) + (b - c)$ ਜਿਸਤ (even) ਹੈ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ $(a - c)$ ਵੀ 2 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ, ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$, ...ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 1)$,$(0, \pm 3)$, ...ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ E ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ O ਸਮੂਹ Z ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) E ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ O ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

(ii) E ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ O ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟੇ ਤੌਰ ਤੇ O ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ E ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) E ਅਤੇ O ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $\mathbf{Z} = E \cup O$ ਹੈ।

ਉਪ ਸਮੂਹ E, ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਨਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ (Equivalence Class) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ [0] ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ O, 1 ਨੂੰ ਸਮਿਲਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ [1] ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ ਅਤੇ $[1] = [2r + 1]$,

$r \in \mathbf{Z}$ । ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜਾ ਕੁਝ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ, ਉਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (arbitrary) R, X ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A_i ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ X ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ (Partition) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) ਸਾਰੇ i ਲਈ A_i ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) A_i ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ A_j ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $i \neq j$।

(iii) $\cup A_j = X$ ਅਤੇ $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

ਉਪ ਸਮੂਹ A_i ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਰੋਚਕ ਪੱਖ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ **Z** ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਉਪਖੰਡਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ **Z** ਦੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A_1, A_2 ਅਤੇ A_3 ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਸੰਮਿਲਣ (Union) **Z** ਹੈ।

$$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ}\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 1 \text{ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ}\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 2 \text{ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ}\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$$

Z ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : 3, a - b$ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।$\}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤਰਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ A_1, **Z** A_2 **Z** ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, A_3, **Z** ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ A_3, **Z** ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ 2 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ ਅਤੇ $A_3 = [2]$ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $A_1 = [3r]$, $A_2 = [3r + 1]$ ਅਤੇ $A_3 = [3r + 2]$, ਜਿੱਥੇ $r \in \mathbf{Z}$.

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a$ ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5,7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : A ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਕੋਈ ਤੱਤ a ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(a, b) \in R \Rightarrow a$ ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (b, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow$ ਤੱਤ a, b, c, ਸਾਰੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (a, c) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਉਪਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{2, 4, 6,\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਜਿਸਤ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ ਉਪ ਸਮੂਹ$\{1, 3, 5, 7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\{2, 4, 6\}$, ਦੇ ਤੱਤ ਜਿਸਤ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹਨ :

   (i) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ R, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ
   $$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

   (ii) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y = x + 5$ ਅਤੇ $x < 4\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R.

   (iii) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y$ ਭਾਜ ਹੈ x ਨਾਲ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ।

   (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x - y$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R.

   (v) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਮਾਂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਨਗਰ ਦੇ ਨਿਵਾਸੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧ R

   (a) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਹਨ।$\}$

   (b) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਇੱਕ ਹੀ ਮੁਹੱਲੇ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।$\}$

   (c) $R = \{(x, y) : x, y$ ਤੋਂ ਠੀਕ ਠੀਕ 7 ਸੈ: ਮੀ: ਲੰਬਾ ਹੈ।$\}$

   (d) $R = \{(x, y) : x , y$ ਦੀ ਪਤਨੀ ਹੈ।$\}$

   (e) $R = \{(x, y) : x, y$ ਦਾ ਪਿਤਾ ਹੈ।$\}$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ R ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R, ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਨਾ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ?

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਾਲਜ ਦੇ ਲਾਇਬਰੇਰੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹA ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਮਾਨ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ, $R = \{(a, b) : |a - b|$ ਜਿਸਤ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $\{1, 3, 5\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\{1, 3, 5\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$, ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ R ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ :

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।$\}$,

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$,

ਹਰੇਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ, ਜਿਹੜੇ :

(i) ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ।

(ii) ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ।

(iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਾ ਹੋਣ।

(iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਾ ਹੋਣ।

(v) ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਾ ਹੋਣ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ, $R = \{(P, Q) :$ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ Q ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P \neq (0, 0)$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ P ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਹੈ।

12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਭੁਜਾਵਾਂ 3, 4,5, ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_1, ਭੁਜਾਵਾਂ 5, 12, 13 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_2 ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ 6, 8, 10 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_3 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। T_1, T_2 ਅਤੇ T_3 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ?

13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ ਅਤੇ P_2 ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। 3, 4, ਅਤੇ 5 ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ XY- ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ L ਹੈ ਅਤੇ L ਵਿੱਚ $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ L_2 ਨਾਲ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਰੇਖਾ $y = 2x + 4$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3, 4} ਵਿੱਚ, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(B) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(C) R ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(D) R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

16. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Functions)

ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ, ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ, ਅਚਲ ਫਲਨ, ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ, ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ, ਚਿੰਨ੍ਹ, ਫਲਨ ਆਦਿ ਦਾ ਵਰਣਨ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨਾਲ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅਧਿਐਨ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ (Disciplines) ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਆਪਣਾ ਅਧਿਐਨ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ ਇਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਖਤਮ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

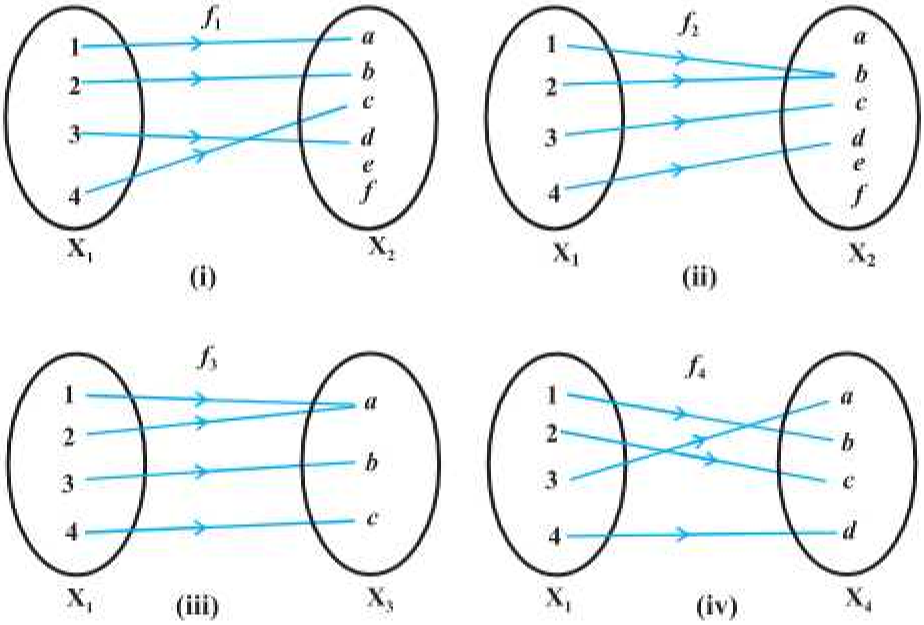
ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਏ ਫਲਨ f_1, f_2, f_3 ਅਤੇ f_4 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ X_1 ਦੇ ਵੱਖ (distinct) ਤੱਤਾਂ ਦੇ, ਫਲਨ f_1 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ f_2 ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ b ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ X_2 ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤੱਤ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ e ਅਤੇ f ਜਿਹੜੇ f_1 ਦੇ ਬਾਬਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ f_3 ਦੇ ਬਾਬਤ X_3 ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 : ਇੱਕ ਫਲਨ $f : X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਜਾਂ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (injective) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ X ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $x_1, x_2 \in X$, ਲਈ $f(x_1) = f(x_2)$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $x_1 = x_2$, ਨਹੀਂ ਤਾਂ f ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ (many-one) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (i) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f_1 ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1.2 (ii) ਵਿੱਚ f_2 ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.2 (i) ਤੋਂ (iv)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6. ਫਲਨ $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ (ਔਨਟੂ) (onto) ਜਾਂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (surjective) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ Y ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, X ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $y \in \mathrm{Y}$, ਲਈ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$.

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iii) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ f_3 ਉੱਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1.2 (i) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ f_1 ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ X_2 ਦੇ ਤੱਤ e, ਅਤੇ f, f_1 ਦੇ ਬਾਬਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ ਇੱਕ (ਔਨਟੂ) ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ f ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ (range) = Y.

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7. ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ (one-one and onto) ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ **(bijective)** ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੋਵੇ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iv) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f_4 ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਮਾਤ X ਦੇ ਸਾਰੇ 50 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ A ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(x)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ x ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਮਾਤ ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਵਿਆਪਕਤਾ ਦਾ ਬਿਨਾਂ ਨੁਕਸਾਨ ਕੀਤੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ 1 ਤੋਂ 50

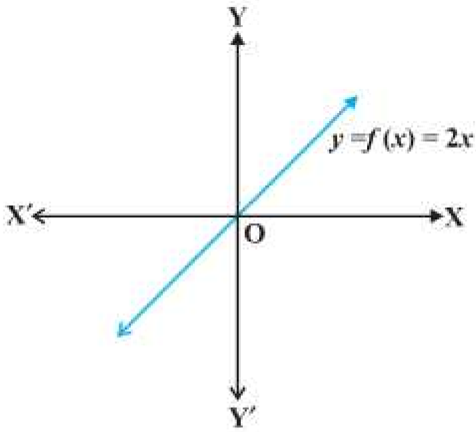
ਤੱਕ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ **N** ਦਾ ਤੱਤ 51, ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 51, **A** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਹਨ। ਦੁਬਾਰਾ, f ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $1 \in \mathbf{N}$, ਦੇ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਕਿਸੇ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $f(x) = 2x = 1$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ **R** ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ y ਲਈ **R** ਵਿੱਚ $\frac{y}{2}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $f(\frac{y}{2}) = 2\ (\frac{y}{2}) = y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਉੱਤੇ ਵੀ ਹੈ।



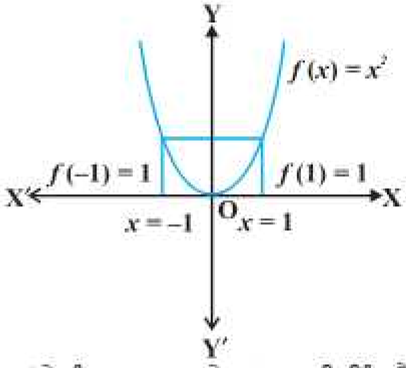
ਚਿੱਤਰ 1.3

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(1) = f(2) = 1$ ਅਤੇ $x > 2$ ਲਈ $f(x) = x - 1$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ਉੱਤੇ ਤਾਂ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(1) = f(2) = 1$, ਪਰੰਤੂ f ਔਨਟੂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $y \in \mathbf{N}, y \neq 1$, ਲਈ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $y + 1$ ਚੁਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ $f(y + 1) = y + 1 - 1 = y$ ਨਾਲ ਵੀ $1 \in \mathbf{N}$ ਲਈ $f(1) = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $f(-1) = 1 = f(1)$, ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦਾ ਤੱਤ -2, ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ x ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)। ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।



f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 1 ਅਤੇ -1 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ।
ਚਿੱਤਰ 1.4

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ} \\ x-1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x_1) = f(x_2)$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ x_1 ਟਾਂਕ ਹੈ ਅਤੇ x_2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $x_1 + 1 = x_2 - 1$, ਭਾਵ $x_2 - x_1 = 2$ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x_1 ਦੇ ਜਿਸਤ ਅਤੇ x_2 ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੀ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੋਣਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਤਾਂ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਲਈ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਜਿਸਤ ਹਨ, ਤਾਂ ਵੀ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ $2r + 1$, ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r + 2$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ $2r$, **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r - 1$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਤੱਤ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 1 ਅਤੇ 2 ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 3 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੀ ਤੱਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧੀ ਗੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਨੂੰ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤੱਤ f ਅੰਤਰਗਤ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 13 ਅਤੇ 14 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸੀਮਿਤ (finite) ਸਮੂਹ X, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਅਤੇ

10 ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਲਈ ਇਹ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹਾਂ (Infinite) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਖਾਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characteristic) ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R_*} \to \mathbf{R_*}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathbf{R_*}$ ਸਾਰੇ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R_*}$ ਨੂੰ $\mathbf{N}$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathbf{R_*}$ ਹੀ ਰਹੇ, ਤਾਂ ਵੀ ਕੀ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ?

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (Injective) ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (Surjective) ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ:

(i) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(iii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(iv) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(v) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।

3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = [x]$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਮਹੱਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ- ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $[x]$, x ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ x, ਜੇਕਰ x ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਤੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ $-x$, ਜੇਕਰ x ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0, \end{cases}$$

ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਨਾ ਔਨਟੂ ਹੈ।

6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ਅਤੇ $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ।

8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: A \times B \to B \times A$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $f(a, b) = (b, a)$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਹੈ।

9. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ, $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{ ਜੇਕਰ } n \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ} \\ \frac{n}{2}, \text{ ਜੇਕਰ } n \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$

ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ (bijective) ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \mathbf{R} - \{3\}$ ਅਤੇ $B = \mathbf{R} - \{1\}$ ਹਨ। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: A \to B$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕੀ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) f ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ। (B) f ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।

(C) f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। (D) f ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

12. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 3x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) f ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ। (B) f ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।

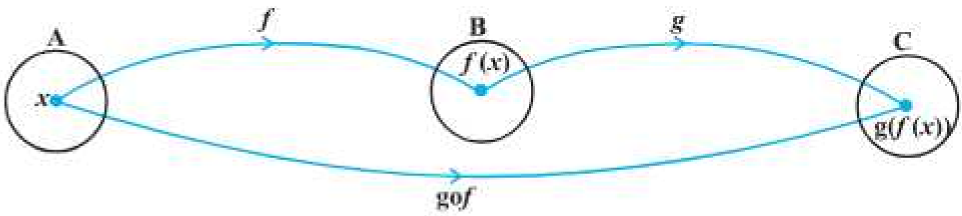
(C) f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ (D) f ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

1.4 ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਹੋਣ ਯੋਗ ਫਲਨ (Composition of Functions and Invertible Function)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ (Inverse) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੰਨ 2006 ਦੀ ਕਿਸੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠ ਚੁੱਕੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਬੋਰਡ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੋਰਡ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਸਮੇਂ ਆਪਣੀ ਉੱਤਰ ਪੱਤਰੀ ਤੇ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਨੂੰ ਗੁਪਤ (deface) ਰੱਖਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਇੱਕ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ (Fake Code Number) ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $B \subset \mathbf{N}$ ਸਾਰੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $C \subset \mathbf{N}$ ਸਾਰੇ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ

ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਫਲਨਾਂ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਬਣਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $f(a)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ a ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਅਤੇ $g(b)$ = ਰੋਲ ਨੰਬਰ b ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲਈ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ g ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ f ਅਤੇ g ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ, gof ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ $gof: A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.5

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ ਅਤੇ $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ ਦੋ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ ਅਤੇ $g(3) = g(4) = 7$ ਅਤੇ $g(5) = g(9) = 11$, ਤਾਂ gof ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ ਅਤੇ $gof(5) = g(5) = 11$.

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = 3x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ gof ਅਤੇ fog ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $gof \neq fog$. ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3\ (\cos x)^2 = 3\cos^2 x$. ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $x = 0$ ਲਈ $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $gof \neq fog$.

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 9. ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ **(Invertible)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਫਲਨ $g: Y \to X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਹੈ। ਫਲਨ g ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ f^{-1} ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਤਾਂ f ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ਤਾਂ f ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੁੰਦਾ

ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ f ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ f ਦਾ ਉਲਟ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਨਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{N} \to \mathrm{Y},\ f(x) = 4x + 3$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathrm{Y} = \{y \in \mathbf{N} : y = 4x + 3$ ਕਿਸੇ $x \in \mathbf{N}$ ਲਈ$\}$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। ਉਲਟ ਫਲਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : Y ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ y 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। Y, ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ x ਲਈ $y = 4x + 3$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = \dfrac{(y-3)}{4}$ ਹੈ। ਹੁਣ $g(y) = \dfrac{(y-3)}{4}$ ਰਾਹੀਂ $g : \mathrm{Y} \to \mathbf{N}$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $gof(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \dfrac{(4x+3-3)}{4} = x$ ਅਤੇ $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\dfrac{(y-3)}{4}\right) = \dfrac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof = \mathrm{I_N}$ ਅਤੇ $fog = \mathrm{I_Y}$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ g ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ R_1 ਅਤੇ R_2 ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ R_1 ਅਤੇ R_2 ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R_1$, ਅਤੇ $(a, a) \in R_2$, $\forall\, a \in$ A ਭਾਵ, $(a, a) \in R_1 \cap R_2 \forall\, a$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$, ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ ਅਤੇ $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$, ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ ਅਤੇ $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$. ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੋੜੇ (ordered pairs) ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R, $(x, y)\, \mathrm{R}\, (u, v)$, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $xv = yu$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $(x, y)\, \mathrm{R}\, (x, y)$, $\forall\, (x, y) \in$ A, ਕਿਉਂਕਿ $xy = yx$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $(x, y)\, \mathrm{R}\, (u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(u, v)\, \mathrm{R}\, (x, y)$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (x, y) R (u, v) ਅਤੇ (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ ਅਤੇ $ub = va \Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ (x, y) R (a, b) ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਵਿੱਚ $R_1 = \{(x, y) : x - y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R_1 ਹੈ ਅਤੇ $R_2 = \{(x, y)$: $\{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{(x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ R_2 ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ {1, 4, 7}, {2, 5, 8} ਅਤੇ {3, 6, 9} ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characterstic) ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$, ਇਸ ਲਈ $R_1 \subset R_2$, ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$. ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_2 \subset R_1$. ਇਸ ਲਈ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \rightarrow Y$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। X ਵਿੱਚ $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹਰੇਕ $a \in X$ ਲਈ $(a, a) \in R$, ਕਿਉਂਕਿ $f(a) = f(a)$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$.ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ ਅਤੇ $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਸਮੂਹ A = {1, 2, 3} ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : {1, 2, 3} ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1,2,3 ਦਾ ਕ੍ਰਮ-ਸੰਚਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ {1, 2, 3} ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਚਿੱਤਰਾਂ (Maps) ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਹੜੀ ਕਿ $3! = 6$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {1, 2, 3} ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਚਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ (1, 2) ਅਤੇ (2, 3) ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)}, (1, 2) ਅਤੇ (2, 3) ਤੱਤਾਂ ਵਾਲਾ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸੰਬੰਧ R_1 ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ R_1 ਵਿੱਚ ਜੋੜਾ

(2, 1) ਵਧਾ ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ R_2 ਹੁਣ ਵੀ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ R_1 ਵਿੱਚ (3, 2) ਪਾ ਕੇ R_3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੁਣ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ R_1 ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਜੋੜਿਆਂ (2, 1), (3, 2) ਜਾਂ ਇੱਕ ਜੋੜੇ (3, 1) ਤੱਕ ਨਹੀਂ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ, ਸਕਰਮਕਤਾ ਬਨਾਉਣ ਲਈ, ਬਾਕੀ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ ਸਮਮਿਤਈ ਵੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ, ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3} ਵਿੱਚ (1, 2) ਅਤੇ (2, 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : (1, 2) ਅਤੇ (2, 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਸੰਬੰਧ (ਸਮਤੁਲਤਾ) R_1, {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} ਹਨ। ਹੁਣ ਸਿਰਫ਼ 4 ਜੋੜੇ (2, 3), (3, 2), (1, 3) ਅਤੇ (3, 1) ਬਾਕੀ ਬਚਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਜਿਵੇਂ (2, 3) ਨੂੰ R_1 ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਮਮਿਤਈ ਲਈ ਅਸੀਂ (3, 2) ਨੂੰ ਵੀ ਲੈਣਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਨਾਲ ਵੀ ਸਕਰਮਕਤਾ ਲਈ ਅਸੀਂ (1, 3) ਅਤੇ (3, 1) ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ R_1 ਵੱਡਾ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਕੇਵਲ ਸਰਵ ਵਿਆਪਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ (1, 2) ਅਤੇ (2, 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ $I_N(x) = x,\ \forall x \in \mathbf{N}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, ਭਾਵੇਂ I_N ਉੱਤੇ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ :

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ I_N ਔਨਟੂ ਹੈ ਪਰ $I_N + I_N$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{N}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ 3 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ $\mathbf{N}$ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $f(x) = \sin x$ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਅਤੇ g ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਪਰ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ x_1 ਅਤੇ x_2 ਲਈ $\sin x_1 \neq \sin x_2$ ਅਤੇ $\cos x_1 \neq \cos x_2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਅਤੇ g ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ। ਪਰ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ ਅਤੇ $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (Injective) ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ X ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। P(X) ਜੋ ਕਿ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ :

   P(X) ਵਿੱਚ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A, B ਲਈ ARB, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਹੈ। ਕੀ R, P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰੋ।
4. ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ਤੋਂ ਖੁਦ ਤੱਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ ਅਤੇ $f, g : A \to B$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(x) = x^2 - x, x \in A$ ਅਤੇ $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹਨ, ਕੀ f ਅਤੇ g ਬਰਾਬਰ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g : A \to B$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ $f(a) = g(a)\ \forall\, a \in A$ ਹੋਵੇ।
6. ਜੇਕਰ $A = \{1, 2, 3\}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ (1, 2) ਅਤੇ (1, 3) ਹੋਣ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ, ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
7. ਜੇਕਰ $A = \{1, 2, 3\}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੱਤ (1, 2) ਵਾਲੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

- X ਵਿੱਚ, $R = \phi \subset X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R, **ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ** ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, $R = X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R, **ਸਰਵ ਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ** ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਕਿ $\forall\, a \in X$, $(a, a) \in R$, ਹੋਵੇ, **ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧ** ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ R, ਕਿ ਸ਼ਰਤ $(a, b) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਕਿ $(b, a) \in R$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, **ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ** ਹੈ।

- X ਵਿੱਚ, ਸ਼ਰਤ R, $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R \ \forall\ a, b, c \in X$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ R, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ, **ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ** ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ $a \in X$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵਰਗ **[*a*]**, X ਦਾ ਉਹ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ a ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ **ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ** ਹੈ ਜੇਕਰ

  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,\ \forall\ x_1, x_2 \in X$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ **ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ** $y \in Y, \exists\, x \in X$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ f ਔਨਟੂ (ਅਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਵੀ) ਹੈ। ਇਹ ਕਿਸੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਦਾ ਗੁਣ ਧਰਮ ਹੈ। ਇਹ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ (Characterstic Property) ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ

ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ R. Descartes (ਸੰਨ 1596-1650 ਈ.) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਲੰਬੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। Descartes ਨੇ ਸੰਨ 1637 ਈ: ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Geometric" ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ (Function) ਫਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ, ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਕਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, (Hyperbola), ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola) ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (Ellipse), ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ x^n ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। James Gregory (ਸੰਨ 1636-1675 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Vera Circuliet Hyperbolae Quadratura" (ਸੰਨ 1667 ਈ.) ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਮੰਨਿਆ ਸੀ, ਜਿਹੜੀ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਜਾਂ ਹੋਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ G. W. Leibnitz (1646-1716 ਈ.) ਨੇ 1673 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Methodus tangentium inversa, seu de functionibus" ਵਿੱਚ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਫਲਨ (Function) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ, ਜਿਹੜਾ ਕਿਸੇ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਵਕਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਵਕਰ ਦੀ ਢਲ, ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬਰੂਪ ਰੇਖਾ ਬਦਲਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Historia" (1714 ਈ.) ਵਿੱਚ Leibnitz ਨੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'x ਦਾ ਫਲਨ' ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਉਹ ਪਹਿਲੇ ਇਨਸਾਨ ਸੀ। John Bernoulli (1667-1748 ਈ:) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 1718 ਵਿੱਚ ਸੰਕੇਤ (Notation) ϕx

ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'x ਦਾ ਫਲਨ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਪਰ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ f, F, ϕ, ψ ... ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਯੋਗ Leonhard Euler (1707-1783 ਈ.) ਰਾਹੀਂ 1734 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Analysis Infinitorium" ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ Joeph Louis Lagrange (1736-1813 ਈ.) ਨੇ 1793 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ "Theorie des functions analytiques" ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਿਕ (Analytic) ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ ਆਦਿ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ x ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ Lejeunne Dirichlet (1805-1859 ਈ.) ਨੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ। ਜਿਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਹੁੰਦਾ ਰਿਹਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ, ਜਿਹੜਾ Georg Cantor (1845-1918 ਈ.) ਰਾਹੀਂ ਵਿਕਸਿਤ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਇਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਪ੍ਰਚਲਿਤ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ Dirichlet ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਮਾਤਰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstraction) ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ **2**

ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ
(Inverse Trigonometric Functions)

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Arya Bhatta
(476-550 A. D.)

ਅਧਿਆਇ1 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ f^{-1} ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਉਲਟ ਫਲਨ (Inverse) ਦੀ ਹੋਂਦ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਫਲਨ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਆਮ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰਾਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (Restrictions) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਰਾਹੀਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹਨਾਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਗੁਣ (Properties) 'ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ, ਕਲਨ (Calculus) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਕਈ ਇਟੇਗਰਲਜ਼ (Integrals) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ (Engineering) ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

2.2 ਅਧਾਰਭੂਤ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਜਮਾਤ XI, ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ :

sine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\sin : \mathbf{R} \to [-1. 1]$

cosine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

tangent ਫਲਨ ਭਾਵ, $\tan : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent ਫਲਨ ਭਾਵ, $\cot : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant ਫਲਨ ਭਾਵ, $\sec : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n + 1) \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

cosecant ਫਲਨ ਭਾਵ, $\text{cosec} : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ $f : X \to Y$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਫਲਨ $g : Y \to X$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(y) = x$, ਜਿੱਥੇ $x \in X$ ਅਤੇ $y = f(x), y \in Y$ ਹੈ। ਇੱਥੇ g ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $= f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅਤੇ g ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $= f$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਹੈ। ਫਲਨ g ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ f^{-1} ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ g ਵੀ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ g ਦਾ ਉਲਟ f ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ ਨਾਲ ਹੀ :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

ਅਤੇ
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

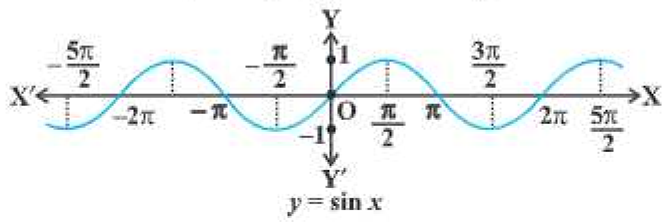
ਕਿਉਂਕਿ sine ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[-1, 1]$ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ (ਬੰਨ) ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ sine ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right], \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ, ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ, sine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\sin^{-1}$ (arc sine function) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $[-1, 1]$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right], \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਜਾਂ $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sin^{-1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ (Branch) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਸਥਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ $\sin^{-1}$ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $\sin^{-1}$ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਂਤ $[-1, 1]$ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{-1} x) = x$, ਜੇਕਰ $-1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੋਵੇ

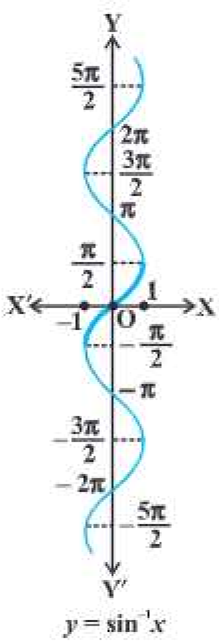
ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{-1} x) = x$, ਜੇਕਰ $-1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\sin y = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

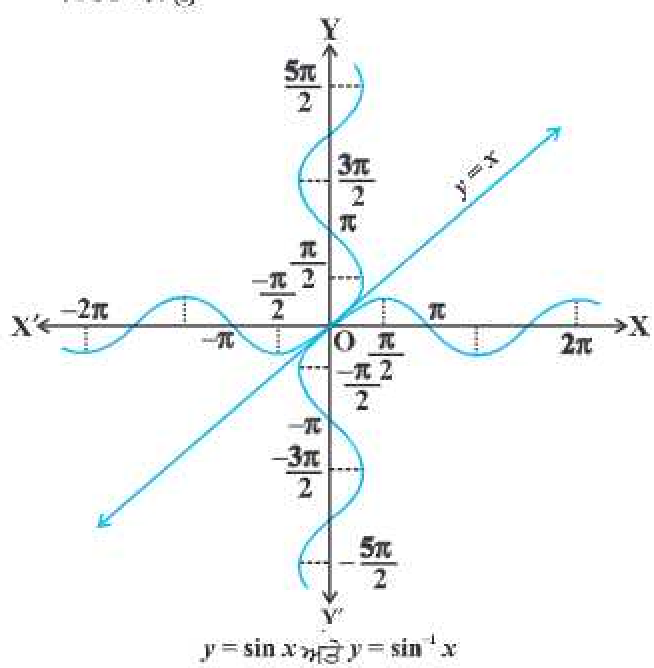
(i) ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $x = f^{-1}(y)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ ਫਲਨ sin ਦੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਫਲਨ $\sin^{-1}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ, ਜੇਕਰ (a, b), sin ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ (b, a), sin ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.1 (i)



ਚਿੱਤਰ 2.1 (ii)



ਚਿੱਤਰ 2.1 (iii)

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਫਲਨ $y = \sin x$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin x$ ਅਤੇ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.1 (i), (ii). ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਗੂੜਾ ਭਾਗ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

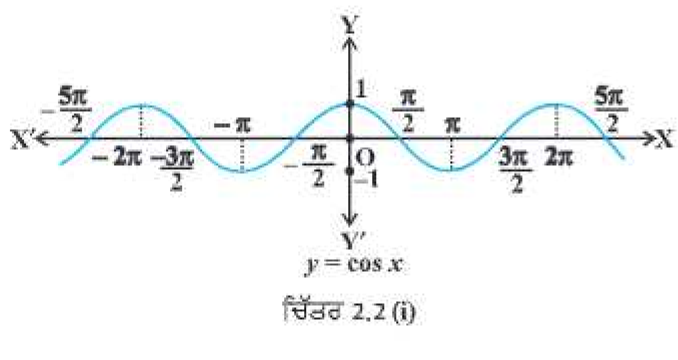
(ii) ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਦੇ ਵੱਲ ਸੰਗਤ ਮੂਲ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (Mirror Image), ਭਾਵ ਪਰਾਵਰਤਨ (Reflection) (Along), ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕਲਪਨਾ $y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ, ਦਿੱਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈਂ (ਚਿੱਤਰ 2.1 (iii))।

sine ਫਲਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ cosine ਫਲਨ ਵੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $[-1, 1]$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[0, \pi]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\cos^{-1}$(arc cosine function) ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $[-1, 1]$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\cos^{-1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ, ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $[0, \pi]$ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

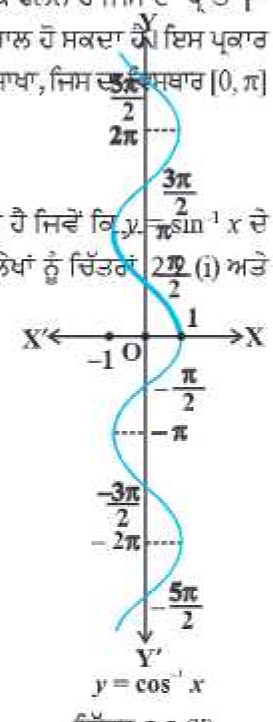
$y = \cos^{-1} x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। $y = \cos x$ ਅਤੇ $y = \cos^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ 2.2 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\text{cosec}^{-1}x$ ਅਤੇ $\sec^{-1}x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।



$y = \cos x$

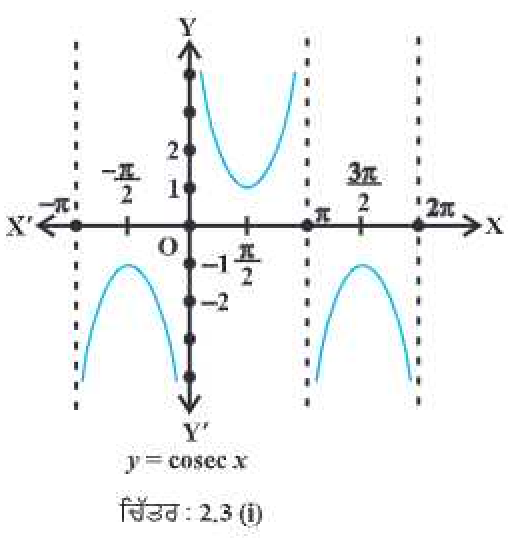
ਚਿੱਤਰ 2.2 (i)



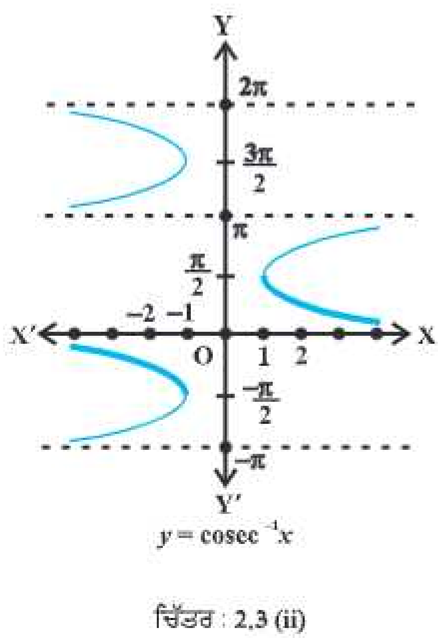
$y = \cos^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.2 (ii)

ਕਿਉਂਕਿ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, ਇਸ ਲਈ cosec ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ ਜਾਂ $y \leq -1\}$, ਭਾਵ, ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $y = \operatorname{cosec} x$, $-1 < y < 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ (Integral) ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosec ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$. ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ cosec ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\operatorname{cosec}^{-1}$ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ $\operatorname{cosec}^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ : 2.3 (i)



ਚਿੱਤਰ : 2.3 (ii)

$$\text{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

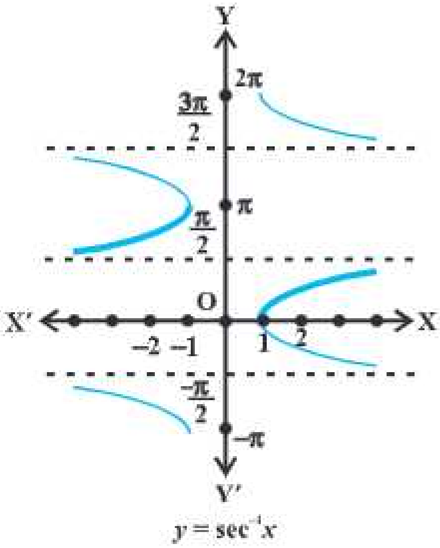
$y = \text{cosec}\, x$ ਅਤੇ $y = \text{cosec}^{-1} x$ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.3 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. $y = \sec x$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ sec (secant) ਫਲਨ $-1 < y < 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ (Assumes) ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ secant ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ secant ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sec^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $(-1, 1)$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

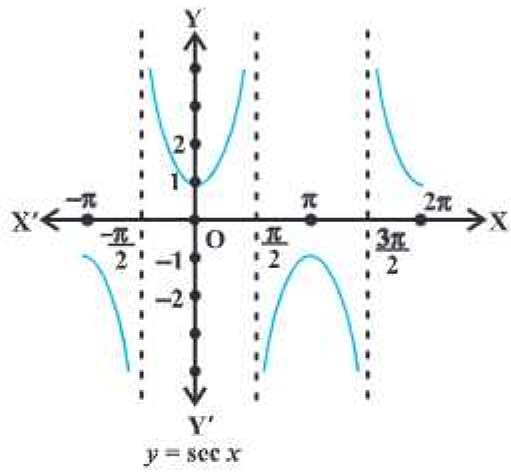
$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

$y = \sec x$ ਅਤੇ $y = \sec^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ 2.4 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\tan^{-1}$ ਅਤੇ $\cot^{-1}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, (tangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R}$ ਹੈ । ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ tangent ਫਲਨ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



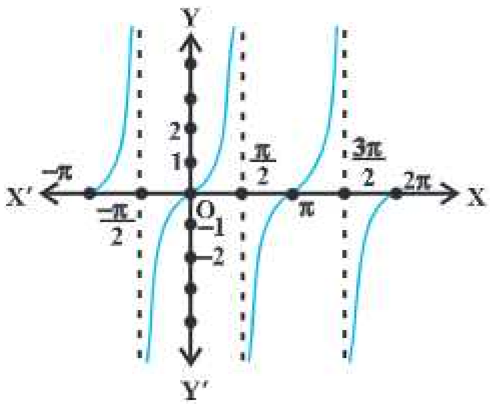
ਚਿੱਤਰ 2.4 (i)



ਚਿੱਤਰ 2.4 (ii)

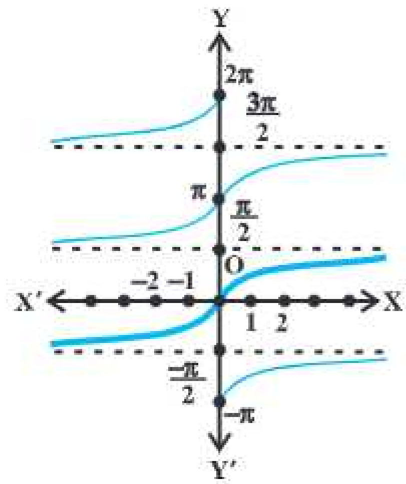
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ tangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, tangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ $\tan^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਫਲਨ $\tan^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\tan^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ :

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \to \left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan x$

ਚਿੱਤਰ 2.5 (i)

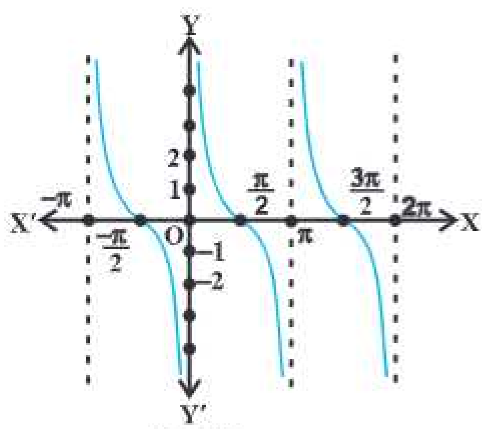


$y = \tan^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.5 (ii)

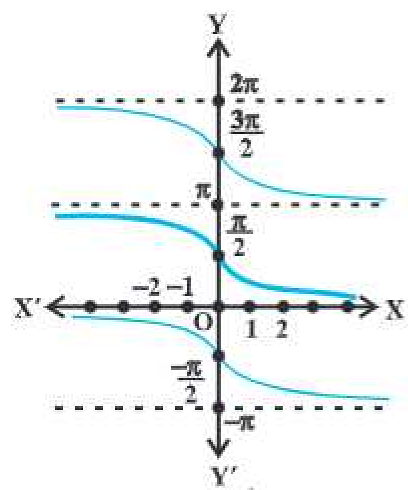
$y = \tan x$ ਅਤੇ $y = \tan^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.5 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ (cotangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ cotangent ਫਲਨ, π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



$y = \cot x$

ਚਿੱਤਰ 2.6 (i)



$y = \cot^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.6 (ii)

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cotangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਵਾਲਾ ਇੱਕ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cotangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\cot^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋਵੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ ਫਲਨ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ **ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ** ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$$

$y = \cot x$ ਅਤੇ $y = \cot^{-1}x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.6 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to$	$[0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\to$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\to$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$(0, \pi)$

ਟਿੱਪਣੀ

1. $\sin^{-1}x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{-1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
2. ਜਦੋਂ ਵੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸੇ ਸ਼ਾਖਾ (ਖਾਸ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਨਾ ਦੱਸਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਉਸ ਫਲਨ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ **ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ** (Principal value) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

ਉਦਾਹਰਣ 1 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\frac{\pi}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ਹੈ।}$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\frac{2\pi}{3}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 2.1

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $\text{cosec}^{-1}(2)$

4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

11. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. ਜੇਕਰ $\sin^{-1} x = y$, ਹੈ, ਤਾਂ

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਦੱਸ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ, ਸੰਗਤ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੀ ਸਹੀ (Valid) ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਵੀ ਉਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਕੁਝ ਨਤੀਜੇ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਨ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਹੋਣਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵੇਰਵੇ (Details) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਚਰਚਾ (Discussion) ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ, ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1}x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x = \sin y$ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = \sin y$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $y = \sin^{-1}x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ (Equivalent) ਹੈ ਕਿ

$$\sin(\sin^{-1}x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ ਅਤੇ } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ਹੋਰ ਪੰਜ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

1. (i) $\sin^{-1}\frac{\mathbf{1}}{x} = \text{cosec}^{-1}x, x \geq 1$ ਜਾਂ $x \leq -1$

(ii) $\cos^{-1}\frac{\mathbf{1}}{x} = \sec^{-1}x, x \geq 1$ ਜਾਂ $x \leq -1$

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦਰਸਾਉ ਕਿ :

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x, \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \sin\theta$ ਤਾਂ $\sin^{-1}x = \theta$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ,

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\sin^{-1}x$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਵਰਤੋਂ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ

$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right), \ -\frac{-3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਦੂਜੇ ਤੌਰ ਤੇ,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x = \sec\theta$, ਤਾਂ $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

ਇਸ ਲਈ $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

3. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

4. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), 0 < x < \pi$

5. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \frac{-\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

6. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2 x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

8. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

9. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0$ ਅਤੇ $xy < 1$

ਅਭਿਆਸ 10 ਤੋਂ 12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

10. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

12. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

13. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

14. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}$ ਹੈ (B) $\frac{1}{3}$ ਹੈ (C) $\frac{1}{4}$ ਹੈ (D) 1

15. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) π ਹੈ (B) $-\frac{\pi}{2}$ ਹੈ (C) 0 ਹੈ (D) $2\sqrt{3}$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 6 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{-1}(\sin x)=x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$

ਪਰ, $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ਜਿਹੜਾ $\sin^{-1}x$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ $\sin(\frac{3\pi}{5})=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5})=\sin\frac{2\pi}{5}$ ਅਤੇ $\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\frac{8}{17}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\frac{63}{16}=\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

8. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x\in[0, 1]$

9. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{x}{2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$ [ਸੰਕੇਤ : $x=\cos 2\theta$ ਰੱਖੋ।]

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

11. $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

12. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x>0)$

13. $\sin(\tan^{-1}x), |x|<1$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

14. ਜੇਕਰ $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$, ਹੈ, ਤਾਂ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੈ :

ਫਲਨ	ਪ੍ਰਾਂਤ	ਵਿਸਥਾਰ (ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਸ਼ਾਖਾ)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = \sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y = \tan^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{-1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ, ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ (Principal Value) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਠੀਕ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਲਈ

- $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$
- $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1} x$
- $\sin(\sin^{-1} x) = x$
- $\sin^{-1}(\sin x) = x$

ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਆਰੀਆਭੱਟ (476 ਈ.), ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਦੂਜਾ (1114 ਈ.) ਨੇ ਮੁੱਖ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸੀ। ਇਸ ਸੰਪੂਰਨ ਗਿਆਨ ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਮੱਧ ਪੂਰਵ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਉੱਥੋਂ ਯੂਰੋਪ ਗਿਆ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਪਰ ਉਹਨਾਂ

ਦੀ ਕਾਰਜ ਵਿਧੀ ਇੰਨੀ ਭੇ-ਚੰਗੀ ਸੀ, ਕਿ ਭਾਰਤੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਣ ਤੇ ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ ਅਪਣਾਈ ਗਈ।

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਆਧੁਨਿਕ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦੀ ਜਿਆਦਾ ਅਤੇ (sine) ਫਲਨ ਦੀ ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ ਦਾ ਵੇਰਵਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜੋਤਿਸ਼ ਕਾਰਜ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਹੈ।

ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਨੇ 90° ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੋਣਾਂ ਦੇ sine ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋਲਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦਾ ਮਲਿਆਲਮ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\sin(A + B)$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਉਤਪਤੀ ਹੈਂ। 18°, 36°, 54°, 72°, ਆਦਿ ਦੇ sine ਅਤੇ cosine ਦੇ ਸ਼ੁੱਧ ਮੁੱਲ ਭਾਸਕਰ ਦੂਜੇ ਨੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, ਆਦਿ ਨੂੰ $\sin x$, ਅਤੇ $\cos x$, ਆਦਿ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸੁਝਾਵ Sir John F.W. Hersehel (1813 ਈ.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਨਾਲ Thales (600 ਈ. ਪੂ.) ਦਾ ਨਾਂ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਮਿਸਰ ਦੇ ਮਹਾਨ ਪਿਰਾਮਿਡਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਮਦਦ ਛੜ ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ ਹਨ :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan\ (\text{ਸੂਰਜ ਦਾ ਅਵਲੰਬ})$$

Thales ਨੇ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਪੁਰਾਣੇ ਭਾਰਤੀ ਕਾਰਜਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦੇ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 3

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ Matrices)

❖ *The essence of mathematics lies in its freedom — CANTOR* ❖

3.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) ਦੇ ਗਿਆਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਿੱਧੀਆਂ ਸਾਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਸਾਧਨ ਸਾਡੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਾਫੀ ਹੱਦ ਤੱਕ ਸਰਲ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸੰਖੇਪ ਅਤੇ ਸਰਲ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਉਪਰਾਲੇ ਸਦਕਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਹੀ ਨਹੀਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਬਲਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਵੱਧ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਕੇਤਨ ਅਤੇ (operations) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਲਈ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਸਪਰੈਡਸ਼ੀਟ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਜ਼ (Electronic Spreadsheet Programmes) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿਜ਼ਨਸ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਬਜਟ (Budgeting), ਵਿਕਰੀ ਖਾਕਾ (Sales Projection) ਲਾਗਤ ਅਨੁਮਾਨ (Cost Estimation) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਆਦਿ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਨੇਕ ਭੌਤਿਕ ਕਾਰਵਾਈਆਂ (operations) ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਧਾਉਣਾ (Magnification), ਗੇੜਾ (Rotation) ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (Reflection) ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤਿਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸੰਕੇਤ ਪੱਧਤੀ ਲਿਖਣ (Cryptography) ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾ ਕੇਵਲ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀਆਂ ਹੀ ਕੁਝ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਤਪੱਤੀ ਸੰਬੰਧੀ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ; ਆਧੁਨਿਕ ਮਨੋਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗਿਕ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Matrix algebra) ਦੇ ਆਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਹੋਣਾ ਸਾਨੂੰ ਰੋਚਕ ਲੱਗੇਗਾ।

3.2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix)

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਇਹਸੂਚਨਾ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਕਿਤਾਬਾਂ/ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15] ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ 6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15 6] ਰੂਪ ਨਾਲ ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਦਕਿ ਦੂਜੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਰਾਧਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋ ਮਿੱਤਰਾਂ ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ :

ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ	15	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,
ਜੋਤਿਕਾ ਦੇ ਕੋਲ	10	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	2 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,
ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ	13	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	5 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਵਸਥਿਤ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

	ਪੁਸਤਕਾਂ	**ਕਲਮਾਂ**
ਰਾਧਾ	15	6
ਜੋਤਿਕਾ	10	2
ਸਿਮਰਨ	13	5

ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ} \end{matrix}$$

↑ ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ ↑ ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ

ਜਾਂ

	ਰਾਧਾ	**ਜੋਤਿਕਾ**	**ਸਿਮਰਨ**
ਪੁਸਤਕਾਂ	15	10	13
ਕਲਮਾਂ	6	2	5

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \end{matrix}$$

↑ ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ ↑ ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ ↑ ਤੀਸਰਾ ਥੰਮ

ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ

ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ; ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਸਮ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਜਾਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤ ਜਾਂ ਇੰਦਰਾਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਵੱਡੇ (Capital) ਅੱਖਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿਤਿਜੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ (Rows) ਅਤੇ ਖੜੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਥੰਮ (Columns) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਅਤੇ B ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ C ਵਿੱਚ 2 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ।

3.2.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a matrix)*

m ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਤਰਤੀਬ (order) ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਕੇਵਲ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A, ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, B ਇੱਕ 3×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ C, ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ $3 \times 2 = 6$ ਅੰਗ ਹਨ ਅਤੇ B ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 6 ਅੰਗ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਆਇਤਕਾਰ ਵਿਵਸਥਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ਜਾਂ $\quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ ਜਿੱਥੇ $i, j \in \mathbf{N}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ jਵੇਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ a_{ij}, iਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ jਵੇਂ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਤੱਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ (i, j)ਵਾਂ ਤੱਤ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ mn ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ :

1. ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸੰਕੇਤ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।
2. ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਥੰਮ) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (ਜਾਂ $[x, y]$)ਨਾਲ, ਉਦਾਹਰਣ ਸਰੂਪ ਬਿੰਦੂ P(0, 1), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ਜਾਂ $[0 \ 1]$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਬੰਦ ਸਰਲਰੇਖੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), ਅਤੇ D (–1, 2) ਹਨ।

ਹੁਣ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \quad \text{ਜਾਂ} \quad Y = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਤਿੰਨ ਫੈਕਟਰੀਆਂ I, II ਅਤੇ III ਵਿੱਚ ਪੁਰਸ਼ ਅਤੇ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

	ਪੁਰਸ਼ ਕਰਮਚਾਰੀ	ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀ
I	30	25
II	25	31
III	27	26

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਨਿਰਪੂਤ ਕਰੋ। ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਵਾਲੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕੀ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦਾ ਇੰਦਰਾਜ ਫੈਕਟਰੀ –III ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 8 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) (orders) ਕੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ mn ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 8 ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ।

ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਜੋੜੇ (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4) ਹਨ।

ਅਤੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਿਤ (ਤਰਤੀਬ) 1×8, 8×1. 4×2, 2×4 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $\qquad a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$, $i = 1, 2, 3$ ਅਤੇ $j = 1, 2$

ਇਸ ਲਈ

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3.1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1-3.2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3.1| = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2-3.2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3.1| = 0 \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3.2| = \frac{3}{2}$$

ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

3.3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Matrices)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) **ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Column matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਥੰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 4×1 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ $m \times 1$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) **ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Row matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$, 1×4 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ $1 \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(iii) **ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Square matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ 'n' ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ਇੱਕ 3 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ m ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੰਦਰਾਜ $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਅੰਗ, 1, 4, 6 ਹਨ।

(iv) **ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Diagonal matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਵਿਕਰਣ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਰਥਾਤ, ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ $i \neq j$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(v) **ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Scalar matrix)**

ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜੇਕਰ $i \neq j$

$b_{ij} = k$, ਜੇਕਰ $i = j$, ਜਦੋਂ ਕਿ k ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ;

ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ ਦੇ 3 ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(vi) **ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Identity matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ 1 ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ਜੇਕਰ } & i = j \\ 0 \text{ ਜੇਕਰ } & i \neq j \end{cases}$

ਅਸੀਂ, n ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ I_n ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਦੋਂ ਸੰਦਰਭ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ I ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ $k = 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹਰੇਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(vii) **ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0, 0]$ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ O ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਸੰਦਰਭ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

3.3.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of matrices)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

(i) ਉਹ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ

(ii) A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, B ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $A = B$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

ਹੈ ਤਾਂ a, b, c, x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਵੀ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ। ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$x+3=0, \qquad z+4=6, \qquad 2y-7=3y-2$$

$$a-1=-3, \qquad 0=2c+2 \qquad b-3=2b+4,$$

ਇਸ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$a=-2, b=-7, c=-1, x=-3, y=-5, z=2$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $a, b, c,$ ਅਤੇ d ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ, ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$2a+b=4 \qquad 5c-d=11$$

$$a-2b=-3 \qquad 4c+3d=24$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $a=1, b=2, c=3$ ਅਤੇ $d=4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$. ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (order) (ii) ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

   (iii) ਤੱਤ $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 24 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 13 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹੋਣਗੀਆਂ।

3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 18 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਪਤਾ ਕਰੋ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 5 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

4. ਇੱਕ 2×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

5. ਇੱਕ 3×4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i+j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. ਸਮੀਕਰਣ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ ਤੋਂ a, b, c ਅਤੇ d ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D)ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

9. x ਅਤੇ y ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜੋੜੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = 7$ (B) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ

(C) $y = 7, \quad x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{-2}{3}$.

10. 3×3 ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ 0 ਜਾਂ 1 ਹੈ।

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations on Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਕੁੱਝ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ :

3.4.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਦੀਆਂ ਸਥਾਨ A ਅਤੇ ਸਥਾਨ B 'ਤੇ ਦੋ ਫੈਕਟਰੀਆਂ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੜੀਆਂ ਅਤੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਲਈ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੁੱਲ ਵਰਗਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2, 3 ਲਈ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤੇ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

	A ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ			B ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ	
	ਮੁੰਡੇ	ਕੁੜੀਆਂ		ਮੁੰਡੇ	ਕੁੜੀਆਂ
1	80	60	1	90	50
2	75	65	2	70	55
3	90	85	3	75	75

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਾਤਿਮਾ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 1 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (80 + 90), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (60 + 50)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 2 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (75 + 70), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (65 + 55)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 3 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (90 + 75), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (85 + 75)

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ, ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

ਇੱਕ ਹੋਰ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਦੋ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ; ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i ਅਤੇ j ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{5} & 1\\ -2 & 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A + B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ 2 × 3 ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਦਾ ਯੋਗ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ

$$A+B=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1\\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 6 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ A + B ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, ਤਾਂ A + B ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।
2. ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

3.4.2 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ* (*Multiplication of a matrix by a scalar*)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਨੇ A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦੋ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ (ਸੰਦਰਭ 3.4.1)

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\end{array}\begin{array}{c}\text{ਮੁੰਡੇ}\quad\text{ਕੁੜੀਆਂ}\\ \begin{bmatrix}80 & 60\\ 75 & 65\\ 90 & 85\end{bmatrix}\end{array}$$

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਨਵੀਂ (ਬਦਲੀ ਹੋਈ) ਸੰਖਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{ਮੁੰਡੇ} \quad\quad \text{ਕੁੜੀਆਂ} \\ \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ k ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ kA ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, ਭਾਵ kA ਦਾ (i, j)ਵਾਂ ਅੰਸ਼, i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ka_{ij} ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Negative of a matrix) ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ –A ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ –A ਨੂੰ $-A = (-1)A$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, ਤਾਂ –A ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of matrices) ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ A – B, ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $D = [d_{ij}]$ ਜਿੱਥੇ i ਅਤੇ j ਦੇ

ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ਹੈ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ D = A – B = A + (–1) B. ਭਾਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ– B ਦਾ ਜੋੜਫਲ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ 2A – B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of matrix addition)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਾਂ (ਨਿਯਮਾਂ) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ :

(i) **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative Law)** ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A + B = B + A ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (Associative Law)** ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ ਦੇ ਲਈ (A + B) + C = A + (B + C)

ਹੁਣ $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (ਕਿਉਂ ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) **ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (Existence of additive identity)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O ਇੱਕ $m \times n$ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A+O = O+A= A ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ O ਹੈ।

(iv) **ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (The existence of additive inverse)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $- A = [- a_{ij}]_{m \times n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਕਿ A + (–

A) = (– A) + A= O, ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ – A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

3.4.4 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of scalar multiplication of a matrix)*

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ k ਅਤੇ l ਸਕੇਲਰ ਹਨ ਤਾਂ

(i) $k(A + B) = kA + kB$. (ii) $(k + l)A = kA + lA$

ਹੁਣ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, ਅਤੇ k ਅਤੇ l ਸਕੇਲਰ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\,a_{ij}) + (k\,b_{ij})]$$

$$= [k\,a_{ij}] + [k\,b_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$$

(ii) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$

$$= [(k + l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] = kA + lA.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2A + 3X = 5B$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $2A + 3X = 5B$

ਜਾਂ $2A + 3X - 2A = 5B - 2A$

ਜਾਂ $2A - 2A + 3X = 5B - 2A$ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ–ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

ਜਾਂ $O + 3X = 5B - 2A$ (– 2A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 2A ਦਾ ਜੋੜ ਉਲਟ ਹੈ)

ਜਾਂ $3X = 5B - 2A$ (O, ਜੋੜ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ)

ਜਾਂ $X = \frac{1}{3}(5B - 2A)$

ਜਾਂ $X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. X ਅਤੇ Y, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X+Y=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $(X+Y)+(X-Y)=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $(X+X)+(Y-Y)=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

ਨਾਲ ਹੀ $(X+Y)-(X-Y)=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $(X-X)+(Y+Y)=\begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $Y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $2x + 3 = 7$ ਅਤੇ $2y - 4 = 14$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $2x = 7 - 3$ ਅਤੇ $2y = 18$

ਜਾਂ $x = \frac{4}{2}$ ਅਤੇ $y = \frac{18}{2}$

ਅਰਥਾਤ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 9$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਦੋ ਕਿਸਾਨ ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਜਿਵੇਂ ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ ਅਤੇ ਨਉਰਾ ਦੀ ਖੇਤੀ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਸਤੰਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ)

$$A = \begin{array}{c} \text{ਬਾਸਮਤੀ} \quad \text{ਪਰਮਲ} \quad \text{ਨਉਰਾ} \\ \begin{bmatrix} 10,000 & 20,000 & 30,000 \\ 50,000 & 30,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}$$

ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ)

$$A - B = \begin{array}{c} \text{ਬਾਸਮਤੀ} \quad \text{ਪਰਮਲ} \quad \text{ਨਉਰਾ} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}$$

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਦੀ ਇਕੱਠੀ ਵਿਕਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਸਤੰਬਰ ਤੋਂ ਅਕਤੂਬਰ ਤੱਕ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਆਈ ਕਮੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ 2% ਲਾਭ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

$$A+B=\begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix}$$

(ਕਾਲਮ: ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ, ਨਉਰਾ; ਕਤਾਰਾਂ: ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ, ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ)

(ii) ਸਤੰਬਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

$$A-B=\begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix}$$

(ਕਾਲਮ: ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ, ਨਉਰਾ; ਕਤਾਰਾਂ: ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ, ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ)

(iii) B ਦਾ 2% $=\dfrac{2}{100}\times \mathbf{B}=0.02\times B$

$$=0.02\begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix}$$

(ਕਾਲਮ: ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ, ਨਉਰਾ; ਕਤਾਰਾਂ: ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ, ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ)

$$=\begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix}$$

(ਕਾਲਮ: ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ, ਨਉਰਾ; ਕਤਾਰਾਂ: ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ, ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ)

ਇਸ ਲਈ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100 ਰੁਪਏ, 200 ਰੁਪਏ ਅਤੇ 120 ਰੁਪਏ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 400 ਰੁ., 200, ਰੁ: ਅਤੇ 200 ਰੁ: ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

3.4.5 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ *(Multiplication of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੋ ਮਿੱਤਰ ਹਨ। ਮੀਰਾ 2 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 5 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ 8 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 10 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਤੇ (ਕੀਮਤ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਕਲਮ – ਹਰੇਕ 5 ਰੁ:, ਕਹਾਣੀ ਪੁਸਤਕ–ਹਰੇਕ 50 ਰੁ: ਹੈ।

ਉਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਖਰਚ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ? ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ; ਮੀਰਾ ਨੂੰ ਰੁ: $(5\times 2+50\times 5)$ ਰੁ: ਭਾਵ 260 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ $(8\times 5+50\times 10)$ ਭਾਵ 540 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 \\ 8\times5+10\times50 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦੁਕਾਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਕਲਮ – ਹਰੇਕ 4 ਰੁਪਏ; ਕਹਾਣੀ ਦੀ ਪੁਸਤਕ –ਹਰੇਕ 40 ਰੁ:

ਹੁਣ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(4 \times 2 + 40 \times 5) =$ ਰੁਪਏ ਅਤੇ $(8 \times 4 + 10 \times 40) = 432$ ਰੁਪਏ ਹੈ।

ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\times2+40\times5 \\ 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

ਹਣ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 & 4\times2+40\times5 \\ 8\times5+10\times50 & 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਗੁਣਨ ਲਈ, A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਗੁਣਨਫਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Product matrix) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ B ਦੇ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ (Element–wise) ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]$ ਇੱਕ $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ $m \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਦਾ (i, k) ਵਾਂ ਤੱਤ c_{ik} ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ B ਦੇ kਵੇਂ ਥੰਮ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ ਅਤੇ B ਦਾ kਵਾਂ ਥੰਮ

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$ ਹੈ, ਤਾਂ $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

ਗੁਣਨਫਲ CD ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ 2×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ C ਦੀ ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੀ D ਦੇ ਕਿਸੇ ਥੰਮ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਚਾਰੋਂ ਗਣਨਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7) + (-1)(1) + 2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2) + 3(-1) + 4(5) & ? \end{bmatrix}$$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7) + 3(1) + 4(-4) \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਜੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਪਰੰਤੂ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ B ਵਿੱਚ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਕਤਾਰਾਂ (3 ਕਤਾਰਾਂ ਨਹੀਂ) ਹਨ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m \times n$ ਅਤੇ $k \times l$ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਜੇਕਰ ਕੇਵਲ $n = k$ ਅਤੇ $l = m$ ਹੋਵੇ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀ ਅਣ-ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ (Non-Commutativity of multiplication of matrices)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ AB = BA ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ $AB \neq BA$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2×2 ਅਤੇ 3×3, ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $AB \neq BA$.

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BA ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $AB \neq BA$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸੋਚ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ। ਪਰੰਤੂ ਅਜਿਹਾ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵੀ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $AB \neq BA$ ਹੈ।

ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ, ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, $AB \neq BA$ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :
>
> ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. ਤਾਂ $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
>
> ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix as the product of two non-zero matrices)

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $ab = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫ਼ਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਵੇ।

3.4.6 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of multiplication of matrices)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦਰਸਾ ਰਹੇ ਹਾਂ।

1. **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (The Associatine law) :** ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ (AB) C = A (BC), ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

2. **ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ (The distributive law)** : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ

   (i) A (B+C) = AB + AC

   (ii) (A+B) C = AC + BC, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

3. **ਗੁਣਨ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (The Existance of multipleatioutive identify):** ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ IA = AI = A

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ

A(BC) ਅਤੇ (AB)C ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਰਸਾਓ ਕਿ (AB)C = A(BC) ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$

$$(AB)\ (C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ, $(AB)\,C = A\,(BC)$

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ AC, BC ਅਤੇ (A + B)C ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(A + B)\,C = AC + BC$

ਹੱਲ : $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ, $(A + B)\,C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ $(A + B)\, C = AC + BC$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^3 - 23A - 40I = O$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $A^3 - 23A - 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਕਿਸੇ ਵਿਧਾਨ ਸਭਾ ਚੋਣਾਂ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਨੇ ਆਪਣੇ ਉਮੀਦਵਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਚਾਰ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਜਨ ਸੰਪਰਕ ਫਰਮ ਨੂੰ ਠੇਕਾ ਦਿੱਤਾ। ਪ੍ਰਚਾਰ ਲਈ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਪਰਕ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋਇਆ। ਇਹ ਹਨ : ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ, ਘਰ ਘਰ ਜਾ ਕੇ ਅਤੇ ਪਰਚਾ ਵਿਤਰਣ ਦੁਆਰਾ। ਹਰੇਕ ਸੰਪਰਕ ਦੀ ਲਾਗਤ (ਪੈਸਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

ਪ੍ਰਤੀ ਸੰਪਰਕ ਲਾਗਤ

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ} \\ \text{ਘਰ ਜਾ ਕੇ} \\ \text{ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ} \end{matrix}$$

X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਪਰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

ਟੈਲੀਫੋਨ ਘਰ ਜਾ ਕੇ ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ

ਦੁਆਰਾ

$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। X ਅਤੇ Y ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਦੋਵਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ 3,40,000 ਪੈਸੇ ਅਤੇ 720,000 ਪੈਸੇ ਭਾਵ 3400 ਰੁ: ਅਤੇ 7200 ਰੁ: ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $3A - C$

   (iv) AB (v) BA

2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗੁਣਨਫ਼ਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ (A+B) ਅਤੇ (B – C) ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $A + (B - C) = (A + B) - C$.

5. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ 3A – 5B ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਸਰਲ ਕਰੋ, $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

7. X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

8. X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

9. x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$

10. ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ x, y, z ਅਤੇ t ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

$$2\begin{bmatrix}x & z\\ y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

11. ਜੇਕਰ $x\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਜੇਕਰ $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x, y, z ਅਤੇ w ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਜੇਕਰ $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $F(x)\,F(y)=F(x+y)$

14. ਦਰਸਾਓ ਕਿ

(i) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $A^2 - 5A + 6I$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

17. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $A^2 = kA - 2I$ ਹੈ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ I ਕ੍ਰਮ 2 ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ

ਕਿ $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

19. ਕਿਸੇ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਦੇ ਕੋਲ 30,000 ਰੁਪਏ ਦਾ ਫੰਡ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡਾਂ (Bonds) ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 5% ਸਲਾਨਾ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 7% ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ 30,000 ਰੁ: ਦੇ ਫੰਡ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ
(i) 1800 ਰੁ: ਹੋਵੇ। (ii) 2000 ਰੁ: ਹੋਵੇ।

20. ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ 10 ਦਰਜਨ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, 8 ਦਰਜਨ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ 10 ਦਰਜਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 80 ਰੁ: ਅਤੇ 60 ਰੁ: ਅਤੇ 40 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੁਸਤਕ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਦੁਕਾਨ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ X, Y, Z, W ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ ਅਤੇ $p \times k$, ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

21. PY + WY ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ n, k ਅਤੇ p 'ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਹੋਣਗੇ।

(A) $k = 3, p = n$ (B) k ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, , $p = 2$

(C) p ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. ਜੇਕਰ $n = p$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $7X - 5Z$ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose of a Matrix)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਜਿਵੇਂ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric Matrix) ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Skew Symmetric Matrix)ਦੇ ਬਾਰੇ ਜਾਣਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਦਾ ਪਰਸਪਰ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ (Interchange) ਕਰਨ ਨਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਨੂੰ A' (ਜਾਂ A^T) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

ਤਾਂ

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ਤੋ $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ ਹੋਵੇ ਤਾਂ } A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ ਹੋਵੇਗਾ।}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of transpose of matrices)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਢੁੱਕਵੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਢੁੱਕਵੇਂ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਲਈ

(i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (ਜਦੋਂ ਕਿ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(A B)' = B' A'$

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$, ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ਇੱਥੇ : $(A')' = A$

(ii) ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(A + B)' = A' + B'$

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

ਤਦ $$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(kB)' = kB'$

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$(AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' = [-2 \ \ 4 \ \ 5], \ B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $(AB)' = B'A'$

3.6 ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਸਮਮਿਤਈ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $A' = A$ ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $A' = A$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $A' = -A$, ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $a_{ji} = -a_{ij}$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $i = j$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ $a_{ii} = -a_{ii}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2a_{ii} = 0$ ਜਾਂ $a_{ii} = 0$ ਹਰੇਕ i ਦੇ ਲਈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $B' = -B$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਵਾਸਤਵਿਕ ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ $A + A'$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $A - A'$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $B = A + A'$ ਤਾਂ

$$B' = (A + A')'$$
$$= A' + (A')' \quad [(\text{ਕਿਉਂਕਿ } (A + B)' = (A' + B')]$$
$$= A' + A \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } (A')' = A)$$
$$= A + A' \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } A + B = B + A)$$
$$= B$$

ਇਸ ਲਈ $B = A + A'$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $C = A - A'$

$$C' = (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$
$$= A' - A \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$
$$= -(A - A') = -C$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $C = A - A'$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(A + A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $(A - A')$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ $(kA)' = kA'$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{1}{2}(A + A')$ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A - A')$ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ
$$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ
$$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $P = \frac{1}{2}(B + B')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ
$$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਤਦ
$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ।

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

3. ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

4. ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $(A + 2B)'$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$, ਜਿੱਥੇ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

(ii) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

7. (i) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

8. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) $(A - A')$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

9. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $\frac{1}{2}(A + A')$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A - A')$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 11 ਅਤੇ 12 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

11. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB – BA ਇੱਕ

(A) ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (B) ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

(C) ਸਿਫਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ (D) ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

12. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $A + A' = I$, ਜੇਕਰ α ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Invertible Matrices)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6. ਜੇਕਰ A, ਕ੍ਰਮ m, ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ AB = BA = I, ਤਾਂ B ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A^{-1} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਨੂੰ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਹੁਣ
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ਨਾਲ ਹੀ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ(Inverse) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $B = A^{-1}$ ਅਤੇ A ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B, ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਭਾਵ $A = B^{-1}$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਕਿਸੇ ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangular) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ AB ਅਤੇ BA ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ।
2. ਜੇਕਰ B, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. [ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ (Uniqueness of inverse)] ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜੇਕਰ ਉਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਕ੍ਰਮ m ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਓ B ਅਤ C ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਦੋ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦਿਖਾਵਾਂਗੇ ਕਿ $B = C$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$AB = BA = I \quad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ C ਵੀ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$AC = CA = I \quad \ldots (2)$$

ਹੁਣ $$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਯੋਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ਸਬੂਤ : ਇੱਕ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$$(AB)(AB)^{-1} = I$$

ਜਾਂ $$A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$$ (A^{-1} ਦਾ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $A^{-1}I = A^{-1}$,)

ਜਾਂ $$IB(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ਜਾਂ $$I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

1. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੋਣਗੇ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA = 0$

(C) $AB = 0, BA = I$ (D) $AB = BA = I$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix},\ n \in \mathbf{N}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $P(n)$: ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$

ਹੁਣ $P(1)$: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਇਸ ਲਈ $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਨਤੀਜਾ $n = 1$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(k)$: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$.

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ $A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ ਭਾਵ AB = BA ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $A' = A$ ਅਤੇ $B' = B$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਤਾਂ $(AB)' = AB$

ਪਰੰਤੂ $(AB)' = B'A' = BA$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $BA = AB$

ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ AB = BA ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

ਹੁਣ $(AB)' = B'A'$

$= BA$ (ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ)

$= AB$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : AB ਸਮਮਿਰਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ D ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ CD – AB = O ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A, B, C ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮ 2, ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ CD – AB ਸੁਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (Well defined) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ D, 2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਤਾਂ CD – AB = O ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$2a + 5c - 3 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$3a + 8c - 43 = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$2b + 5d = 0 \quad \text{... (3)}$$

ਅਤੇ $$3b + 8d - 22 = 0 \qquad \ldots (4)$$

(1) ਅਤੇ (2), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $a = -191$, $c = 77$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਅਤੇ (4), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $b = -110$, $d = 44$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ

1. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB – BA ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B′AB ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।
3. x, y, ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A'A = I$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।
4. x ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ ਹੈ?
5. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^2 - 5A + 7I = O$ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ ਹੈ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ x, y, ਅਤੇ z ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹ ਦੋ ਬਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਚਦਾ ਹੈ। ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਕਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਬਾਜ਼ਾਰ	ਉਤਪਾਦਨ		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) ਜੇਕਰ x, y ਅਤੇ z ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.50 ਰु:, 1.50 ਰु: ਅਤੇ 1.00 ਰु: ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ (Revenue), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ (Cost) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.00 ਰੁ:, 1.00 ਰੁ: ਅਤੇ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਲਾਭ (Gross profit) ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

9. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $A^2 = I$, ਤਾਂ

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

10. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਹੈ ਤਾਂ :

(A) A ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (B) A ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(C) A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

11. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $A^2 = A$, ਤਾਂ $(I + A)^3 - 7A$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਫਲਨਾਂ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਿਵਸਥਾ ਹੈ।
- m ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$, $a_{ij} = k$, (k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ), ਜਦੋਂ $i = j$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੇਕਰ $a_{ij} = 1$ ਜਦੋਂ $i = j$ ਅਤੇ $a_{ij} = 0$ ਜਦੋਂ $i \neq j$ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ ਜੇਕਰ (i) A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ (ii) i ਅਤੇ j ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।

- $k\text{A} = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- $-\text{A} = (-1)\text{A}$
- $\text{A} - \text{B} = \text{A} + (-1)\,\text{B}$
- $\text{A} + \text{B} = \text{B} + \text{A}$
- $(\text{A} + \text{B}) + \text{C} = \text{A} + (\text{B} + \text{C})$, ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।
- $k(\text{A} + \text{B}) = k\text{A} + k\text{B}$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ।
- $(k + l)\,\text{A} = k\text{A} + l\text{A}$, ਜਿੱਥੇ k ਅਤੇ l ਅਚੱਲ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ $\text{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਅਤੇ $\text{B} = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਤਾਂ $\text{AB} = \text{C} = [c_{ik}]_{m \times p}$, ਜਿੱਥੇ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$ ਹੈ।
- (i) $\text{A(BC)} = \text{(AB)C}$, (ii) $\text{A(B + C)} = \text{AB} + \text{AC}$, (iii) $\text{(A + B)C} = \text{AC} + \text{BC}$
- ਜੇਕਰ $\text{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਤਾਂ A' ਜਾਂ $\text{A}^{\text{T}} = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(\text{A}')' = \text{A}$ (ii) $(k\text{A})' = k\text{A}'$ (iii) $(\text{A} + \text{B})' = \text{A}' + \text{B}'$ (iv) $(\text{AB})' = \text{B}'\text{A}'$
- ਜੇਕਰ $\text{A}' = \text{A}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ $\text{A}' = -\text{A}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਨ ਕਿ $\text{AB} = \text{BA} = \text{I}$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ A^{-1} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ A ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 4

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinants)

❖ *All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

P.S. Laplace
(1749-1827)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ਨੂੰ $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ (Unique) ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਨੂੰ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ਸੰਖਿਆ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਜਾਂ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਸੰਖਿਆ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ **ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਜਾਂ det A** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਵਰਤੋਂ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਤੱਕ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ, ਲਘੂ (MINORS) ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Cofacters) ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਜ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ, ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਗਤੀ (Consistency) ਅਤੇ ਅਸੰਗਤੀ

(Inconsistency) ਅਤੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

4.2 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant)

ਅਸੀਂ n ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦੁਆਰਾ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ a_{ij} A ij ਵਾਂ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ M ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, k ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $f: M \to K$, $f(A) = k$, ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $A \in M$ ਅਤੇ $k \in K$ ਤਾਂ $f(A)$, A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $|A|$ ਜਾਂ det A ਜਾਂ Δ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ, $|A|$ ਨੂੰ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।
(ii) ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

4.2.1 *ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant of a matrix of order one)*

ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a]$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ a ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $|A| = a$

4.2.2 *ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant of a matrix of order two)*

ਮੰਨਿਆ 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

4.2.3 *ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant of a matrix of order Three)*

ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਇੱਕ ਥੰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਛੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਿੰਨੋ ਕਤਾਰਾਂ (R_1, R_2 ਅਤੇ R_3) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਤੇ ਤਿੰਨੋ ਥੰਮਾ (C_1, C_2 ਅਤੇ C_3) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਸਮਾਨ ਨਤੀਜਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿੱਥੇ $\quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 1. R_1 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅੰਸ਼ a_{11} ਨੂੰ $(-1)^{(1+1)}$ ਭਾਵ $\left[(-1)^{a_{11} \text{ ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}\right]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ (C_1) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰੋ ਕਿਉਂਕਿ a_{11}, R_1 ਅਤੇ C_1 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ :

ਭਾਵ $\quad (-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਪਗ 2. ਕਿਉਂਕਿ a_{12}, R_1 ਅਤੇ C_2 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ R_1 ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ a_{12} ਨੂੰ $(-1)^{1+2}$ ਭਾਵ $[(-1)^{a_{12} \text{ ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ (C_2) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਅਰਥਾਤ $\quad (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਪਗ 3. ਕਿਉਂਕਿ a_{13}, R_1 ਅਤੇ C_3 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ R_1 ਦੇ ਤੀਜੇ ਤੱਤ ਨੂੰ $(-1)^{1+3}$ ਭਾਵ ਭਾਵ$[(-1)^{a_{13} \text{ ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ (C_3) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਭਾਵ $$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 4. ਹੁਣ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਭਾਵ | A | ਦੇ ਪਸਾਰ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪਗ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋ ਪਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਲਿਖੋ ਭਾਵ

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਜਾਂ
$$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \ldots (1)$$

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਚਾਰੋਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ (R_2) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}) - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12})$$

$$|A| = - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{22} a_{11} a_{33} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{23} a_{11} a_{32} + a_{23} a_{31} a_{12}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \ldots (2)$$

ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ (C_1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1, ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}$$
$$- a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$- a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $|A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਹ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਕਿ $|A|$ ਦਾ R_3, C_2 ਅਤੇ C_3 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਗਣਨਾ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਉਸ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਸਾਰਣ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ $(-1)^{i+j}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $(i+j)$ ਦੇ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $+1$ ਜਾਂ -1 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ $A = 2B$. ਪਰੰਤੂ $|A| = 0 - 8 = -8$ ਅਤੇ $|B| = 0 - 2 = -2$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ ਜਾਂ $|A| = 2^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 2$, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $A = kB$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ n ਹੈ, ਤਦ $|A| = k^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 1, 2, 3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਦੋ ਇੰਦਰਾਜ ਸਿਫਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤੀਜੇ ਥੰਮ (C_3) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

ਭਾਵ $3 - x^2 = 3 - 8$

ਭਾਵ $x^2 = 8$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = \pm 2\sqrt{2}$

ਅਭਿਆਸ 4.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

3. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|2A| = 4|A|$

4. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|3A| = 27|A|$

5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$, ਹੈ, ਤਾਂ $|A|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. x ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 6 (B) ± 6 (C) – 6 (D) 0

4.3 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of a Triangle)

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3), ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਹੁਣ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \dots (1)$$

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਕਿਉਂਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ (1) ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ (absolute value) ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

(iii) ਤਿੰਨ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (3, 8), (– 4, 2) ਅਤੇ (5, 1) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ (3+72-14) = \frac{61}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ A(1, 3) ਅਤੇ B (0, 0) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D(k, 0) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ AB ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਹੈ ਤਦ Δ ABP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 0 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ
$$\frac{1}{2}(y - 3x) = 0 \text{ ਜਾਂ } y = 3x$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ AB ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ } \frac{-3k}{2} = \pm 3, \text{ i.e., } k \neq 2$$

ਅਭਿਆਸ 4.2

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ ਅਤੇ C $(c, a + b)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

3. ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(i) $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), $(0, k)$

4. (i) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (1, 2) ਅਤੇ (3, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (3, 1) ਅਤੇ (9, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਸਿਖਰ (2, –6), (5, 4) ਅਤੇ $(k, 4)$ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 35 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 12 (B) –2

(C) –12, –2 (D) 12, –2

4.4 ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Minor and Co-factor)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਘੂ (Minor) ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨ ਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਲਿਖਣਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੈ ਜੋ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ j ਵੇਂ ਥੰਮ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤੱਤ a_{ij} ਸਥਿਤ ਹੈ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੱਤ a_{ij} ਦੇ ਲਘੂਆਂ ਨੂੰ M_{ij} ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : $n(n \geq 2)$ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ ਦਾ ਲਘੂ $n - 1$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ਵਿੱਚ ਤੱਤ 6 ਦਾ ਲਘੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ 6 ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਦਾ ਲਘੂ = M_{23} ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ (Δ ਵਿੱਚੋਂ R_2 ਅਤੇ C_3 ਹਟਾਉਣ 'ਤੇ)}$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਇੱਕ ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜਿਸ ਨੂੰ A_{ij} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ M_{ij} ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ M_{ij} ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $a_{11} = 1$, ਇਸ ਲਈ $M_{11} = a_{11}$ ਦਾ ਲਘੂ $= 3$

M_{12} = ਤੱਤ a_{12} ਦਾ ਲਘੂ $= 4$

M_{21} = ਤੱਤ a_{21} ਦਾ ਲਘੂ $= -2$

M_{22} = ਤੱਤ a_{22} ਦਾ ਲਘੂ $= 1$

ਹੁਣ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ a_{11} ਅਤੇ a_{21} ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

a_{11} ਦਾ ਲਘੂ $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

a_{11} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

a_{21} ਦਾ ਲਘੂ $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}$

a_{21} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\ (a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) = -\,a_{12}\,a_{33} + a_{13}$
a_{32}

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਹਾਰਣ 21 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਦਾ R_1 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13}$, ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ।

$= R_1$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ Δ ਦਾ R_2, R_3, C_1, C_2 ਅਤੇ C_3 ਦੇ ਸਾਪੇਖ 5 ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਕੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ, ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = a_{11}\,A_{21} + a_{12}\,A_{22} + a_{13}\,A_{23}$ ਤਦ

$$\Delta = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ (\text{ਕਿਉਂਕਿ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_2 \text{ ਬਰਾਬਰ ਹਨ})$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਲਈ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$; ਇਸ ਲਈ $A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46$; ਇਸ ਲਈ $A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30$; ਇਸ ਲਈ $A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4$; ਇਸ ਲਈ $A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19$; ਇਸ ਲਈ $A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$; ਇਸ ਲਈ $A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12$; ਇਸ ਲਈ $A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22$; ਇਸ ਲਈ $A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18$; ਇਸ ਲਈ $A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$

ਹੁਣ $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5$; ਅਤੇ $A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

ਅਭਿਆਸ 4.3

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੇਂਟ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੋ।

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਅਤੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੋਵੇ ਤਾਂ Δ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

(A) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

4.5 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਨ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (Adjoint and Inverse of a Matrix)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਵੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਾਂਗੇ।

A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

4.5.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (Adjoint of a matrix)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3: ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $[A_{ij}]$ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ A_{ij}, ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਨੂੰ *adj* A ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

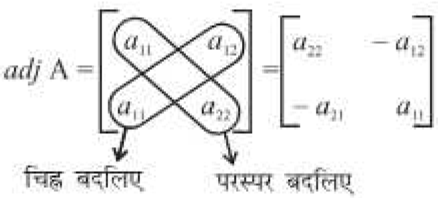
ਤਦ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ਟਿੱਪਣੀ : 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ $adj\ A$, a_{11} ਅਤੇ a_{22} ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਅਤੇ a_{12} ਅਤੇ a_{21} ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦੇਣ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਥਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਜੇਕਰ A ਕੋਈ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$, ਜਿੱਥੇ I, n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ ਹੈ ਤਦ } adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $|A|$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A\,(adj\,A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\,A)\,A = |A|\,I$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ। (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4: ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿਚਿੱਤਰ (singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ (non-singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$
ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਕਥਿਤ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਵੀ ਉਸੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $|AB| = |A|\,|B|$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\,A)\,A = |A|\,I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੈਣ 'ਤੇ

$$|(adj\,A)\,A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)| = |A|^2$$ (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|adj\,A| = |A|^{n-1}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੈ ਅਤੇ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਹੈ। ਤਦ n ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ AB = BA = I

ਹੁਣ AB = I ਹੈ ਤਾਂ $|AB| = |I|$ ਜਾਂ $|A|\,|B| = 1$ (ਕਿਉਂਕਿ $|I| = 1$, $|AB| = |A|\,|B|$)
ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $|A| \neq 0$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।
ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਓ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਤਦ $|A| \neq 0$

ਹੁਣ $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 1)

ਜਾਂ $$A\left(\frac{1}{|A|}adj\,A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\,A\right)A = I$$

ਜਾਂ $$AB = BA = I,\ \text{ਜਿੱਥੇ}\ B = \frac{1}{|A|}adj\,A$$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\,A$ (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A.\ adj\,A = |A|.\,I$ ਅਤੇ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|A| = 1\,(16-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4) = 1 \neq 0$

ਹੁਣ $A_{11} = 7$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

ਇਸ ਲਈ $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3\\7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3\\7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = |A|\,.\,I$$

ਅਤੇ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\,A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -4\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $AB = \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\5 & -14\end{bmatrix}$

ਕਿਉਂਕਿ $|AB| = -11 \neq 0$, $(AB)^{-1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}.adj\,(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-14 & -5\\-5 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}14 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $|A| = -11 \neq 0$ ਅਤੇ $|B| = 1 \neq 0$. ਇਸ ਲਈ A^{-1} ਅਤੇ B^{-1} ਦੋਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-14 & -5\\-5 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}14 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A^2-4A+I=O$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ I, 2 × 2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O, 2 × 2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A^2-4A+I=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 12\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$

ਹੁਣ $A^2-4A+I=O$

ਇਸ ਲਈ $AA-4A=-I$

ਜਾਂ $A\,A(A^{-1})-4\,AA^{-1}=-I\,A^{-1}$ (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ A^{-1} ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਉਂਕਿ $|A|\neq 0$)

ਜਾਂ $A(AA^{-1})-4I=-A^{-1}$

ਜਾਂ $AI-4I=-A^{-1}$

ਜਾਂ $A^{-1}=4I-A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

ਅਭਿਆਸ 4.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (adjoint) ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A(adj\,A)=(adj\,A).A=|A|.I$ ਹੈ।

3. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -4 & -6\end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਤੋਂ 11 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ)ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ਹੈ।

13. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^2 - 5A + 7I = O$ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ a ਅਤੇ b ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ

$A^2 + aA + bI = O$ ਹੋਵੇ।

15. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ

ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਜੇਕਰ A, 3 × 3 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|adj\, A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. ਜੇਕਰ A, ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $\det (A^{-1})$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\det (A)$ (B) $\dfrac{1}{\det (A)}$ (C) 1 (D) 0

4.6 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (Applications of Determinants and Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਅਤੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸੰਗਤਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ) ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

4.6.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੁਆਰਾ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ (Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix)*

ਆਓ ਅਸੀਂ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

ਮੰਨ ਲਓ $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ AX = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ਸਥਿਤੀ 1. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਭਾਵ $|A| \neq 0$ ਤਦ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AX = B$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1} \text{ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad (\text{ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$IX = A^{-1}B$$

ਜਾਂ $$X = A^{-1}B$$

ਇਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ $|A| = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $(adj\, A)\, B$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(adj\, A)\, B \neq O$, (O ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ), ਤਦ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $(adj\, A)\, B = O$, ਤਦ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਨੰਤ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = -11 \neq 0$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 3, y = -1$$

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ AX = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

ਇਸ ਲਈ $A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $x = 1, y = 2$ ਤੇ $z = 3$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z, ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਤਦ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x + y + z = 6$$
$$y + 3z = 11$$
$$x + z = 2y$$

ਜਾਂ $$x - 2y + z = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ A X = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $|\mathrm{A}| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ *adj* A ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\mathrm{A}_{11} = 1\,(1 + 6) = 7, \quad \mathrm{A}_{12} = -\,(0 - 3) = 3, \quad \mathrm{A}_{13} = -\,1$$
$$\mathrm{A}_{21} = -\,(1 + 2) = -\,3, \quad \mathrm{A}_{22} = 0, \quad \mathrm{A}_{23} = -\,(-\,2 - 1) = 3$$
$$\mathrm{A}_{31} = (3 - 1) = 2, \quad \mathrm{A}_{32} = -\,(3 - 0) = -\,3, \quad \mathrm{A}_{33} = (1 - 0) = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $adj\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\ adj.\ (\mathrm{A}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ $$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{X} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42 - 33 + 0 \\ 18 + 0 + 0 \\ -6 + 33 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 1, y = 2, z = 3$$

ਅਭਿਆਸ 4.5

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਣ ਕਰੋ।

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ। A^{-1} ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$

16. 4 kg ਪਿਆਜ, 3 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 2 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ Rs 60 ਹੈ। 2 kg ਪਿਆਜ, 4 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 6 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 90 ਰु: ਹੈ। 6kg ਪਿਆਜ, 2 kg ਅਤੇ 3 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 70 ਰु: ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀ kg ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (Miscellancous Examples)

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0, y = 5$ ਅਤੇ $z = 3$

ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੈ।

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਜੇਕਰ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $(AB)^{-1}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 8 ਤੋਂ 9 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

8. ਜੇਕਰ x, y, z ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ :

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\dfrac{1}{xyz} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\dfrac{1}{xyz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le \theta \le 2\pi$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ :

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{11}]_{1\times1}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|a_{11}|_{1\times1} = a_{11}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ(R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ 'ਤੇ)

  ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ, |A| ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਸਿਖਰਾਂ ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਅੰਸ਼ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ, i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ j ਵਾਂ ਥੰਮ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ M_{ij} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ

  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$
- ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਹਿਖੰਡਨ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, ਜਿੱਥੇ A, n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਵਿਚਿੱਤਰ ਜਾਂ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਜਾਂ $|A| \neq 0$
- ਜੇਕਰ $AB = BA = I$, ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $A^{-1} = B$ ਜਾਂ $B^{-1} = A$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\, A)$
- ਜੇਕਰ $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$
  ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

  ਜਿੱਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ **ਅਤੇ** $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$
- ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ $X = A^{-1} B$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $|A| \neq 0$
- ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ

  (i) ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$, ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

  (ii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B \neq O$, ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  (iii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B = O$, ਤਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਗਣਨਾ ਬੋਰਡ ਤੇ ਛੜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੀ ਚੀਨੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਵਿਲੱਖਣ ਦੀ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਛੜਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਵਰਗੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਜਾਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਚੀਨੀ ਪਹਿਲੇ ਵਿਚਾਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸਨ ('Mikami, China, pp 30, 93).

ਸਤਾਰਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮਹਾਨ ਜਪਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰ Seki Kowa ਦੁਆਰਾ 1683 ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਤ ਪੁਸਤਕ 'Kai Fukudai no Ho' ਨਾਲ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਪਸਾਰ ਦਾ ਗਿਆਨ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਪ੍ਰੰਤੂ ਯੁਗਮਤ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। 'T. Hayashi, "The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics," in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਸਵਤੰਤਰ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ , ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸੰਸਥਾਪਕ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Laplace

(1772) ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਪੂਰਕ ਲਘੂਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਸਾਰਣ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਵਿਧੀ ਦਿੱਤੀ। 1773 ਵਿੱਚ Lagrange ਨੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰਿਆ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। 1801 ਵਿੱਚ Gauss ਨੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ।

ਅਗਲੇ ਮਹਾਨ ਯੋਗਦਾਨ ਦੇਣ ਵਾਲੇ Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) ਸੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ m-ਥੰਮਾ ਅਤੇ n-ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ $m = n$ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਸੇ ਦਿਨ Cauchy (1812) ਨੇ ਵੀ ਉਸੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੇ ਖੋਜ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਅੱਜ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ Binet ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤਾ।

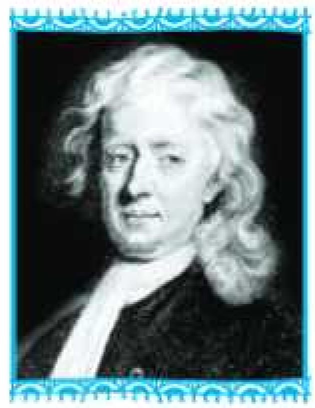
ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾ ਤੇ ਮਹਾਨਤਮ ਯੋਗਦਾਨ ਵਾਲੇ Carl Gustav Jacob Jacobi ਸੀ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਨੂੰ ਅੰਤਿਮ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।

ਅਧਿਆਇ 5

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (Continuity and Differentiability)

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



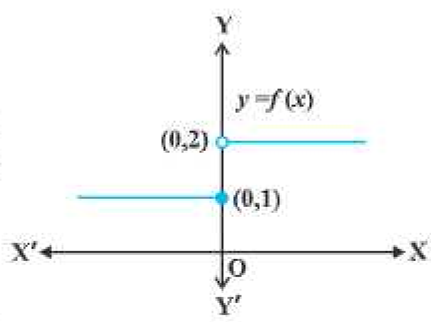
Sir Issac Newton
(1642-1727)

ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਜਮਾਤ 11 ਵਿੱਚ ਪਏ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਸ਼ਨ (differentiation) ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuity), ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (differentiability) ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ (inverse trigonometric) ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਨਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ (exponential) ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਕ (logarithmic) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀਆਂ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਅਲ ਕੇਲਕੁਲਸ (differential calculus) ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਰੂਪ ਤੋਂ (ਸਪਸ਼ਟ)(obvious) ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (theorems) ਨੂੰ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

5.2 ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity)

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਣਾ ਦਾ ਕੁਝ ਅਨੁਮਾਨ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦੋ ਗੈਰ ਰਸਮੀ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ਜੇਕਰ } x \leq 0 \\ 2, \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$



ਚਿੱਤਰ 5.1

ਇਹ ਫਲਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ (real line) ਦੇ

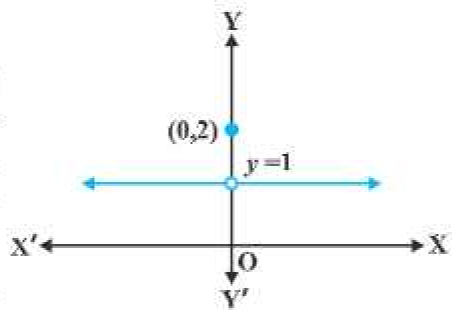
ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੋਈ ਵੀ ਇਸ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਤੱਤ ਕੱਢ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੋਰ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੀਮਤਾਂ ਵੀ $x = 0$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੱਗਭੱਗ ਸਮਾਨ ਹਨ। 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਬਿੰਦੂ ਉਹ ਹੈ ਭਾਵ $-0.1, -0.01, -0.001$. ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ ਅਤੇ 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ 0.1, 0.01. 0.001, ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੈ। ਸੱਜਾ ਅਤੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (limits) ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ (ਸੰਪਾਤੀ) ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। (ਬਰਾਬਰ ਹੈ)। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਦਾ ਮਾਨ ਭਾਵ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਚੁੱਕੇ, ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਕਲਮ ਨੂੰ ਚੁੱਕਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਜ਼ੀਰੋ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸਿਉਂ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਣ ਲਈ) ਆਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 2, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਇਹ ਅਲੇਖ ਵੀ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $x = 0$ ਤੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ, ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਹੈ, ਜੋ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੀ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਸ-ਪਾਸ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਬਿਨਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ (precisely), ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਮੰਨ ਲਉ f ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਿਸੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ c ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਾਂ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ ਹੈ।}$$

ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੀ ਜੇਕਰ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ $x = c$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ

ਕਿ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵੀ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਤੇ f ਟੁੱਟਵਾਂ (discontinuous) ਹੈ ਅਤੇ c ਨੂੰ f ਦਾ ਇੱਕ ਟੁੱਟ ਬਿੰਦੂ (point of discontinuity) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x + 3$ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਖ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਫਲਨ, $x = 1$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 5 ਹੈ। ਹੁਣ ਫਲਨ ਦੀ $x = 1$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^2$. $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 0 ਹੈ। ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = |x|$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$$

ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $f(0) = 0$ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0$ ਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਫਲਨ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ। ਜਦੋਂ $x \neq 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ f ਦੀ ਸੀਮਾ, $f(0)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = k$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ k ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ $f(c) = k = \lim_{x \to c} f(x)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਤੱਤਸਮਕ ਫਲਨ (Identity function) $f(x) = x$, ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਹੈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ $f(c) = c$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ, ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :2. ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ f ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ $[a, b]$ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ (end points) a ਅਤੇ b ਸਹਿਤ ਉਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ।

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ਅਤੇ f ਦਾ b ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

ਦੇਖੋ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x \to b^+} f(x)$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ, ਜੇਕਰ f ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ f ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਇੱਕ ਤੱਤੀ (Singleton) ਹੈ, ਤਾਂ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਕੀ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ?

ਹੱਲ : f ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$f(c) = -c$$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (-x) = -c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. ਹੈ, f ਸਾਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f(c) = c$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, ਇਸ ਲਈ f ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ f ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਫਲਨ $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ c ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ $c^3 + c^2 - 1$ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

ਇਸ ਲਈ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਕਿ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਨੂੰ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ :

ਹੁਣ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ $c \neq 0$, ਇਸ ਲਈ, $f(c) = \frac{1}{c}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਮੌਕੇ ਦਾ ਲਾਭ, ਅਨੰਤਤਾ (infinity) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਚੁੱਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ $x = 0$ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਮਾਨਾਂ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਰੂਰੀ : ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 5. 1)

ਸਾਰਣੀ 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ- ਜਿਵੇਂ x ਸੱਜੇ ਤੋਂ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਉੱਪਰ ਨੂੰ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ।)। ਇੱਥੇ $+\infty$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਾਰਨੀ ਨਾਲ ਵਿਸਤਰਿਤ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

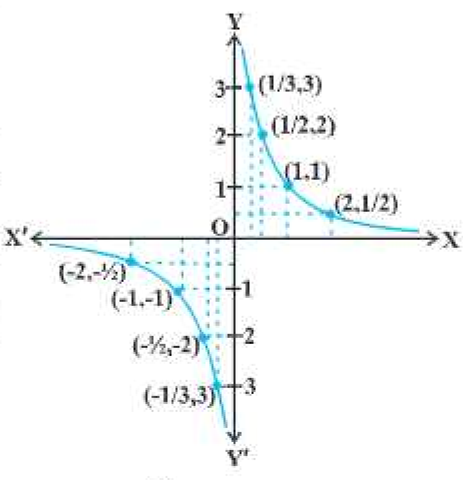
ਸਾਰਣੀ 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

ਸਾਰਨੀ 5.2 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।}$$

(ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $-\infty$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)। ਚਿੱਤਰ 5.3 ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਪ੍ਰਗਟਾਉਣਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.3

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x \le 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਫਲਨ f ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. ਜਦੋਂ $c < 1$, ਤੋਂ $f(c) = c + 2$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x + 2 = c + 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 2. ਜੇਕਰ $c > 1$, ਤਾਂ $f(c) = c - 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x - 2) = c - 2 = f(c)$ ਹੈ।

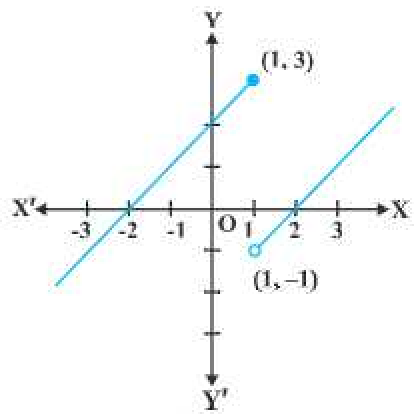
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਜਿੱਥੇ $x > 1$ ਹੈ, f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 3. ਜੇਕਰ $c = 1$, ਤਾਂ $x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$ ਹੈ।

$x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-2) = 1-2 = -1 \text{ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



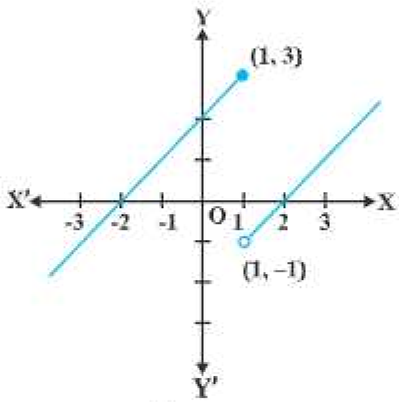
ਚਿੱਤਰ 5.4

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਨਿਮਨ ਲਿਖਿਤ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 1 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਪਿਛਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $x \ne 1$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$ ਹੈ।
$x = 1$ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-2) = 1-2 = -1$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ : $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਦਾ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



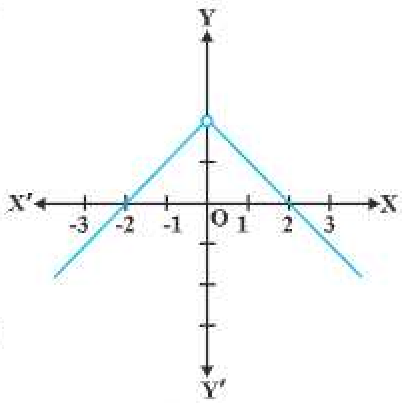
ਚਿੱਤਰ 5.5

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ -x + 2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ 0 ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ

$D_1 \cup D_2$ ਹੈ ਇੱਥੇ $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ ਅਤੇ
$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ ਹੈ।

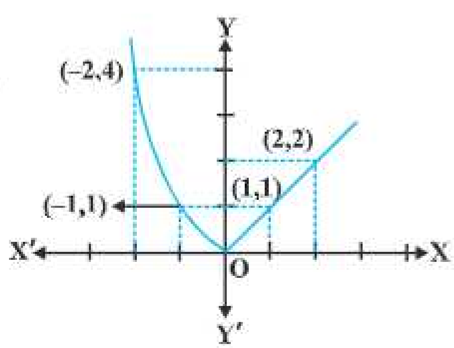


ਚਿੱਤਰ 5.6

ਸੂਰਤ : 1. ਜੇਕਰ $c \in D_1$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x + 2) = c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ D_1 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ।

ਸੂਰਤ:2. ਜੇਕਰ $c \in D_2$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (-x + 2) = -c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ D_2 ਵਿੱਚ ਵੀ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.6 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਉਠਾਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਉਹ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਾ ਜੁੜੇ ਉੱਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਲਿਆ ਜਾਵੇ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ :

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ ਅਤੇ

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. D_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x^2$ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ D_1 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ (ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 2. D_3 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ D_3 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 3. ਅਸੀਂ ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। 0 ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(0) = 0$ ਹੈ। 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \text{ ਹੈ ਅਤੇ}$$

0 ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

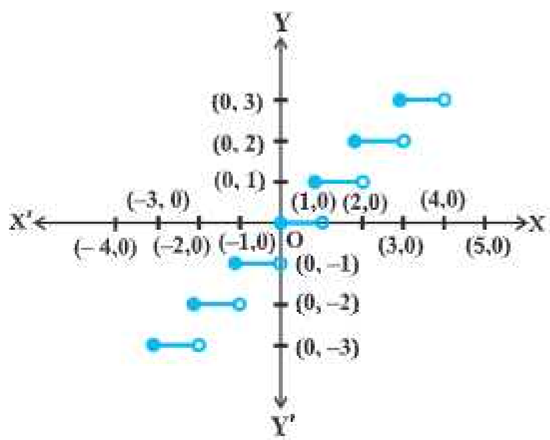
ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ : f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ p, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਿਰਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $a_i \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ c ਤੇ p ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ c ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ p ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ p ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $f(x) = [x]$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੁੱਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ x ਦੇ ਘੱਟ ਜਾਂ ਉਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ f ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਅਜਿਹਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ x ਦੇ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ। ਥੱਲੇ ਅਸੀਂ ਛਾਣਬੀਣ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸੂਰਤ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ c ਦੇ ਨੇੜੇ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $[c]$ ਹੈ, ਭਾਵ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} [x] = [c]$ ਨਾਲ ਹੀ $f(c) = [c]$, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ, ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਸੂਰਤ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਛੋਟੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $r > 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ $[c - r] = c - 1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $[c + r] = c$ ਹੈ।

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = c - 1 \text{ ਅਤੇ } \lim_{x \to c^+} f(x) = c$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਇਹ ਸੀਮਾਵਾਂ c ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ x ਸਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ।

5.2.1 *ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Algebra of continuous functions)*

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਸੀਮਾ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਮਝਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁਝ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤਰਕਸ਼ੀਲ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਬੀਜਿਕ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅਤੇ g ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ। ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

(1) $f + g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(2) $f - g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(3) $f . g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਜਦੋਂ ਕਿ $g(c) \neq 0$ ਹੈ।)

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ $x = c$ ਤੇ $(f+g)$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \qquad (f+g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad (\text{ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= f(c) + g(c) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } f \text{ ਅਤੇ } g \text{ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ})$$

$$= (f+g)(c) \qquad (f+g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਲਈ, $f+g$ ਵੀ $x = c$ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸਬੂਤ 1 ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (3) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ λ, ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $(\lambda \,.\, g)(x) = \lambda \,.\, g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $(\lambda \,.\, g)$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $\lambda = -1$, ਤਾਂ f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੋਂ ਹੀ $-f$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਿਖਦੀ ਹੈ।

(ii) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (4) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$, ਤਾਂ $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $\frac{\lambda}{g}$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, g ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ $\frac{1}{g}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਅਨੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੱਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ f ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\ q(x) \neq 0$$

ਇੱਥੇ p ਅਤੇ q ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ। f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ q ਦਾ ਮਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਨ 14), ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੇ ਭਾਗ (4) ਦੁਆਰਾ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. sine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਪਰ sine ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੇਖ ਕੇ ਇਹ ਤੱਥ ਆਪੇ ਹੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦੇਖੋ ਕਿ $f(x) = \sin x$ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $x = c + h$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਜੇਕਰ $x \to c$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $h \to 0$ ਇਸ ਲਈ

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \sin x \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(c + h) \\ &= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h] \\ &= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \sin h] \\ &= \sin c + 0 = \sin c = f(c)\end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ cosine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan x$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\cos x \neq 0$, ਭਾਵ $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ, x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition) ਦੇ ਸੰਬੰਧਿਤ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵਿਹਾਰ ਇੱਕ ਦਿਲਚਸਪ ਤੱਤ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ f ਅਤੇ g ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ ਹੈ।}$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ g ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਅਕਤ), ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅਤੇ g ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਵਾਲੇ (real valued) ਫਲਨ ਹਨ ਕਿ c ਤੇ $(f \circ g)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ c ਤੇ g ਅਤੇ $g(c)$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ c ਤੇ $(f \circ g)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $f(x) = \sin(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਫਲਨ f ਨੂੰ, g ਅਤੇ h ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ $(g \circ h)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) = \sin x$ ਅਤੇ $h(x) = x^2$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ g ਅਤੇ h ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x) = |1 - x + |x||$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f, ਜਿੱਥੇ x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਦੇ ਲਈ g ਨੂੰ $g(x) = 1 - x + |x|$ ਅਤੇ h ਨੂੰ $h(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਤਾਂ

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= h(g(x))\\ &= h(1 - x + |x|)\\ &= |1 - x + |x|| = f(x)\end{aligned}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ h ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਣ ਕਾਰਨ g ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨ ਹੋਣ ਕਾਰਨ f ਵੀ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
2. $x = 3$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x^2 - 1$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

(c) $f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}, x\neq -5$ (d) $f(x)=|x-5|$

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)=x^n$, $x=n$, ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਕੀ $f(x)=\begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq 1 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } x>1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f

$x=0$, $x=1$, ਅਤੇ $x=2$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ?

f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

6. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq 2 \\ 2x-3, \text{ ਜੇਕਰ } x>2 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} |x|+3, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq -3 \\ -2x, \text{ ਜੇਕਰ } -3<x<3 \\ 6x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x\geq 3 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{ ਜੇਕਰ } x\neq 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x=0 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}, \text{ ਜੇਕਰ } x<0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x\geq 0 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ ਜੇਕਰ } x\geq 1 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x<1 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x^3-3, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq 2 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x>2 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x^{10}-1, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq 1 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x>1 \end{cases}$

13. ਕਿ $f(x)=\begin{cases} x+5, \text{ ਜੇਕਰ } x\leq 1 \\ x-5, \text{ ਜੇਕਰ } x>1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ?

ਫਲਨ f, ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇੱਥੇ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ?

14. $f(x)=\begin{cases} 3, \text{ ਜੇਕਰ } 0\leq x\leq 1 \\ 4, \text{ ਜੇਕਰ } 1<x<3 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } 3\leq x\leq 10 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ ਜੇਕਰ } x<0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } 0\leq x\leq 1 \\ 4x, \text{ ਜੇਕਰ } x>1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ ਜੇਕਰ } x \le -1 \\ 2x, \text{ ਜੇਕਰ } -1 < x \le 1 \\ 2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

17. a ਅਤੇ b ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, \text{ ਜੇਕਰ } x \le 3 \\ bx + 3, \text{ ਜੇਕਰ } x > 3 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 3$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

18. λ ਦੀ ਕਿਸੀ ਕੀਮਤ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda (x^2 - 2x), \text{ ਜੇਕਰ } x \le 0 \\ 4x + 1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

19. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $g(x) = x - [x]$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਣ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ x ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ x ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

20. ਕੀ $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = \pi$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ?

21. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \,.\, \cos x$

22. cosine, cosecant, secant ਅਤੇ cotangent ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

23. f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x + 1, \text{ ਜੇਕਰ } x \ge 0 \end{cases}$$

24. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ ਜੇਕਰ } x \ne 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

25. f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq 0\\ -1, & \text{ਜੇਕਰ } x=0\end{cases}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 26 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ k ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ Indicated ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ।

26. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=\dfrac{\pi}{2}$ ਤੇ

27. $f(x)=\begin{cases}kx^2, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x>2\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=2$ ਤੇ

28. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq\pi\\ \cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x>\pi\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=\pi$ ਤੇ

29. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 5\\ 3x-5, & \text{ਜੇਕਰ } x>5\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=5$ ਤੇ

30. a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

$$f(x)=\begin{cases}5, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ ax+b, & \text{ਜੇਕਰ } 2<x<10\\ 21, & \text{ਜੇਕਰ } x\geq 10\end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

31. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x)=\cos(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

32. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x)=|\cos x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

33. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ $\sin|x|$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

34. $f(x)=|x|-|x+1|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.3. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਿਏਬਿਲਟੀ (Differentiability)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਸਿਖਾਏ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਸਮਰਣ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ (Derivative) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ c ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। c ਦਾ f ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਤੇ f ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ $f'(c)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ, f ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। f ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ $f'(x)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਤੇ ਜੇਕਰ $y=f(x)$ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}$ ਜਾਂ y' ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "x ਦੇ ਬਾਬਤ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ" ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (ਲੈਬਨੀਜ ਜਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, ਜਿੱਥੇ $v \neq 0$ (ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਾਰਨੀ ਦੇ ਕੁਝ ਮਿਆਰੀ (standard) ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸੁਝਾਅ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।" ਹੁਣ ਸੁਭਾਵਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬਿਲਕੁਲ ਢੁੱਕਵਾਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਵੀ। ਜੇਕਰ $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੇ

ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਫਲਨ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਅਤੇ $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ a ਅਤੇ b ਤੇ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ a ਅਤੇ b ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੇਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. ਜੇਕਰ ਫਲਨ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

ਪਰ $x \neq c$ ਦੇ ਲਈ

$$f(x)-f(c)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.(x-c)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.(x-c)\right]$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x\to c}[f(x)]-\lim_{x\to c}[f(c)]=\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right].\lim_{x\to c}[(x-c)]$$
$$=f'(c)\ .\ 0=0$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਪ ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ (converse) ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ

ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ 0 ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 0 ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5.3.1 ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (*Differentials of composite functions*)

ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਦੁਆਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ f ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ $(2x + 1)^3$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥੱਲੇ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right] \\ &= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) \\ &= 24x^2 + 24x + 6 \\ &= 6\,(2x + 1)^2\end{aligned}$$

ਹੁਣ, ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$f(x) = (h \circ g)\,(x)$$

ਇੱਥੇ $g(x) = 2x + 1$ ਅਤੇ $h(x) = x^3$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $t = g(x) = 2x + 1$. ਤਾਂ $f(x) = h(t) = t^3$.

ਇਸ ਲਈ : $\frac{df}{dx} = 6\,(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

ਇਸ ਦੂਸਰੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਲਾਭ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x + 1)^{100}$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਲੜੀ ਨਿਯਮ (chain rule) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. (ਲੜੀ ਨਿਯਮ) ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ u ਅਤੇ v ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ; ਭਾਵ $f = v \text{ o } u$. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = u(x)$ ਅਤੇ, ਜੇਕਰ $\frac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{dv}{dt}$ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨ ਫਲਨ u, v ਅਤੇ w ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ, ਭਾਵ

$f = (w \text{ o } u) \text{ o } v$ ਹੈ, ਜੇਕਰ $t = u(x)$ ਅਤੇ $s = v(t)$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}(w \text{o} u) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਠਕ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਸੂਤਰਬੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $f(x) = \sin (x^2)$ ਦਾ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $u(x) = x^2$ ਅਤੇ $v(t) = \sin t$ ਹੈ ਤਾਂ

$$f(x) = (v \text{ o } u)\ (x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\frac{dv}{dt} = \cos t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2x$ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \,.\, 2x$$

ਸਧਾਰਨ ਅਭਿਆਸ ਨਾਲ ਅਖੀਰਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ x ਦੇ ਪਦਾਂ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦਾ ਰਿਵਾਜ਼ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

ਅਭਿਆਸ 5.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 8 ਵਿੱਚ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\sin (x^2 + 5)$
2. $\cos (\sin x)$
3. $\sin (ax + b)$
4. $\sec (\tan (\sqrt{x}))$
5. $\dfrac{\sin (ax + b)}{\cos (cx + d)}$
6. $\cos x^3 \,.\, \sin^2 (x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ 8. $\cos(\sqrt{x})$

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbf{R}, x = 1$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5.3.2 ਅਸਪੱਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (*Derivatives of Implicit Functions*)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਅਨੇਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਰ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਦਾ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ x ਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$x - y - \pi = 0$$

$$x + \sin xy - y = 0$$

ਪਹਿਲੀ ਹਾਲਤ (ਸੂਰਤ) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ y ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ $y = x - \pi$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਜੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧ y ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਆਸਾਨ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸੂਰਤ ਵਿੱਚ, y ਦੀ x ਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਦੋਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਸ y ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y ਨੂੰ x ਦੇ ਸਪੱਸ਼ਟ (explicit) ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y ਨੂੰ x ਦੇ (implicity) ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਜੇਕਰ $x - y = \pi$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ y ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ ?

$$y = x - \pi$$

ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

ਵਿਕਲਪ : ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d\pi}{dx}$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਚਲ π ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

ਜੋ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਜੇਕਰ $y + \sin y = \cos x$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y} \quad \text{ਜਿੱਥੇ} \quad y \neq (2n + 1)\pi$$

5.3.3 ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ *(Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)*

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. $f(x) = \sin^{-1} x$ ਦਾ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x) = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \sin y$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ $\cos y \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, ਇਸ ਲਈ $x \neq -1, 1$, ਇਸ ਲਈ $x \in (-1, 1)$

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਰੋਮਾਂਚਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੇਰ-ਫੇਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ $\sin(\sin^{-1} x) = x$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਅਤੇ $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

ਇਸ ਲਈ $x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਸਾਰਨੀ 5.4

$f(x)$	$\cos^{-1}x$	$\cot^{-1}x$	$\sec^{-1}x$	$\text{cosec}^{-1}x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
Domain of f'	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

ਅਭਿਆਸ 5.3

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

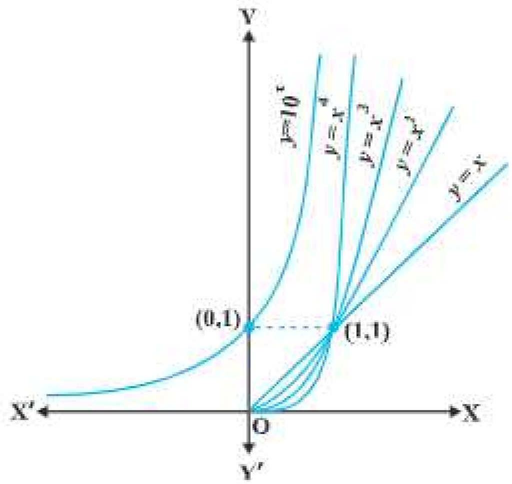
1. $2x + 3y = \sin x$
2. $2x + 3y = \sin y$
3. $ax + by^2 = \cos y$
4. $xy + y^2 = \tan x + y$
5. $x^2 + xy + y^2 = 100$
6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$
7. $\sin^2 y + \cos xy = k$
8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$
9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$
11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$
12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$
13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 ਚਲ ਘਾਤ ਅਤੇ ਲਘੂ ਗਣਨ ਫਲਨ (Exponential and Logarithmic Functions)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਭਾਗ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਾਰਨ ਪ੍ਰੇਰਕ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਦਰੁਸਤ) (ਮੁੱਲਵਾਨ) ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਲਬਧੀਆਂ ਇਸ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇ-ਵਸਤੂ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.9

ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ ਅਤੇ $y = f_4(x) = x^4$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਿਉਂ-ਜਿਉਂ x ਦੀ ਘਾਤ ਵਧਦੀ ਹੈ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵੀ ਵਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਤੇਜ਼ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ x (>1) ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਧੇ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = f_n(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਦੀ ਕੀਮਤ 1, 2, 3, 4 ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਥਨ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਇੱਥੇ $f_n(x) = x^n$ ਹੈ। ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $y = f_n(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ y-ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਝੁਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $f_{10}(x) = x^{10}$ ਅਤੇ $f_{15}(x) = x^{15}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵਧ ਕੇ 2 ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ f_{10} ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 2^{10} ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ f_{15} ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 2^{15} ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ਸਮਾਨ ਵਾਧੇ ਦੇ ਲਈ, f_{15} ਦਾ ਵਾਧਾ f_{10} ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵਾਧੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਘਾਤ ਵਧਾਉਂਦੇ ਜਾਓ, ਵਾਧਾ ਵਧਦਾ ਜਾਵੇਗਾ ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਾਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ $y = f(x) = 10^x$ ਹੈ।

ਸਾਡਾ ਦਾਅਵਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ f, ਫਲਨ $f_n(x) = x^n$ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f_{100}(x) = x^{100}$ ਦੇ

ਮੁਕਾਬਲੇ 10^x ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ x ਦੇ ਵੱਡੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ, ਜਿਵੇਂ $x = 10^3$, $f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ ਹੈ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $f_{100}(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਅਧਿਕ ਹਨ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਠਿਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ xਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $x > 10^3$, $f(x) > f_{100}(x)$ ਹੈ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ਵੱਡਿਆਂ ਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣ ਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ $f_n(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਫਲਨ $y = f(x) = b^x$, ਧਨਾਤਮਕ ਅਧਾਰ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y = 10^x$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਪਾਠਕ ਇਸ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ b ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੀਮਤਾਂ ਜਿਵੇਂ 2, 3, 4 ਦੇ ਲਈ ਖਿੱਚ ਕੇ ਦੇਖੋ। ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(1) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ, ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਬਿੰਦੂ $(0, 1)$ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ $b^0 = 1$)

(4) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ (increasing function) ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਉੱਠ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(5) x ਦੇ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਵੱਡੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਦੂਜੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਪਹੁੰਚ x- ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਪਰ ਕਦੇ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)

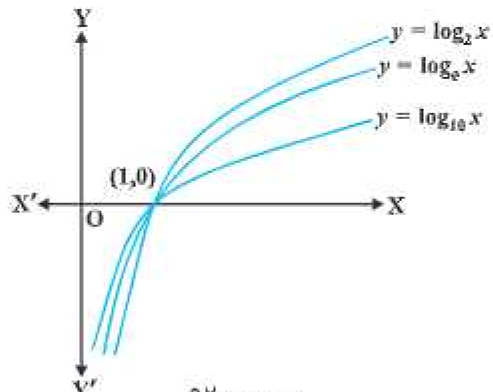
ਅਧਾਰ 10 ਵਾਲੇ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ **ਸਧਾਰਨ ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ (common exponential Function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਨੁਬੰਧ A.1.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸ਼੍ਰੇਣੀ

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ e ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ e ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ $y = e^x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ **ਪ੍ਰਕਿਰਤਿਕ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ (natural exponential function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਰੋਮਾਂਚਿਕ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਉਲਟ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਜੇਕਰ 'ਹੈ' ਤਾਂ ਕੀ ਉਸ ਦੀ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹ ਖੋਜ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 . ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $b > 1$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ b ਅਧਾਰ ਤੇ a ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ x ਹੈ, ਜੇਕਰ $b^x = a$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.10

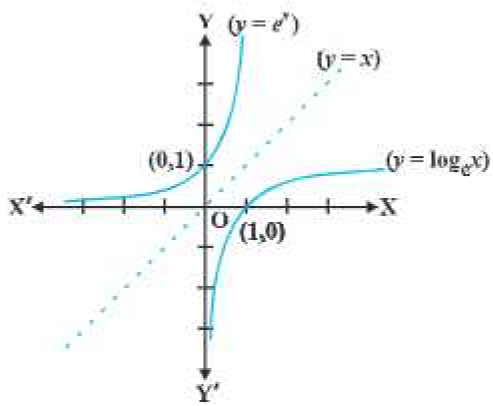
b ਅਧਾਰ ਤੇ a ਦੇ ਲਘੂਗਣਾਕ ਨੂੰ $\log_b a$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $b^x = a$, ਤਾਂ $\log_b a = x$ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸਪੱਸ਼ਟ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $2^3 = 8$ ਹੈ। ਲਘੂਗਣਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ $\log_2 8 = 3$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $10^4 = 10000$ ਅਤੇ $\log_{10} 10000 = 4$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ $625 = 5^4 = 25^2$ ਅਤੇ $\log_5 625 = 4$ ਜਾਂ $\log_{25} 625 = 2$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ।

ਥੋੜ੍ਹਾ ਜਿਹਾ ਹੋਰ ਪਰਿਪੱਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $b > 1$ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਮੰਨਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਨੂੰ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ **ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ (logarithmic function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$

$x \to \log_b x = y$ ਜੇਕਰ $b^y = x$

ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ, ਜੇਕਰ ਅਧਾਰ $b = 10$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ **"ਸਾਧਾਰਨ ਲਘੂਗਣਕ"** ਅਤੇ ਜੇਕਰ $b = e$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ **"ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ"** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਕਸਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ ਨੂੰ ln **ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ** $\log x$ **ਅਧਾਰ** e **ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.10 ਵਿੱਚ 2 ਅਤੇ 10 ਅਧਾਰਿਤ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।**



ਚਿੱਤਰ 5.11

ਅਧਾਰ $b > 1$ ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਥੱਲੇ ਸੂਚੀਬੱਧ ਹਨ :

(1) **ਗੈਰ ਧਨਾਤਮਕ** (non-positive) **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਘੂਗਣਕ ਦੀ ਕੋਈ ਅਰਥਪੂਰਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}^+$ ਹੈ।**

(2) **ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।**

(3) ਬਿੰਦੂ (1, 0) ਹਮੇਸ਼ਾ ਲਘੂਗਣਿਕ ਫਲਨਾ ਦਾ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(4) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਇੱਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜਿਉਂ ਜਿਉਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਚਲਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(5) 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਵਾਲੇ x ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ $\log x$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਚੌਥੀ (ਚੌਥਾਈ) ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਮਿਲਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਕਦੇ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(6) ਚਿੱਤਰ 5.11 ਵਿੱਚ $y = e^x$ ਅਤੇ $y = \log_e x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਰੋਮਾਂਚਕਾਰੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਵਕਰ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਦਰਪਣ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹਨ।

ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣ ਹੇਠਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹੈ :

(1) ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮਿਆਰੀ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\log_a p$ ਨੂੰ $\log_b p$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_a p = \alpha$. $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b a = \gamma$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $a^\alpha = p$. $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = a$ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੀਜੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

ਇਸ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ $\beta = \alpha\gamma$ ਜਾਂ $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\mathbf{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਤੇ log ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਰੋਮਾਂਚਕ ਗੁਣ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_b pq = \alpha$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ $b^\alpha = pq$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b q = \gamma$ ਹੈ ਤਾਂ $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = q$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰ $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ ਹੈ।

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $\alpha = \beta + \gamma$, ਭਾਵ

$$\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜਾ ਉਦੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $p = q$ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\mathbf{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log_b p}$$

ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਰਲ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ

$$\mathbf{\log_b p^n = n \log_b p}$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਤੀਜਾ n ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ

ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਾਠਕ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ log ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੇ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਗੈਰ-ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\log x}$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $y > 0$ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਲੈਣ ਤੇ $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ $y = x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਕੇਵਲ x ਦੇ ਧਨ ਕੀਮਤਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਕਲਨ ਗਣਿਤ (differential calculus) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਚਲਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਅਸਧਾਰਨ ਗੁਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ, ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਥੱਲੇ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਆਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਅਸੀਂ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5*

(1) x ਦੇ ਬਾਬਤ e^x ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) x ਦੇ ਬਾਬਤ $\log x$ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{x}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

ਉਦਾਹਰਣ 26. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) e^{-x} (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{-x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin (\log x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \cos^{-1} (e^x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

* ਕ੍ਰਿਪਾ ਕਰਕੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ ਪੰਨਾ 303-304

(iv) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

ਅਭਿਆਸ 5.4

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$
2. $e^{\sin^{-1} x}$
3. e^{x^3}
4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$
5. $\log(\cos e^x)$
6. $e^x + e^{x^2} + ... + e^{x^5}$
7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$
8. $\log(\log x),\ x > 1$
9. $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$
10. $\cos(\log x + e^x)$

5.5. ਲਘੂਗਣਕੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ (Logarithmic Differentiation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਰਗ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

ਲਘੂਗਣਕ (e ਅਧਾਰ ਤੇ) ਲੈਣ ਨਾਲ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ :

$$\log y = v(x)\ \log\ [u(x)]$$

ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ, $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = v(x) \cdot \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log\ [u(x)]$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਮੁੱਖ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u(x)$ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫ਼ਰੇਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. x ਦੇ ਬਾਬਤ $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y=\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \frac{1}{2}[\log(x-3)+\log(x^2+4)-\log(3x^2+4x+5)]$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 28. x ਦੇ ਬਾਬਤ a^x ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨ ਅਚੱਲ ਹੈ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = a^x$, ਤਾਂ

$$\log y = x \log a$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\log a$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx}=y\log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log a$$

ਵਿਕਲਪ $$\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}(e^{x\log a})=e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$=e^{x\log a}\,.\,\log a = a^x\log a$$

ਉਦਾਹਰਨ 29. x ਦੇ ਬਾਬਤ $x^{\sin x}$, ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $x > 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = x^{\sin x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \sin x \log x$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

ਜਾਂ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$
$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$
$$= x^{\sin x - 1}\cdot\sin x + x^{\sin x}\cdot\cos x \log x$$

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਜੇਕਰ $y^x + x^y + x^x = a^b$ ਹੈ। ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ ਅਤੇ $w = x^x$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $u + v + w = a^b$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $u = y^x$ ਹੈ। ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log u = x \log y$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y\cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$v = x^y$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log v = y \log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\frac{dy}{dx}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right] \quad \ldots (3)$$

ਗਣਿਤ $$w = x^x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log w = x\log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\cdot\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dw}{dx} = w\ (1+\log x)$$

$$= x^x\ (1+\log x) \quad \ldots (4)$$

(1), (2), (3) ਅਤੇ (4), ਦੁਆਰਾ

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right)+x^y\left(\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right)+x^x\ (1+\log x)=0$$

ਜਾਂ $$(x\ .\ y^{x-1}+x^y\ .\ \log x)\ \frac{dy}{dx} = -\,x^x\ (1+\log x)-y\ .\ x^{y-1}-y^x\log y$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x\log y+y\ .\ x^{y-1}+x^x(1+\log x)]}{x\ .\ y^{x-1}+x^y\log x}$$

ਅਭਿਆਸ 5.5

1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

5. $(x+3)^2 \,.\, (x+4)^3 \,.\, (x+5)^4$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x-y)}$

16. $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(1)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ

(ii) ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਇਕੱਲਾ ਬਹੁਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ

(iii) ਲਘੂਗਣਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੁਆਰਾ

ਇਸ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋ ਉੱਤਰ ਸਮਾਨ ਹਨ।

18. ਜੇਕਰ u, v ਅਤੇ w , x ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਭਾਵ ਪਹਿਲੇ-ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ *(Repeat)* ਦੁਆਰਾ ਦੂਜੀ-ਲਘੂਗੁਣਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(u.\,v.\,w) = \frac{du}{dx}\,v.\,w + u\,.\,\frac{dv}{dx}\,.\,w + u\,.\,v\,\frac{dw}{dx}$$

5.6 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

ਕਦੀ – ਕਦੀ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ, ਨਾ ਤਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਸਪਸ਼ਟ, ਪਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਇਕ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਾਫ਼-ਸੁਥਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਸੰਬੰਧ, ਨੂੰ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ t ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{ਜਦੋਂ ਕਦੀ}$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \left(\text{ਜਦੋਂ ਕਦੀ } \frac{dx}{dt} \neq 0\right) \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ ਅਤੇ } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \text{ [ਬਸ਼ਰਤੇ } f'(t) \neq 0]$$

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਜੇਕਰ $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

ਉਦਾਹਰਣ 32. ਜੇਕਰ $x = at^2$, $y = 2at$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x = at^2, y = 2at$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dx}{dt} = 2at \text{ ਅਤੇ } \frac{dy}{dt} = 2a$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਜੇਕਰ $x = a\ (\theta + \sin\theta)$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\ (\sin\theta)$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇੱਥੇ, ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\frac{dy}{dx}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ, ਕੇਵਲ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਜੇਕਰ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ਹੈ ਤਾਂ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + (\sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

ਇਸ ਲਈ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਦੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ ਅਤੇ $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

ਅਭਿਆਸ 5.6

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ x ਅਤੇ y ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਲੁਪਤ ਕੀਤੇ, $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $x = 2at^2,\ y = at^4$
2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$
3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$
4. $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$
5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$
6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$
7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$
8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$
9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$
11. ਜੇਕਰ $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

5.7 ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Second Order Derivative)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \dots (1)$$

ਜੇਕਰ $f'(x)$ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਅਚਲ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਬਾਬਤ (1) ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Second Order Derivative) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। $f(x)$ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ $f''(x)$ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $D^2(y)$ ਜਾਂ y'' ਜਾਂ y_2 ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਜੇਕਰ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ। ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 + \sec^2 x)$$
$$= 6x + 2 \sec x \, . \, \sec x \tan x = 6x + 2 \sec^2 x \tan x$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. ਜੇਕਰ $y = \text{A} \sin x + \text{B} \cos x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\frac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$$

ਅਤੇ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$$
$$= -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x = -y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਜੇਕਰ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ। ਹੁਣ

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$- 30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(1 - x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = \sin^{-1}x$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\frac{dy}{dx} = 1$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

ਵਿਕਲਪ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = \sin^{-1}x$ ਹੈ ਤਾਂ

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ਭਾਵ } (1-x^2)y_1^2 = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = 0$$

ਅਭਿਆਸ 5.7

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $x^2 + 3x + 2$
2. x^{20}
3. $x \,.\, \cos x$
4. $\log x$
5. $x^3 \log x$
6. $e^x \sin 5x$
7. $e^{6x} \cos 3x$
8. $\tan^{-1} x$
9. $\log (\log x)$
10. $\sin (\log x)$
11. ਜੇਕਰ $y = 5\cos x - 3\sin x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
12. ਜੇਕਰ $y = \cos^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਨੂੰ ਕੇਵਲ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਜੇਕਰ $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

14. ਜੇਕਰ $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

15. ਜੇਕਰ $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ ਹੈ।

16. ਜੇਕਰ $e^y(x+1) = 1$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ਹੈ।

17. ਜੇਕਰ $y = (\tan^{-1} x)^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 39. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sqrt{3x+2} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sqrt{3x+2} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\frac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\frac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ ਹੈ। ਇਹ $[-1, 1]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{\sec^2 x} \cdot \left(2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x)\right) - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec x\,(\sec x \tan x)\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਰਫ਼ $[-1, 1]$ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੰਨਿਆ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\cos^{-1} x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਸਿਰਫ਼ $(-1, 1)$ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \log_7 (\log x) = \frac{\log (\log x)}{\log 7}$ (ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ)

ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 1$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log(\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 40. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\cos^{-1}(\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right], \text{ since } \frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$

ਇਉਂ $f'(x) = -1$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ $\cos x \neq -1$, ਅਤੇ π ਦੇ ਸਾਰੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਾਕ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ਨੂੰ ਕੱਟ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ x ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $-1 \leq \dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੇ x ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$, ਭਾਵ ਇਹ ਸਾਰੇ x ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $2^{x+1} \leq 1 + 4^x$ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $2 \leq \dfrac{1}{2^x} + 2^x$ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸਾਰੇ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ $2^x = \tan\theta$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

ਇਸ ਲਈ
$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+(2^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x}\cdot(2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $0 < x < \pi$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਫਲਨ $y = (\sin x)^{\sin x}$ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $(\sin x>0)$ ਹੈ। ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਹੋਣ ਤੇ

$$\log y = \log(\sin x)^{\sin x} = \sin x \log(\sin x)$$

ਹੁਣ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log(\sin x))$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \sin x \,.\, \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log(\sin x))\cos x$$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = y((1 + \log(\sin x))\cos x) = (1 + \log(\sin x))(\sin x)^{\sin x}\cos x$

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਧਨਾਤਮਕ ਚਲ a ਦੇ ਲਈ $\frac{dy}{dx}$, ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$y = a^{t+\frac{1}{t}}, \text{ ਅਤੇ } x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a \text{ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋਨੋਂ y ਅਤੇ x, ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $t \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}} \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right).\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{dx}{dt} \neq 0$ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $t \neq \pm 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $t \neq \pm 1$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 43. $e^{\cos x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\sin^2 x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $u(x) = \sin^2 x$ ਅਤੇ $v(x) = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ :

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x \cos x \text{ ਅਤੇ } \frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x \cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆਂ 1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ, x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$
2. $\sin^3 x + \cos^6 x$
3. $(5x)^{3\cos 2x}$
4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1.$

5. $\dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2.$

6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right], 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7. $(\log x)^{\log x}, x > 1$

8. $\cos(a\cos x + b\sin x)$, ਕਿਸੇ ਅਚਲ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ

9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}, \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, ਕਿਸੇ ਪੱਕਾ $a > 0$ ਅਤੇ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ

11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}, x > 3$ ਦੇ ਲਈ

12. ਜੇਕਰ $y = 12(1-\cos t), x = 10(t - \sin t), -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}, 0 < x < 1$, ਹੈ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $-1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

15. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ $c > 0$ ਦੇ ਲਈ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$ a ਅਤੇ b ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਇੱਕ ਅਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ

16. ਜੇਕਰ $\cos y = x\cos(a+y)$, ਅਤੇ $\cos a \neq \pm 1$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

17. ਜੇਕਰ $x = a(\cos t + t\sin t)$ ਅਤੇ $y = a(\sin t - t\cos t)$, ਤਾਂ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ $f(x) = |x|^3$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f''(x)$ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੈ ।

19. sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੁਆਰਾ cosines ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਕੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਆਪਣੇ ਜਾਇਜ਼ ਉੱਤਰ ਵੀ ਦੱਸੋ।

21. ਜੇਕਰ $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. ਜੇਕਰ $y = e^{a\cos^{-1}x}, -1 \le x \le 1$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ f ਅਤੇ g ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ (ਨਿਰੰਤਰ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$) ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (ਸੀਮਿਤ) ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਲੜੀ-ਨਿਯਮ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ $f = v \circ u$, $t = u(x)$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\frac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{dv}{dt}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- ਕੁਝ ਮਾਨਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u(x)$ ਦੋਨੋ ਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣ।

ਅਧਿਆਇ 6

ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਅਣਉਪਯੋਗ (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

6.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਕ ਫਲਨਾਂ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਨਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ, ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਲਘੂ-ਗਣਨ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਕਈ ਹੋਰ ਖੇਤਰ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (i) ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (ii) ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (iii) ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ 'ਤੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

6.2 ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ (Rate of Change of Quantities)

ਆਓ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{ds}{dt}$ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੂਰੀ s ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ y ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੇ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$), x ਦੇ ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) x ਦੇ ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੇ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y, ਚਲ t ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਭਾਵ $x = f(t)$ ਅਤੇ

$y = g(t)$ ਹੈ ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇ } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, x ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦੀ ਗਣਨਾ t ਦੇ ਬਾਬਤ y ਅਤੇ x ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, r ਦੇ ਬਾਬਤ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਤਾਂ $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 10π cm²/cm ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 9 cm³/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਣ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x cm ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਜਾਂ ਘਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ, $V = x^3$ ਅਤੇ $S = 6x^2$. ਇੱਥੇ x ਸਮਾਂ t ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \text{ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

ਇਸ ਲਈ $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $$x = 10 \text{ cm}, \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 4 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂ t ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\,\frac{dr}{dt} \qquad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ $\qquad \dfrac{dr}{dt} = 4 \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $\qquad r = 10 \text{ cm}$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $r = 10$ cm ਤਦ ਚੱਕਰ ਤੋਂ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 80π cm²/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x, ਦੇ ਘਟਣ ਦੀ ਦਰ 3 cm/min ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y, ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ 2 cm/min ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 10$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੰਬਾਈ x ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ cm/min} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ P ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ, ਭਾਵ ਕਿ

$$P = 2(x + y)$$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \dfrac{dP}{dt} = 2\left(\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2 \text{ cm/min}$

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ

ਭਾਵ ਕਿ $\qquad A = x \cdot y$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= -3(6) + 10(2) \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } x = 10 \text{ cm ਅਤੇ } y = 6 \text{ cm)}$$

$$= 2 \text{ cm}^2/\text{min}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ C(x) ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ (marginal cost ਜਾਂ MC) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਤਤਕਾਲਿਕ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ x ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਾਬਤ, ਸੰਪੂਰਨ ਲਾਗਤ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $$\text{MC} = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

ਜਦੋਂ $x = 3$ ਹੈ ਤਦ $$\text{MC} = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$

$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ Rs 30.02 (ਲੱਗਭਗ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ $$\text{MR} = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੈ, ਤਦ $$\text{MR} = 6(5) + 36 = 66$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਭਾਵ ਆਮਦਨ Rs 66 ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ r ਦੇ ਬਾਬਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

   (a) $r = 3$ cm ਹੈ। (b) $r = 4$ cm ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 cm^3/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ

ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੋਵੇ ?

3. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 cm/s ਦੀ ਇਕਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।

4. ਇੱਕ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਘਣ ਦਾ ਕਿਨਾਰਾ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿਨਾਰਾ 10 cm ਲੰਬਾ ਹੈ।

5. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈਂ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 5 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 8 cm ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

6. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.7 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਘੇਰੇ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਕੀ ਹੈ ਜਦੋਂ $r = 4.9$ cm ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਈ x, 5 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈਂ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y, 4 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 8$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ (a) ਪਰਿਮਾਪ (b) ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਪੰਪ ਨਾਲ 900 cm^3 ਗੈਸ ਪ੍ਰਤੀ ਸੈਕਿੰਡ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗੁਬਾਰੇ ਦੀ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 15 cm ਹੈ।

9. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਚਲ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।

10. ਇੱਕ 5 m ਲੰਬੀ ਪੌੜੀ ਕੰਧ 'ਤੇ (ਝੁਕੀ ਹੋਈ) ਲੱਗੀ ਹੈ। ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ, ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 2 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੀਵਾਰ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 4 m ਦੂਰ ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਕਣ ਵਕਰ $6y = x^3 + 2$ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਚਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਵਕਰ 'ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਨਾਲ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 8 ਗੁਣਾ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

12. ਹਵਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $\frac{1}{2}$ cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 1 cm ਹੈ ?

13. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਵਿਆਸ $\frac{3}{2}(2x+1)$ ਹੈ। x ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

14. ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਤੋਂ ਰੇਤ 12 cm^3/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਡਿੱਗ ਰਹੀ ਹੈ। ਡਿੱਗਦੀ ਰੇਤ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਛੇਵਾਂ ਹਿੱਸਾ ਹੈ। ਰੇਤ ਨਾਲ ਬਣੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਚਾਈ 4 cm ਹੈ ?

15. ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ $C(x)$ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ 17 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ?

16. ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R(x)$ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $x = 7$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਅਤੇ 18 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ

17. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ $r = 6$ cm ਤੇ r ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 15$ ਹੈ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਹੈ :

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 ਵਧਦੇ (Increasing) ਅਤੇ ਘਟਦੇ (Decreasing) ਫਲਨ

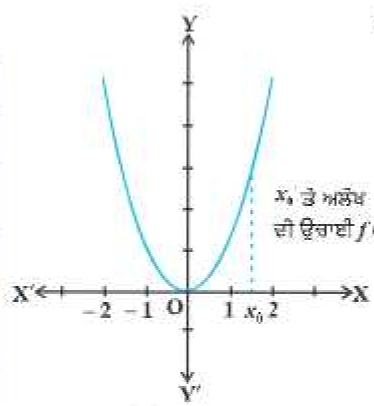
ਇਸ ਭਾਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਜਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਜੋ ਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ, ਚਿੱਤਰ 6.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.1

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.1) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x < 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ I ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ। ਤਦ f

(i) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

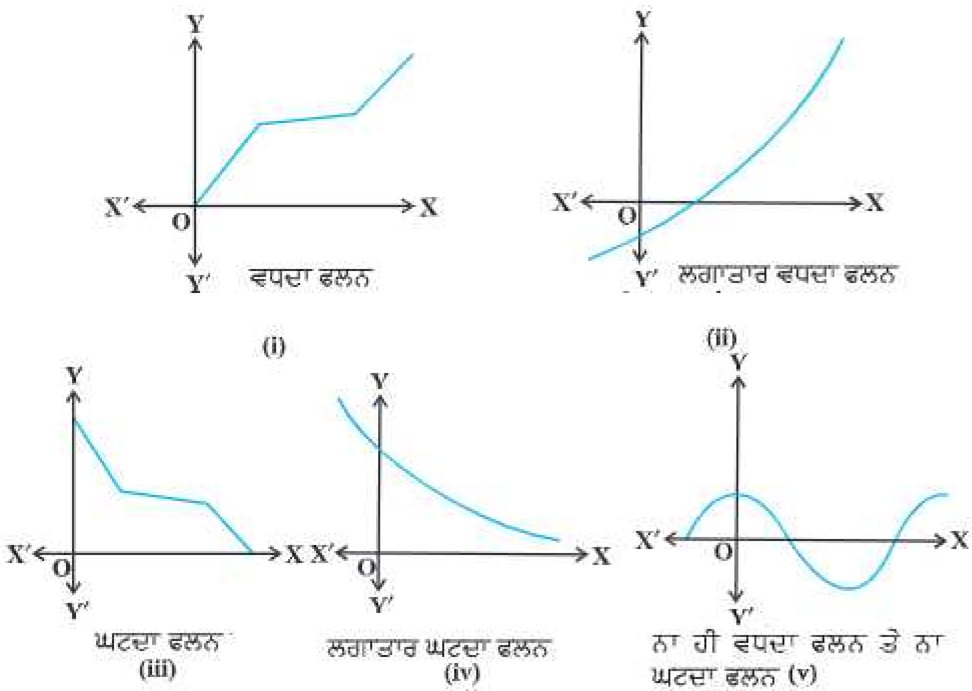
(ii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iv) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿਤਰਨ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 6.2

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ x_0 ਹੈ ਤਾਂ x_0 ਤੇ f ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x_0 ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ f ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

x_0 ਤੇ f ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $x_1, x_2 \in I$ ਦੇ ਲਈ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

ਬਾਕੀ ਹਾਲਤਾਂ ਦਾ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = 7x - 3$, $\mathbf{R}$ ਤੇ ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ x_1 ਅਤੇ x_2 ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ; ਤਦ

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\ &\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\mathbf{R}$ ਤੇ f ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਧਦੇ ਅਤੇ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਸਬੂਤ ਲਈ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਲੋੜ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ $[a,b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ (a,b) ਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(a) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

(b) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

(c) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ (a) ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ $x_1, x_2 \in [a, b]$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $x_1 < x_2$ ਤਦ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad$ (ਕਿਉਂਕਿ $f'(c) > 0$)

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) > f(x_1)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$[a,b] \text{ ਦੇ ਸਾਰੇ } x_1, x_2 \text{ ਦੇ ਲਈ } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ਇਸ ਲਈ $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਭਾਗ (b) ਅਤੇ (c) ਦੇ ਸਬੂਤ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ

(i) ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਲਈ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ x, f ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ f ਨੂੰ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਲਈ $f^1(x) < 0$ ਅਤੇ $f(x) > 0$ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ ਕਿਸੀ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ f ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਸ ਦੇ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਦਾ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in \mathbf{R}$$

R ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \quad \text{ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ} \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f, **R** ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) $(\pi, 2\pi)$, ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $f'(x) = -\sin x$

(a) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (0, \pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x > 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) < 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (\pi, 2\pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x < 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(\pi, 2\pi)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) ਉਪਰੋਕਤ (a) ਅਤੇ (b) ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ f ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = x^2 - 4x + 6$

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 2x - 4$$

ਇਸ ਲਈ $f(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = 2$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, 2)$ ਅਤੇ $(2, \infty)$ (ਚਿੱਤਰ 6.3) ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(-\infty, 2)$ ਵਿੱਚ $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 6.3

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(2, \infty)$. ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਉਹ ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f,

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

ਚਿੱਤਰ 6.4

ਜਾਂ $$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$

$$= 12(x^2 - x - 6)$$

$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = -2, 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = -2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.4)।

ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਫਲਸਰੂਪ ਫਲਨ f ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰ f, **R** ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ	$f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਫਲਨ f ਦੀ ਕਿਸਮ
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a) ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 6.5

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$f(x) = \sin 3x$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

ਇਸ ਲਈ, $f'(x) = 0$ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\cos 3x = 0$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{\pi}{6}$ ਅਤੇ $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{\pi}{6}$, ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ ਸਾਰੇ $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x \le \frac{3\pi}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{\pi}{6}$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਤੋਂ, f, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

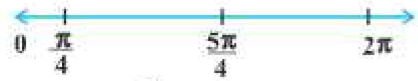
$$f(x) = \sin x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $\sin x = \cos x$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x \le 2\pi$,

ਬਿੰਦੂ $x=\frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $x=\frac{5\pi}{4}$ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ, ਅਰਥਾਤ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x)>0$ ਜਦੋਂ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $f'(x)<0$, ਜਦੋਂ $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ	$f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਫਲਨ ਦੀ ਕਿਸਮ
$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	>0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	<0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ
$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$	>0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ **R** ਤੇ $f(x) = 3x + 17$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਤੇ $f(x) = e^{2x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ $f(x) = \sin x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

   (a) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

   (c) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਘਟਦਾ ਹੈ।
4. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^2 - 3x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

5. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

6. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਹਨ :

(a) $x^2 + 2x + 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}, x > -1$, ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

8. x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ $y = [x(x-2)]^2$ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$. θ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(-1, 1)$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 - x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

12. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਫਲਨ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦੇ ਹਨ ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

14. a ਦਾ ਉਹ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 2]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 + ax + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

15. ਮੰਨ ਲਉ $[-1, 1]$ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਾ ਜੁੜਾ ਅੰਤਰਾਲ I ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ I ਵਿੱਚ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

17. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log|\cos x|$ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\mathbf{R}$ ਤੇ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ।

19. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $y = x^2 e^{-x}$ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ (Turning points) ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੇ ਅਲੇਖ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਤੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute maximum value) ਅਤੇ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute minimum value) ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਈ ਵਿਹਾਰਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬਾਗ ਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਫਲਨ $P(x) = ax + bx^2$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ a, b ਅਚਲ ਹੈ ਅਤੇ x ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਵਿੱਚ ਸੰਤਰੇ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਕਿੰਨੇ ਦਰੱਖਤ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਦੇਣਗੇ ?

(ii) ਇੱਕ 60 m ਉੱਚੇ ਭਵਨ ਤੋਂ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟੀ ਗਈ ਇੱਕ ਗੇਂਦ $h(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਚਲਦੀ ਹੈ, ਇੱਥੇ x ਭਵਨ ਤੋਂ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲੇਟਵੀਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ $h(x)$ ਉਸਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ। ਗੇਂਦ ਕਿੰਨੀ ਅਧਿਕਤਮ ਉਚਾਈ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚੇਗੀ ?

(iii) ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $f(x) = x^2 + 7$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ $(1, 2)$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਗੋਲੀ ਮਾਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਉਸ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸਾਂਝਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੁਲਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਦ

(a) f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \geq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \in$ I ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(b) f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \leq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \in$ I ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

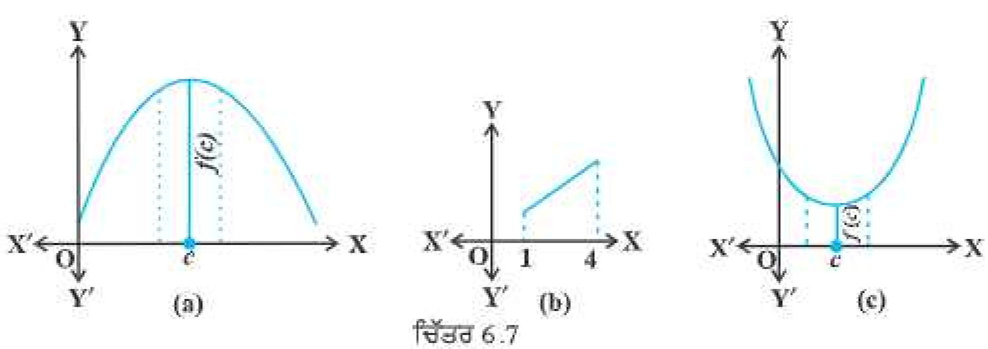
(c) I ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਚਰਮ ਮੁੱਲ (extreme value) ਰੱਖਣ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c)$, f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f(c)$, I ਨੂੰ f ਦਾ ਚਰਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਇੱਕ ਚਰਮ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਚਿੱਤਰ 6.7 (a), (b) ਅਤੇ (c) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੀ ਜੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ /ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਉਦਾਹਰਨ 27)।

ਉਦਾਹਰਣ 14. $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ, ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6. 8) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ ਅਤੇ

$$f(x) \geq 0, \text{ ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ}$$



ਚਿੱਤਰ 6.7

ਇਸ ਲਈ, f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ f ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

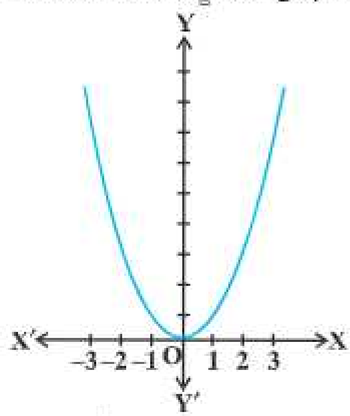
ਟਿੱਪਣੀ ਜੇ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ $[-2, 1]$ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰੀਏ ਤਦ $x = -2$ ਤੇ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $(-2)^2 = 4$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6. 9) ਤੋਂ

$f(x) \geq 0$, ਸਾਰੇ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਅਤੇ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ f ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਅਤੇ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ **R** ਵਿੱਚੋਂ f ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।



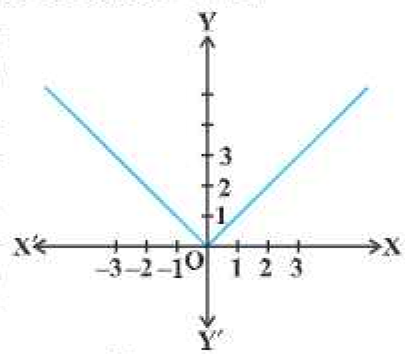
ਚਿੱਤਰ 6.8

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ $[-2, 1]$ ਤੱਕ ਸੀਮਤ ਕਰੀਏ, ਤਾਂ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $|-2| = 2$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਉਦਾਹਰਨ 27 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਫਲਨ f, $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. $f(x) = x, x \in (0, 1)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

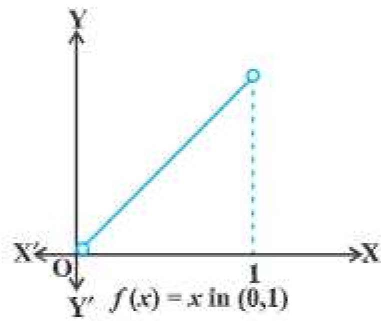


ਚਿੱਤਰ 6.9

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (0, 1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6. 10) ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ 0 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ x_0 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{x_0}{2} < x_0$ ਸਾਰੇ $x_0 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ, ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ 1 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ x_1 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਰੇ $x_1 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ $(0, 1)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਪਾਠਕ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 28 ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ 0 ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਲ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਅਰਥਾਤ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਧਾ ਕੇ $[0, 1]$ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਏ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $x = 0$ ਤੇ 0 ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $x = 1$ ਤੇ 1 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ (ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ)।
ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ/ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.10

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ **ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।**

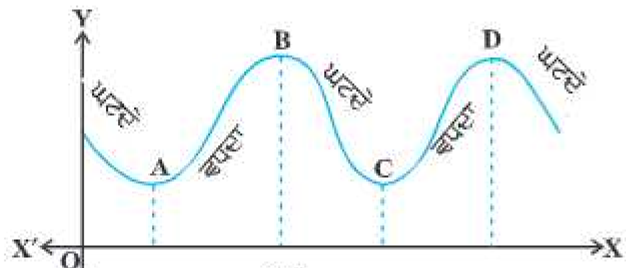
ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ f ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਜਾਂ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ। ਦੇਖੋ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਤੇ ਘਟਦੇ ਤੋਂ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਵਧਦੇ ਤੋਂ ਘਟਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਆਪਣਾ ਸੁਭਾਵ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਪਹਾੜੀ ਜਾਂ ਛੋਟੀ ਘਾਟੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਮੋਟੇ ਤੌਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਘਾਟੀਆਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ D ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਪਹਾੜੀਆਂ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ) ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ) ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ c ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਦਰਲਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਦ

(a) c ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ



ਚਿੱਤਰ 6.11

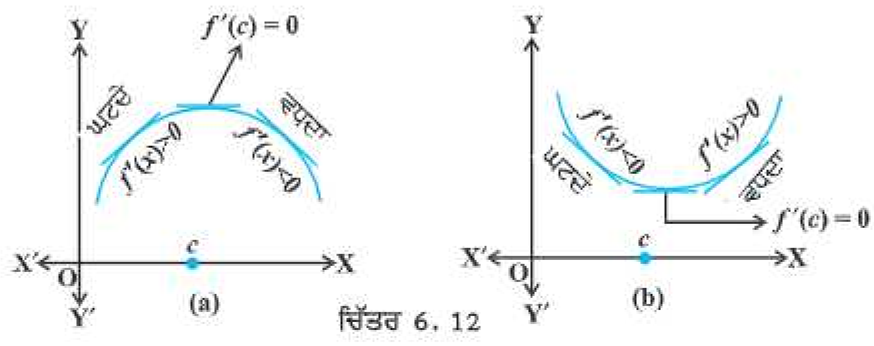
$(c - h, c + h)$ ਤੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(c) > f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(b) c ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c + h)$ ਤੋਂ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(c) < f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ, ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇ $x = c$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ c ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.12(a) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਵਧਦਾ ਹੈ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) > 0$) ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ c , ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ c ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.12(b) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c)$ ਵਿੱਚ f ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ f ਵਧਦਾ (ਅਰਥਾਤ, $f'(x) > 0$) ਹੈ। ਇਹ ਫਿਰ ਸਾਨੂੰ ਸੁਝਾਅ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ)।

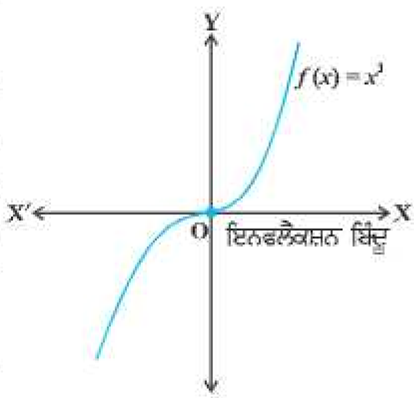
ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $c \in$ I ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇ f ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $f'(x) = 3x^2$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(0) = 0$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ 0 ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6. 13) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ।

> *ਟਿੱਪਣੀ :* ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c, ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ (Critical Point) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c + h)$ ਵਿੱਚ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. **(ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਤਦ



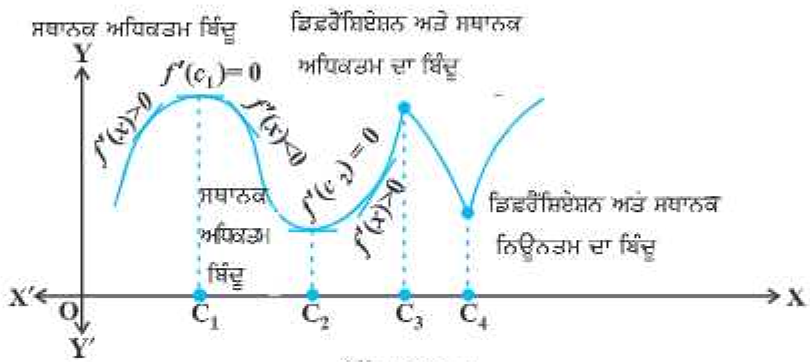
ਚਿੱਤਰ 6.13

(i) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(ii) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(iii) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ c ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6. 13) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਦੋਂ c ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ c ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 6.15 ਅਤੇ 6.16 ਪ੍ਰਮੇਯ 3 ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.14

ਉਦਾਹਰਣ 17. $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ਅਤੇ } x = -1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕੇਵਲ $x = \pm 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜੋ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ/ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਤੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 1$, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(1) = 1$ ਹੈ।

$x = -1$ ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ -1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ -1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ -1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ -1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = -1$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(-1) = 5$ ਹੈ।

x ਦੇ ਮੁੱਲ		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ
ਦੇ ਨੇੜੇ	ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 1.1)	>0
	ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 0.9)	<0
ਦੇ ਨੇੜੇ	ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ– 0.9)	<0
	ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ–1.1)	>0

ਉਦਾਹਰਣ 18. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੀ f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \geq 0$ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਇੱਕ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ (inflection) ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 30 ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਅੰਤਰਾਲ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ ਕਦੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਪ੍ਰੇਖਣ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸੌਖਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in \mathbf{I}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, c ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f'''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

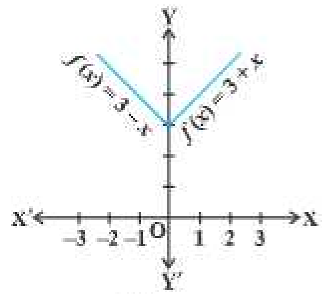
(ii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) - 0$ ਅਤੇ $f'''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f'''(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

☛ *ਟਿੱਪਣੀ* ਬਿੰਦੂ c ਤੇ f ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ c ਤੇ f ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 19. $f(x) = 3 + |x|,\ x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 0 ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ 0 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3 - x$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) = -1 < 0$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3 + x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 1 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0$, f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 3$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.15

ਉਦਾਹਰਣ 20. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x\,(x-1)\,(x+2)$$

ਜਾਂ $x = 0,\ x = 1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਤੇ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12\,(3x^2 + 2x - 1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 12$ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ $x = 1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(1) = 7$ ਅਤੇ $f(-2) = -20$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ $$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਤੋਂ $x = -1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਾਂ $f''(1) = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵੱਲ ਵਾਪਸ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ (ਉਦਾਹਰਨ 30) ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨਾਲ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 15 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਦ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $15 - x$ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਦ

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

ਜਾਂ
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{15}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ S ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{15}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{15}{2}$ ਅਤੇ $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 22 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ k ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $0 \le c \le 5$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ (h, k) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ (h, k) ਅਤੇ $(0, c)$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ D ਹੈ। ਤਦ

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ (h, k) ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $k = h^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

ਜਾਂ
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

ਹੁਣ $$\mathrm{D}'(k) = 0 \text{ ਤੋਂ } k = \frac{2c-1}{2}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ $k < \frac{2c-1}{2}$, ਤਦ $2(k-c)+1<0$, ਅਰਥਾਤ $\mathrm{D}'(k)<0$ ਹੈ ਜਾਂ ਜਦੋਂ $k > \frac{2c-1}{2}$ ਤਦ $2(k-c)+1>0$ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ $\mathrm{D}'(k)>0$ (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $k = \frac{2c-1}{2}$ ਤੇ k ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$\mathrm{D}\left(\frac{2c-1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2c-1}{2}+\left(\frac{2c-1}{2}-c\right)^2}=\frac{\sqrt{4c-1}}{2}$$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 23 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸੰਖੇਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੌਖਾ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਹੈ।

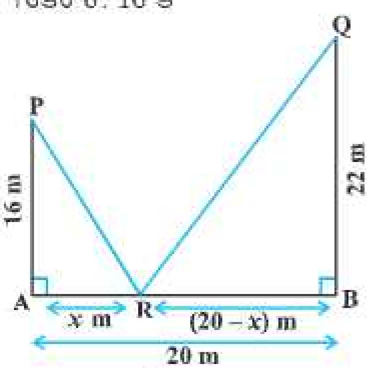
ਉਦਾਹਰਣ 24. ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ AP ਅਤੇ BQ ਦੋ ਲੰਬਕਾਰੀ ਖੰਭੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ AP = 16 m, BQ = 22 m ਅਤੇ AB = 20 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ A ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $RP^2 + RQ^2$ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $AR = x$ m ਹੈ। ਤਦ $RB = (20 - x)$ m (ਕਿਉਂਕਿ AB = 20 m) ਚਿੱਤਰ 6. 16 ਤੋਂ

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

ਅਤੇ $$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

ਇਸ ਲਈ $$RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$



ਚਿੱਤਰ 6.16

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $S'(x) = 4x - 40$ ਹੈ।

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $S''(x) = 4 > 0$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $S''(10) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 10$, S ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਤੇ R ਦੀ A ਤੋਂ ਦੂਰੀ $AR = x = 10$ m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜਦੋਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਦ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

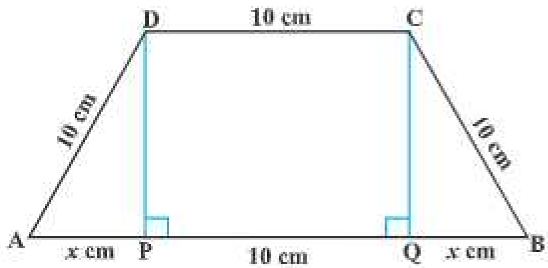
ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.17 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। AB ਤੇ DP ਅਤੇ CQ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $AP = x$ cm ਹੈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\Delta APD \cong \Delta BQC$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $QB = x$ cm ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ $DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \equiv A(x)$

$= \frac{1}{2}$ (ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) (ਉਚਾਈ)

$= \frac{1}{2}(2x+10+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$

$= (x+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$



ਚਿੱਤਰ 6.17

ਜਾਂ $$A'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100-x^2}}$$

ਹੁਣ $A'(x) = 0$ ਨਾਲ $2x^2 + 10x - 100 = 0$, ਜਿਸ ਨਾਲ $x = 5$ ਅਤੇ $x = -10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 5$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 300x - 1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A''(5) = \frac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 5$ ਤੇ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ ਹੈ।}$$

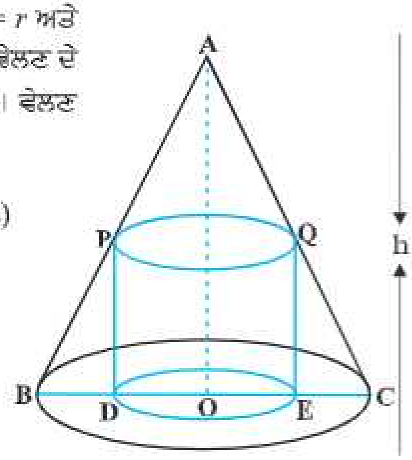
ਉਦਾਹਰਣ 26. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ, ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OC = r$ ਅਤੇ ਉਚਾਈ $OA = h$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੇਲਣ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OE = x$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6. 18)। ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਚਾਈ QE ਦੇ ਲਈ

$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

ਜਾਂ $$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

ਜਾਂ $$QE = \frac{h(r-x)}{r}$$



ਮੰਨ ਲਉ ਵੇਲਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

ਚਿੱਤਰ 6. 18

ਜਾਂ $$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{r}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $S''(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = \frac{r}{2}$, S ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਦਰ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ, ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

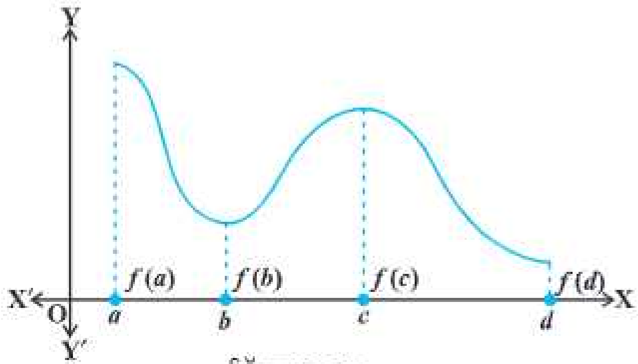
6.4.2 ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ (0, 1) ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਪਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 1]$ ਤੱਕ ਵਧਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਦ ਵੀ f ਦਾ ਸ਼ਾਇਦ ਕੋਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $3 = f(1)$ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $2 = f(0)$ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 3, $[0, 1]$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (global maximum or greatest value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x = 0$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 2ਏ $[0, 1]$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ(global minimum or least value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਸੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ f ਦੇ ਚਿੱਤਰ 6 . 19 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ $x = b$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(b)$ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6 . 19

ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(a)$ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(d)$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਾਲੋਂ ਵੱਖਰਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਨਤੀਜਿਆਂ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ) ਦੇ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $I = [a, b]$ ਤੇ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਤਦ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ f ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ f ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ f ਇੱਕ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ I ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ c ਤੇ f ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

(ii) ਜਦੋਂ c ਤੇ f ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਰੌਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ

ਕਦਮ 1: ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ x ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕਦਮ 2: ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਉ।

ਕਦਮ 3: ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) f ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਕਦਮ 4: ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, f ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਅੰਤਰਾਲ [1, 5] ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ [1, 5] ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਰਥਾਤ $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ :

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ [1, 5] ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 56 ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 24 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}, x \in [-1, 1]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{1}{8}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ $f'(x)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂਆਂ $x = 0, \frac{1}{8}$ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ $x = -1$ ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਨਾਲ

$$f(-1) = 12(-1^{\frac{4}{3}}) - 6(-1^{\frac{1}{3}}) = 18$$
$$f(0) = 12\,(0) - 6\,(0) = 0$$
$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$
$$f(1) = 12(1^{\frac{4}{3}}) - 6(1^{\frac{1}{3}}) = 6$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = -1$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 18 ਹੈ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\frac{-9}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $y = x^2 + 7$ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ (3, 7) ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਆਪਣੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ $(x, x^2 + 7)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (3, 7) ਤੇ ਸਥਿਤ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$, ਅਰਥਾਤ $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\quad f(x) = (x - 3)^2 + x^4$

ਜਾਂ $\quad f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3 = 2\,(x - 1)\,(2x^2 + 2x + 3)$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤੇ $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ਨਾਲ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ f' ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ $x = 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\quad \sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{f(x)}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\sqrt{5}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ $\sqrt{5}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$
   (iii) $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$
   (iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$
   (v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$
3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੋਵੇ, ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$
   (iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
   (iv) $f(x) = \sin x - \cos x,\ 0 < x < 2\pi$
   (v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x},\ \ x > 0$
   (vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1 - x},\ 0 < x < 1$
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$
   (iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
5. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$
   (iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x - 1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$
6. ਜਦੋਂਕਿ ਲਾਭ ਫਲਨ $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਕੰਪਨੀ ਵੱਲੋਂ ਕਮਾਇਆ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 3]$ ਤੇ $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।
8. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨ $\sin 2x$ ਆਪਣਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ?
9. ਫਲਨ $\sin x + \cos x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ?

10. ਅੰਤਰਾਲ $[1, 3]$ ਵਿੱਚ $2x^3 - 24x + 107$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ $[-3, -1]$ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਜਦੋਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $[0. 2]$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. $[0, 2\pi]$ ਤੇ $x + \sin 2x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।
14. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $x + y = 60$ ਅਤੇ xy^3 ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।
15. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 35 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ $x^2 y^5$ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।
16. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 16 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।
17. 18 cm ਭੁਜਾ ਦੇ ਟੀਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਰਗਕਾਰ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।
18. 45 cm × 24 cm ਦੀ ਟੀਨ ਦੀ ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਾਦਰ ਦੇ ਕੋਨੇ ਤੇ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।
19. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
20. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਉਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਉਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।
21. 100 cm^3 ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬੰਦ ਵੇਲਣਾਕਾਰ (ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ) ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
22. ਇੱਕ 28 cm ਲੰਬੇ ਤਾਰ ਨੂੰ ਦੋ ਟੁਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਵਰਗ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਦਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।
23. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ $\frac{8}{27}$ ਵਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
24. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ $\sqrt{2}$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
25. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

26. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 27 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

27. ਵਕਰ $x^2 = 2y$ ਤੇ $(0, 5)$ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ :

(A) $(2\sqrt{2},4)$ (B) $(2\sqrt{2},0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(2, 2)$

28. x, ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਇੱਕ ਕਾਰ ਸਮੇਂ $t = 0$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਬਿੰਦੂ Q ਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ t ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ, x ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right) \text{ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ}$$

ਕਾਰ ਨੂੰ Q ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ t ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ v ਹੈ।

ਹੁਣ $$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

ਜਾਂ $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $v = 0$ ਤੋਂ $t = 0$ ਅਤੇ $t = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

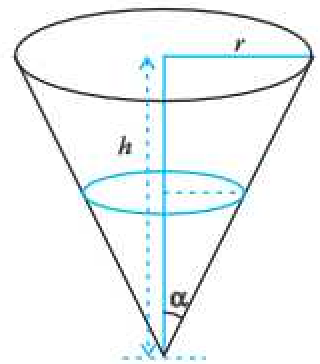
ਹੁਣ P ਅਤੇ Q ਤੇ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ $v = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Q ਤੇ ਕਾਰ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚੇਗੀ। ਹੁਣ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ

ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ :

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right)=16\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ m}$$

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਪਾਣੀ ਦੀ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਕਾਰ, ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਉਲਟੇ ਲੰਬਕਾਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}(0.5)$ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 5 m^3/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਾਣੀ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਉਸ ਪਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਦੀ ਉਚਾਈ 10 m ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ r, h ਅਤੇ α ਚਿੱਤਰ 6.20 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ। ਤਦ $\tan\alpha = \frac{r}{h}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.20

ਇਸ ਲਈ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = \tan^{-1}(0.5)$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{r}{h} = 0.5$ ਜਾਂ $r = \frac{h}{2}$

ਮੰਨ ਲਉ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਹੈ ਤਦ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt}$$

(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

ਹੁਣ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਅਰਥਾਤ $\frac{dV}{dt} = 5\text{ m}^3/\text{h}$ ਅਤੇ $h = 4$ m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}\text{ m/min}\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ $\frac{35}{88}$ m/min ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 32. 2 m ਉਚਾਈ ਦਾ ਆਦਮੀ 6 m ਉੱਚੇ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਭੇ ਤੋਂ ਦੂਰ 5 km/h ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 6.21 ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ, AB ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਭਾ ਹੈ। B ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਲਬ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਆਦਮੀ MN ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ AM = l m ਅਤੇ ਆਦਮੀ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ MS ਹੈ ਅਤੇ ਮੁੱਲ MS = s m ਹੈ।

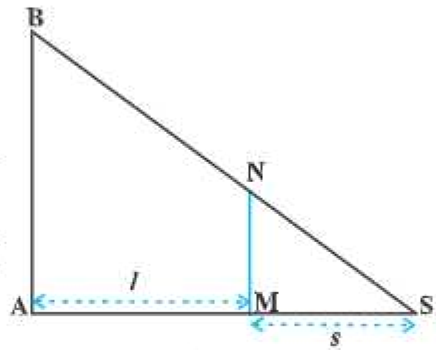
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\Delta ASB \sim \Delta MSN$

ਜਾਂ $$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

ਜਾਂ $$AS = 3s$$

[(ਕਿਉਂਕਿ MN = 2 m ਅਤੇ AB = 6 m (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)]

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AM = $3s - s = 2s$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ AM = l ਮੀਟਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.21

ਇਸ ਲਈ $$l = 2s$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{dl}{dt} = 5$ km/h ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $\frac{5}{2}$ km/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

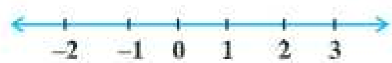
ਉਦਾਹਰਣ 33. ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਫਲਨ

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$



ਚਿੱਤਰ 6.22

ਜਾਂ $$f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3) \quad \text{(ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1, x = -2,$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = 1, -2,$ ਅਤੇ 3 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਚਾਰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 6.22)

ਅੰਤਰਾਲ $(-\infty, -2)$ ਨੂੰ ਲਉ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $-\infty < x < -2$ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $x - 1 < 0, x + 2 < 0$ ਅਤੇ $x - 3 < 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x = -3$ ਦੇ ਲਈ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ $= (-4)(-1)(-6) < 0$) ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $-\infty < x < -2$ ਹੈ, ਤਦ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(-\infty, -2)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 1)$, ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $-2 < x < 1$ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

$x - 1 < 0$, $x + 2 > 0$ ਅਤੇ $x - 3 < 0$ ਹੈ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x = 0$, ਦੇ ਲਈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $-2 < x < 1$ ਹੈ, ਤਦ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(-2, 1)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅੰਤਰਾਲ $(1,3)$ ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ ਅਤੇ $x - 3 < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ $(1, 3)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਾਲ $(3, \infty)$, ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $3 < x < \infty$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ ਅਤੇ $x - 3 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $x > 3$ ਹੈ, ਤਾਂ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sin x + \cos x)^2} (\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad \text{(ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $2 + \sin 2x > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x - \sin x > 0$

ਜਾਂ $f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x > \sin x$ ਜਾਂ $\cot x > 1$

ਹੁਣ $\cot x > 1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\tan x < 1$, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. 3 cm ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਲੇਟ ਗਰਮ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਫੈਲਣ ਨਾਲ ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.05 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.2 cm ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਲੇਟ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ ਅਤੇ A ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਤਦ

ਹੁਣ $$\mathrm{A} = \pi r^2$$

ਜਾਂ $$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਹੁਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05 \text{ cm/s}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ

$$d\mathrm{A} = \frac{d\mathrm{A}}{dt}(\Delta t)$$

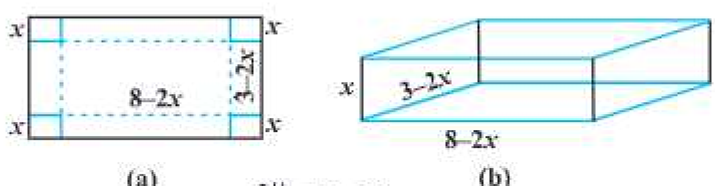
$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right) = 2\pi r\,(dr)$$

$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) \qquad (r = 3.2 \text{ cm})$$

$$= 0.320\pi \text{ cm}^2\text{/s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. ਆਇਤਕਾਰ 3 m × 8 m ਐਲੂਮੀਨੀਅਮ ਦੀ ਚਾਦਰ ਨਾਲ, ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰੇ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲਾ ਬਕਸਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਏ ਗਏ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ x ਮੀ ਹੈ। ਤਦ, ਬਕਸੇ ਦੀ ਉਚਾਈ x ਲੰਬਾਈ $8 - 2x$ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ $3 - 2x$ ਹੋਵੇਗੀ। (ਚਿੱਤਰ 6.23) ਜੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ V(x) ਹੈ ਤਾਂ



ਚਿੱਤਰ 6.23

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

ਇਸ ਲਈ $\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$

ਹੁਣ $V'(x) = 0$ ਤਾਂ $x = \frac{2}{3}$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x \neq 3$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{2}{3}$

ਹੁਣ $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{2}{3}$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜੇ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਭੁਜਾ $\frac{2}{3}$ m ਦਾ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਚਾਦਰ ਤੋਂ ਬਕਸਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\,m^3$$

ਉਦਾਹਰਨ 37. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ Rs $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਨਾਲ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। x ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ Rs $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ ਰੁਪਏ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਵੇਚਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $S(x)$ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $C(x)$, x ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਤਦ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$$

ਅਤੇ
$$C(x) = \frac{x}{5} + 500$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਲਾਭ ਫਲਨ $P(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$P(x) = S(x) - C(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

ਅਰਥਾਤ
$$P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

ਜਾਂ $$P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

ਹੁਣ $P'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 240$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $P''(x) = \frac{-1}{50}$. ਇਸ ਲਈ $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 240$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ240 ਇਕਾਈਆਂ ਵੇਚਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = e$ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ।
2. ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਧਾਰ b ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਂਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਆਧਾਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ?
3. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਸ ਤੇ
$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$
ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f (i) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ (ii) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।
4. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}, x \neq 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

   (i) ਵਧਦਾ ਹੈ (ii) ਘਟਦਾ ਹੈ।
5. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਸ ਸਮਦੋਂਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ, ਧੁਰੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ।
6. ਆਇਤਕਾਰ ਅਧਾਰ ਅਤੇ ਆਇਤਕਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ ਦੀ 2 m ਡੂੰਘੀ ਅਤੇ 8 m^3 ਆਇਤਨ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਢੱਕਣ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਅਧਾਰ ਦੇ ਲਈ Rs 70/m^2 ਅਤੇ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੇ Rs 45/m^2 ਦਰ ਨਾਲ ਖਰਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਖਰਚ ਨਾਲ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?
7. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ k ਹੈ, ਇੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ।
8. ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਉੱਪਰ ਬਣੀ ਅਰਧ-ਚੱਕਰਕਾਰ ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਪਰਿਮਾਪ 10 m ਹੈ। ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪੂਰੀ ਖੁੱਲ੍ਹੀ ਖਿੜਕੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਰੋਸ਼ਨੀ ਆਵੇ।

9. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਰਣ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਲੰਬਾਈ $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ ਹੈ।

10. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = (x - 2)^4 (x + 1)^3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ,
    (i) ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ
    (ii) ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ
    (iii) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ

11. $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ r ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{4r}{3}$ ਹੈ।

13. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (a, b) ਤੇ f ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ R ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ α ਅਤੇ ਉਚਾਈ h ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਦੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੈ ਅਤੇ ਬੇਲਣ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ ਹੈ।

19 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

16. ਇੱਕ 10 m ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਵੇਲਣਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ 314 m^3/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਣਕ ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਭਰੀ ਗਈ ਕਣਕ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) 1 m/h (B) 0.1 m/h
(C) 1.1 m/h (D) 0.5 m/h

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਜਦੋਂ ਕਿ ਰਾਸ਼ੀ y ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ x ਬਾਬਤ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$) x ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) x ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜਦੋਂ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y, t ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $x = f(t)$ ਅਤੇ $y = g(t)$, ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇਕਰ } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- ਇੱਕ ਫਲਨ f
  (a) ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ
  (a, b) ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ
  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \geq 0$, ਹੈ।
  (b) ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ
  (a, b) ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ
  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \leq 0$ ਹੈ।
  (c) ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਅੱਚਲ ਰਹਿਤ ਹੈ ਜੇਕਰ
  $f(x) = c$, ਸਾਰੇ $x \in (a, b)$ ਇੱਥੇ c ਅੱਚਲ ਹੈ
- ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- **(ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਫਲਨ f ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ f ਹੈ।
  (i) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
  (ii) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ

ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਨਿਕਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(iii) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ c ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6. 15) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

- (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ f ਇੱਕ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in$ I ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, c ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

  (i) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

  f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (ii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (iii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) = 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

  ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

- ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ (Working Rule)

  ਕਦਮ 1. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ x ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  ਕਦਮ 2. ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਉ।

  ਕਦਮ 3. ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ।

  ਕਦਮ 4. ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, f ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, f ਦਾ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਤਿਕਾ **1**

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ
(Proofs in Mathematics)

❖ *Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry. Mathematical works do consist of proofs just as poems do consist of characters*
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਮਾਤ IX, X ਅਤੇ XI ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਥਨ, ਸੰਯੁਕਤ ਕਥਨ, ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਧਣ, ਉਲਟ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਅਤੇ ਅਨੁਮਾਨਤ ਕਥਨ, ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਅਤੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

A.1.2 ਸਬੂਤ ਕੀ ਹੈ? (What is a Proof?)

ਕਿਸੀ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਦੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਦੇ ਮਕਸਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਨੂੰ ਨਿਗਮਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਕੁਝ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਕੇਵਲ ਮੰਨੇ ਹੋਏ ਤਰਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਸਬੂਤ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਆਪਣੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਉਸਦੇ ਤੁੱਲ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੇਠਾਂ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਇਹ ਉਕਤੀ ਦਾ ਉਹ ਸਬੂਤ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਉਕਤੀ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

(i) **ਸਿੱਧੀ ਆਮਦ (Approach)** ਇਹ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੈ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂ ਕਲਪਿਤ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸਿੱਧੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ਹੈ ਤਾਂ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਸਮਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਬਦਲਣ ਤੇ)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$ (ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀ $ab = 0$ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$, $a, b \in$ **R** ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ ਜਾਂ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਸਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ ਜਾਂ $x + 0 = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ (Identity) ਗੁਣ ਦੇ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ਯਾ $x = 2$

ਇੱਥੇ p ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ "$x^2 - 5x + 6 = 0$" ਹੈ ਅਤੇ q ਨਤੀਜਾ ਕਥਨ "$x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$" ਹੈ।

ਕਥਨ p ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਨੂੰ, ਇਸ ਦੇ ਤੁੱਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ$(x - 3)(x - 2)$ ਤੋਂ ਬਦਲ ਕੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ r : "$(x - 3)(x - 2) = 0$" ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ ਦੋ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦੇ ਹਨ :

(i) ਵਿਅੰਜਕ $(x - 3)(x - 2)$ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਸਮਾਨ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$

ਦੂਜਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤਰਕ ਦੇ ਵੈਧ ਰੂਪ ਰਾਹੀਂ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ r ਪੂਰਵ ਕਥਨ ਜਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਥਨ (Premise) s: "$x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$" ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਗ (steps) ਦਾ ਮਕਸਦ ਬ੍ਰੇਕੇਟ (brackets) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਾਰਵਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਆਖਰੀ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਦੇ।

ਤਰਕ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤੁਲਤਾ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ।

p ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ "$p \Rightarrow q$" ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਜਿਹੜਾ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਫਲਨ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x_1) = f(x_2)$ ਭਾਵ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜਨ ਤੇ)

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2$ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow \quad \frac{2}{2} x_1 = \frac{2}{2} x_2$ (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਨਾਲ)

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

(ii) ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ, ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਿਧੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੂਪ ਨਿਗਮਿਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

N ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

(i) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $1 \in \mathrm{S}$ ਅਤੇ

(ii) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $k + 1 \in \mathrm{S}$ ਜਦੋਂ $k \in \mathrm{S}$, ਤਾਂ $\mathrm{S} = \mathbf{N}$

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਥਨ "$\mathrm{S}(n)$, $n = 1$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ" (ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਖਿਆਂ j ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ) ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ $n = k + 1$ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਹੈ (ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $k \geq j$), ਤਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n, ਜਿੱਥੇ $n \geq j$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\quad \mathrm{P}(n) : \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P(1) ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ,

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲਿਆ ਕਿ $P(k + 1)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ ਸੱਚ ਹੈ}$$

ਦੁਬਾਰਾ: $$A^{k+1} = A^k . A$$

ਕਿਉਂਕਿ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਗੁਣਾ ਰਾਹੀਂ)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $P(k + 1)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(n)$, n ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

(iii) ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂ ਸੱਖਣਾਪਣ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ

ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ, ਜਦੋਂ p ਨੂੰ ਕਈ ਕਥਨਾਂ r, s, t (ਮੰਨ ਲਉ) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $p = r \vee s \vee t$ (ਜਿੱਥੇ "$\vee$" ਪ੍ਰਤੀਕ "ਜਾਂ" ਲਈ ਹੈ)

ਜੇਕਰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ $$r \Rightarrow q;$$

$$s \Rightarrow q;$$

ਅਤੇ

$$t \Rightarrow q$$

ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸੰਭਵ ਹਾਲਤ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਕਥਨ "ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ" ਅਤੇ q ਕਥਨ

"$a = b \cos C + c \cos B$" ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਸਿਖਰ A ਤੋਂ BC (ਤੇ) ਲੰਬ AD ਖਿੱਚੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ p ਨੂੰ r, s ਅਤੇ t ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

r : ABC ਇੱਕ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle C$ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ।

s : ABC ਇੱਕ ਅਧਿਕਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ।

t : ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹਾਲਤ (i) ਜਦੋਂ $\angle A$, $\angle B$, ਅਤੇ $\angle C$ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ A1.1)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB, ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

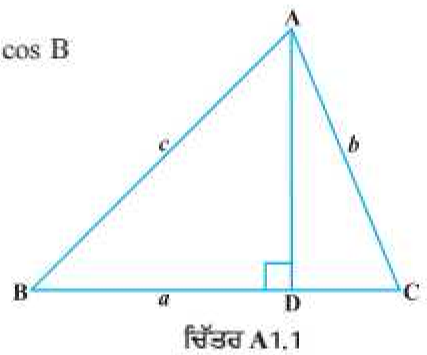
ਭਾਵ $BD = AB \cos B = c \cos B$

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

ਭਾਵ $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$



ਚਿੱਤਰ A1.1

ਹੁਣ

$$a = BD + CD$$
$$= c \cos B + b \cos C \quad \text{... (1)}$$

ਹਾਲਤ (ii) ਜਦੋਂ $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.2)

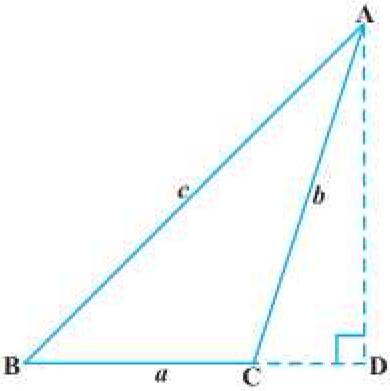
ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

ਭਾਵ $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ



ਚਿੱਤਰ A1.2

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180 - C)$

$= - \cos C$

ਭਾਵ $CD = - AC \cos C$

$= - b \cos C$

ਹੁਣ $a = BC = BD - CD$

ਭਾਵ $a = c \cos B - (- b \cos C)$

$a = c \cos B + b \cos C$ ... (2)

ਹਾਲਤ (iii) ਜਦੋਂ $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.3)

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ACB, ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

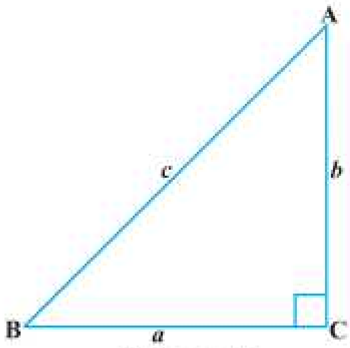
ਭਾਵ $BC = AB \cos B$

ਅਤੇ $a = c \cos B,$

$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B$ ... (3)



ਚਿੱਤਰ A1.3

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹਾਲਤ (i) ਤੋਂ $r \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਹਾਲਤ (ii) ਤੋਂ $s \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਤੇ ਹਾਲਤ (iii) ਤੋਂ $t \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ ਭਾਵ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਦਿੱਤੀ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(i) **ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ (*Reductio Ad Absurdum*)**:
ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਾਨਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੱਲ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਜਾਣੂ ਸੱਚ ਕਥਨ, ਝੂਠ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Prime Numbers) ਦਾ ਸਮੂਹ P ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਵਿਰੋਧ ਨੂੰ ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੀਮਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਵਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ

$$N = (P_1\ P_2\ P_3 ... P_k) + 1 \qquad ... (1)$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

N ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੂਜੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ N ਇੱਕ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ (Divisor) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਰਾਹੀਂ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਬਾਕੀ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ N ਦਾ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ ਸੂਚੀ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਇਹ, ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾ ਲਈ ਹੈ, ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੀ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨੀ ਧਾਰਨਾ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਹੈ, ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵੀ ਹੈ।)

(ii) **ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (contrapositive) ਦੇ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :**
ਇੱਥੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਨੂੰ ਸਾਬਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ)।

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਨਿਖੇਧਨ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ਇਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$" ਇਹ $p \Rightarrow q$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ਕਥਨ p ਹੈ ਅਤੇ $x_1 = x_2$ ਕਥਨ q ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ "ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ" ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਹੈ, ਭਾਵ, "ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2)$ ਤਾਂ $x_1 = x_2$" ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਹੈ "ਜੇਕਰ $x_1 \neq x_2$ ਤਾਂ $f(x_1) \neq f(x_2)$"

ਹੁਣ $$x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 \neq 2x_2$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

ਕਿਉਂਕਿ "$\sim q \Rightarrow \sim p$", ਅਤੇ "$p \Rightarrow q$" ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਬੂਤ ਪੂਰਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, Invertible ਹੈ ਤਾਂ A, Non-singular ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਿਖਣ ਤੇ $p \Rightarrow q$ ਜਿੱਥੇ p ਕਥਨ "ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, invertible ਹੈ" ਅਤੇ q ਕਥਨ "A, non-singular ਹੈ।"

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੋਇਆ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ A, Invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂA, invertible ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ, $\sim q \Rightarrow \sim p$.

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਹੈ ਤਾਂ A non-singular ਹੈ।

(iii) ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ (counter example) ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :

ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਾਲਤ ਵੀ ਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਕਲਪਿਤ ਵਿਆਪੀਕਰਣ ਦੇ ਜਾਇਜ਼ ਸਬੂਤ ਜਾਨਣ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ਾਂ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਸੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਫ਼ਾਇਦੇਮੰਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ ਸਾਬਿਤ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੱਭ ਸਕੀਏ। ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਨਾ ਮੰਨਣ ਵਾਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਉਕਤੀ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਖੰਡਨ, ਉਕਤੀ $\sim (p \Rightarrow q)$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਮਾਤਰ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਕਥਨ ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ $(2^{2^n} + 1)$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਸੀ :

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹਾਲਾਂਕਿ, ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵੇਖਣ ਤੇ ਇਹ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਠੀਕ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4294967297 = 641 \times 6700417$ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ (1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਖ਼ੁਦ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਕਿ "ਹਰੇਕ n ਦੇ ਲਈ $2^{2^n} + 1$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\forall n \in \mathbf{N}$" ਝੂਠ ਹੈ।

ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਕਿ $2^{2^5} + 1$ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ "ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਨੂੰ ਖੰਡਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ + 1 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ" ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।" ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ਇਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਇਹ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹਨ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ" ਸੱਚ ਹੈ। ਪਰ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ "$\phi(x) = |x|$" ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਨੂੰ ਜਾਂਚੀਏ, ਕਿ ਜਿਹੜਾ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ "ਝੂਠ ਹੈ। ਫਲਨ "$\phi(x) = |x|$" ਦਾ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ "$\phi(x) = |x|$" ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਭਾਵ, "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ" ਦੇ ਖੰਡਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅੰਤਿਕਾ 2

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling)

A.2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰਾਲੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਰੁਪਾਂਤਰਣ ਹੀ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੈ।ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਰੁਚੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਜਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਹਿਤ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ(Models)ਦੀ ਰਚਨਾ, ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ, ਆਲੇਖਾਂ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰਾਂ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ, ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਗਣਿਤਕ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਧੇਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਇੱਕ ਵੱਖਰੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਲਨ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

A.2.2 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਉਂ ? (Why Mathematical Modelling?)

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕ ਗਣਿਤ, ਬੀਜ ਗਣਿਤ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਆਦਿ ਦੇ ਸ਼ਾਬਦਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੈ। ਕਦੇ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀਜਨਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਗਏ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਸਰਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਜਿਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਣਿਤਕ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਅਨੇਕ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕੌਸ਼ਲ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਕਿਸੇ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜਦੋਂ ਨਦੀ ਨੂੰ ਪਾਰ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋਵੇ)

(ii) ਕਿਸੇ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਗੋਲਾ ਸੁੱਟਣ ਵਾਲੇ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਮਾਧਿਅਮ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ, ਗਰੁੱਤਾਆਕਰਸ਼ਨ g ਆਦਿ ਚਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋਵੇ)।

(iii) ਕਿਸੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਸਿਖਰਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ)।

(iv) ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(v) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਕਿ ਦਿਲ ਦੇ ਰੋਗੀਆਂ ਨੂੰ ਲਿਫਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਰਜਿਤ ਕਿਉਂ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਮਨੁੱਖੀ ਸ਼ਰੀਰ ਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਣੇ)।

(vi) ਧਰਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(vii) ਖੜੀ ਫਸਲ ਨਾਲ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਦਾਲਾਂ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਫਸਲ ਦੇ ਕੱਟਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(viii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸ਼ਰੀਰ ਵਿੱਚ ਖੂਨ ਦਾ ਆਇਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਖੂਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(ix) ਸਾਲ 2009 ਈ. ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦ ਕਿ ਸਾਲ 2009 ਈ. ਤੱਕ ਇੰਤਜਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕਰੋਗੇ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਗਿਆਨਵਾਚਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੋ ਉਹ ਵੀ ਬਿਨਾਂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ। ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਲੋੜ ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਾਂਗੇ।

A.2.3 ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Principles of Mathematical Modelling)

ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤ ਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਸਿਧਾਂਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਸਰੂਪ ਲਗਭਗ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

(i) ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਅਸੀਂ ਮਾਡਲ ਕਿਉਂ ਖੋਜ ਰਹੇ ਹਾਂ)।

(ii) ਮਾਡਲ ਦੇ ਲਈ ਪੈਰਾਮੀਟਰ/ਚਲ ਨੂੰ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੋ (ਅਸੀਂ ਕੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ)।

(iii) ਉਪਲਬਧ ਢੁੱਕਵੇਂ/ਸੰਗਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ)।

(iv) ਪ੍ਰਯੋਗ ਯੋਗ ਪ੍ਰਾਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਪੂਰਵਧਾਰਨਾ, ਕਲਪਨਾ)।

(v) ਸ਼ਾਸ਼ਕ/ਪ੍ਰਬੰਧਕ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

(vi) ਪਹਿਚਾਣੋ :

(a) ਸਮੀਕਰਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

(b) ਗਣਨਾ ਜੋ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(c) ਹੱਲ ਜੋ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(vii) ਉਹਨਾਂ ਪਰੀਖਣਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ :

(a) ਮਾਡਲ ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਹੋਣਾ।

(b) ਮਾਡਲ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ

(viii) ਉਹਨਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜੋ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰ ਸਕਣ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

ਪਗ 1: ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

ਪਗ 2: ਪੈਰਾਮੀਟਰ /ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਨਾ।

ਪਗ 3: ਗਣਿਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਪਗ 4: ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀ ਮੂਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (ਸਮੱਸਿਆ) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ (ਪਰਿਣਾਮ) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

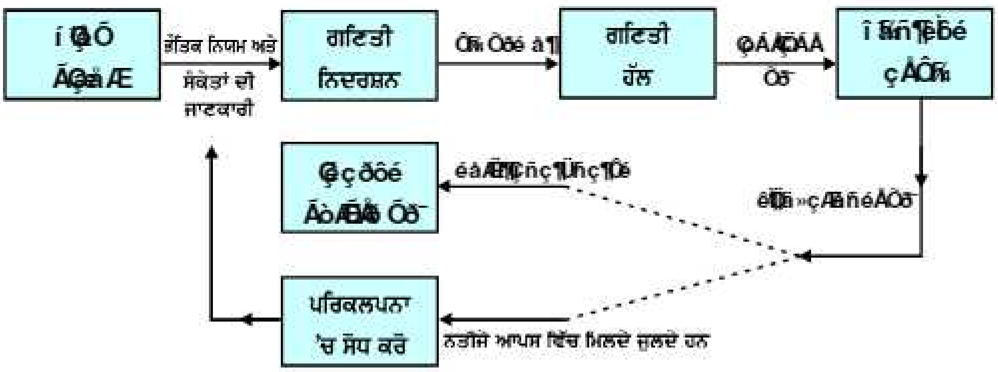
ਪਗ 5: ਜੇਕਰ ਪਰਿਣਾਮ ਲਗਭਗ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰੋ ਨਤੀਜਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ /ਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਦ 2 ਤੇ ਜਾਓ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. "ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ" ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ AB ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਮੀਨਾਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.2)। ਮੰਨ ਲਉ PQ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਾਪਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੈ; ਜਿਸ ਦੀ ਅੱਖ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $PQ = h$ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ H ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਕੋਣ α ਹੈ ਅਤੇ $l = QB = PC$



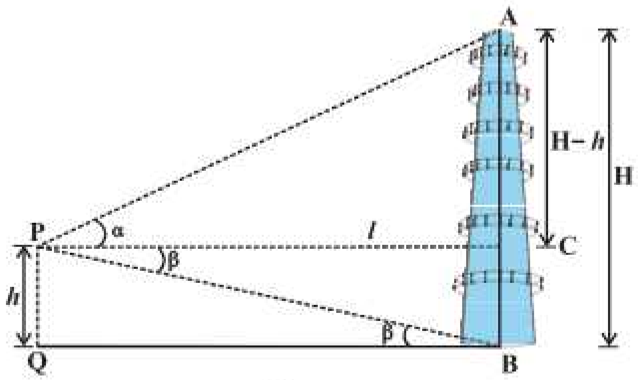
ÇÚ¼åö A.2.1

ਹੁਣ $$\tan\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

ਜਾਂ $$H = h + l\tan\alpha \qquad \text{... (1)}$$

ਪਗ 3: ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪੈਰਾਮੀਟਰ h, l ਅਤੇ α ਦੇ ਮੁੱਲ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਹਨ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (1) ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 4: ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਅਧਾਰ ਨਾ ਪਹੁੰਚਣਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ l ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇ, ਤਦ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਅਧਾਰ B ਦਾ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਨਿਵਾਣ ਕੋਣ β ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ Δ PQB



ਚਿੱਤਰ A.2.2

ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\tan\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ ਜਾਂ } l = h\cot\beta$$

ਪਗ 5: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਚਰਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ h, l, α ਅਤੇ β ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਨ ਪਤਾ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਵਸਾਇਕ ਫਰਮ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਉਤਪਾਦ P_1, P_2 ਅਤੇ P_3 ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਤੋਂ ਦੋ ਗਾਹਕ F_1 ਅਤੇ F_2 ਖਰੀਦ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀ ਸੀਮਤ ਮਾਤਰਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਓ, ਜੋ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਭਲੀਭਾਂਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੋ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ A ਦਾ ਰੂਪ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} P_1 \quad P_2 \quad P_3 \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ B .... ਹੈ, ਜੋ ਉਤਪਾਦ P_1, P_2 ਅਤੇ P_3 ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3, ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ B ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ;

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} R_1 \; R_2 \; R_3 \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

ਪਗ 3. ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (ਜੋ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} R_1 \; R_2 \; R_3 \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਸ ਨਾਲ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀਆਂ ਫਰਮਾਇਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇ ਮਾਡਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ, ਜਦ ਕਿ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ R_1 ਦੀਆਂ 330 ਇਕਾਈਆਂ, R_2 ਦੀਆਂ 455 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} R_1 \quad R_2 \quad R_3 \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1 ਦੀਆਂ 355 ਇਕਾਈਆਂ। R_2 ਦੀਆਂ 467 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 147 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ

ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੀ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ A ਨੂੰ A_1 ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ, ਜਿੱਥੇ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕ ਲੋਕ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

ਜਿੱਥੇ R_1 ਦੀਆਂ 311, R_2 ਦੀਆਂ 436 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 138 ਇਕਾਈਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਅਰਥਾਤ R_1 ਦੀਆਂ 330, R_2 ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।

> ***ਟਿੱਪਣੀ :*** ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਪੂਰਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕਾਂ ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ A_1 ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਰਮ ਦੋਵੇਂ ਗਾਹਕਾਂ ਦੇ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪੁੱਛਗਿੱਛ : ਦਿੱਤੇ B ਅਤੇ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ, ਫਰਮ ਦੇ ਮਾਲਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕੇ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਪੁੱਛਗਿੱਛ ਦਾ ਉੱਤਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ R_1, R_2, R_3 ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ R_1 ਦੀਆਂ 330 R_2 ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3, ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਬਣਾਈਆਂ ਹਨ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ P_1 ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ, P_2 ਦੀਆਂ y ਅਤੇ P_3 ਦੀਆਂ z ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਤਪਾਦ P_1 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 3, P_2 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 7 ਅਤੇ P_3 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਵੇਖੋ) ਅਤੇ R_1 ਦੀਆਂ ਕੁੱਲ 330 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_1 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_2 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਅਤੇ $$3y + 7z = 140 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_3 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ (ਉਪਯੁਕਤ) ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

ਪਗ 3. ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 20, y = 35$ ਅਤੇ $z = 5$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਮ P_1 ਦੀਆਂ 20, P_2 ਦੀਆਂ 35 ਅਤੇ P_3 ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਕੋਈ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਨਿਰਮਾਤਾ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਹੈ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕੇਵਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦਾ ਫੈਸਲਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ F_1 ਨੇ P_3 ਦੀਆਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਮੰਗੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਮਾਤਾ ਉਸਦੀਆਂ ਕੇਵਲ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਇੱਕ ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ M_1 ਅਤੇ M_2 ਦਵਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। M_1 ਦੀਆਂ 20,000 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 40,000 ਬੋਤਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਵਾਈ ਬਣਾਉਣ ਹਿੱਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕੇਵਲ 45,000 ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੀ ਦਵਾ ਭਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। M_1 ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘੰਟੇ ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 1 ਘੰਟਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 66 ਘੰਟੇ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। M_1 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ M_2 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 7 ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਆਪਣੀ ਉਤਪਾਦਨ ਯੋਜਨਾ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣਾਈ ਜਾਵੇ ?

ਪਗ 1. ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਮਹੱਤਵ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਦਵਾਈਆਂ M_1 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਵਾ M_1 ਦੀਆਂ x ਅਤੇ ਦਵਾ M_2 ਦੀਆਂ y ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ M_1 ਦੀਆਂ

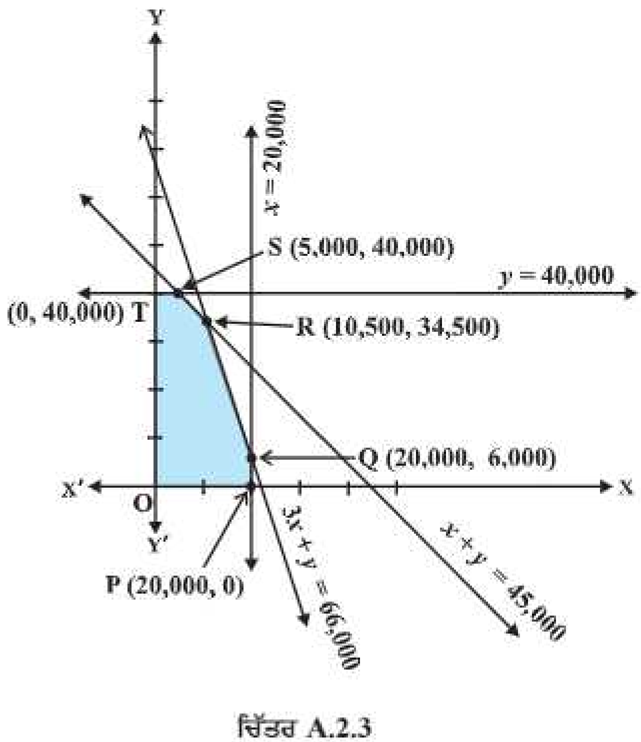
ਬੋਤਲਾਂ ਤੇ ਲਾਭ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ M_2 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ ਲਾਭ 7 ਰੁਪਏ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (objective function), ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ (ਰੇਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 12 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ)।

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 20000 \\ y \leq 40000 \\ x + y \leq 45000 \\ 3x + y \leq 66000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

ਪਗ 3. ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (constraints) (1) ਦੇ ਅਧੀਨ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ OPQRST ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.3) ਬਿੰਦੂਆਂ O, P, Q, R, S ਅਤੇ T ਕੋਨਿਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) ਅਤੇ (0, 40000) ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A.2.3

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ :

$$P\ (0, 0) \text{ ਤੇ } Z = 0$$

$$P\ (20000, 0) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 = 160000$$

$$Q\ (20000, 6000) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$$

$$R\ (10500, 34500) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$$

$$S = (5000, 40000) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$$

$$T = (0, 40000) \text{ ਤੇ } Z = 7 \times 40000 = 280000$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $x = 10500$ ਅਤੇ $y = 34500$ ਤੇ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ 325500 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ (ਉਤਪਾਦਕ) ਨੂੰ 325500 ਰੁਪਏ ਦਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ M_1 ਦੀਆਂ 10500 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 34500 ਬੋਤਲਾਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਕੋਈ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੇ ਕੁੱਝ ਲਾਗਤ (ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਲ ਲਾਗਤ) ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੰਪਨੀ ਉਸ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮੁੱਲ ਤੇ ਵੇਚਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਾਭ-ਹਾਨੀ ਦੇ ਪਰੀਖਣ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਲਾਗਤ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਰ। ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿਰਾਇਆ, ਟੈਕਸ ਆਦਿ)। ਜਦ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਸਮੱਗਰੀ, ਪੈਕਿੰਗ ਆਦਿ) ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸਿੱਧਾ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਾਡਲ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵੇਚਣ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ (ਕੰਪਨੀ)ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਧਨ ਮਹੱਤਮ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਿਤ ਇਕਾਈ ਤੁਰੰਤ ਵੇਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਤਪੰਨ ਅਤੇ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ।

C = ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

I = ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

P = ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

ਸਾਡੀ I ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾ (assumption) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ C ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ :

ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ $= a$ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ),

ਚਰ ਲਾਗਤ $= b$ (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ)

ਅਤੇ $C = a + bx$ ... (1)

ਨਾਲ ਹੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ I ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ ਮੁੱਲ s (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ) ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathrm{I} = sx$ ... (2)

ਲਾਭ P ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{I} - \mathrm{C} \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\, x - a \qquad \ldots (3) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x, C, I, P, a, b, ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿੱਚ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਸਵਤੰਤਰ x

ਆਸ਼ਰਿਤ (ਨਿਰਭਰ) C, I, P

ਪੈਰਾਮੀਟਰ a, b, s

ਉਤਪਾਦਕ ਨੂੰ x, a, b, s, ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ P ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਸੰਬੰਧ (3) ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ (ਨਾ ਕੋਈ ਲਾਭ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਹਾਨੀ) ਦੇ ਲਈ P = 0, ਅਰਥਾਤ, $x = \dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ।

ਪਗ 4 ਅਤੇ 5 ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਕੁਝ ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $x=\dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਹਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਅਵਾਸਤਵਿਕ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਡਲ ਉਪਯੁਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਧਨ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੰਬੰਧ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,x} = s - b$$

ਭਾਵ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ P ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ, ਰਾਸ਼ੀ $s - b$ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਚਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਧੂ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਅਧਿਕ ਮਾਤਰਾ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਚਲ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਵੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਲੀਟਰ ਖਾਰਾ ਜਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ ਲੀਟਰ 250 g ਖਾਰਾ ਹੈ। 200 g/L ਖਾਰਾ ਵਾਲਾ ਖਾਰਾ ਜਲ, 25 L/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਣ ਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1 ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = y(t)$ ਦੁਆਰਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਆਰੰਭ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t (ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ) ਤੇ, ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਉਪਸਥਿਤ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (ਕਿਲੋਗਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਸੂਚਿਤ (ਪ੍ਰਗਟ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $t = 0$, ਅਰਥਾਤ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ y ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ, ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ 5 kg/min (ਕਿਉਂਕਿ $25 \times 200 \text{ g} = 5 \text{ kg}$) ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਾਰਾ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min

(ਕਿਉਂਕਿ t ਸਮੇਂ ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ $\frac{y}{1000}$ kg ਹੈ।)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ t ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40} y = 5 \qquad \dots (1)$$

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਨਤੀਜਾ /ਪਰਿਣਾਮ (1) ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \quad \text{ਜਾਂ} \quad y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \dots (2)$$

ਜਿੱਥੇ C ਇੰਟਰਗਰੇਸ਼ਨ/ਅਨੁਕੂਲਨ ਅਚੱਲ ਹੈ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ $t = 0, y = 250$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $250 = 200 + C$

ਜਾਂ
$$C = 50$$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \dots (3)$$

ਜਾਂ $$\frac{y-200}{50} = e^{\frac{t}{40}}$$

ਜਾਂ $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \quad \ldots (4)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਉਹ ਸਮਾਂ t ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ y kg ਹੈ।

ਚਰਣ 4. ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਮੇਸ਼ਾ $y > 200$ ਕਿਉਂਕਿ $e^{\frac{t}{40}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟੈਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਤਰਾ ਲਗਭਗ 200 kg (ਪਰੰਤੂ ਠੀਕ ਠੀਕ 200 kg ਨਹੀਂ) ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t > 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $0 < y - 200 < 50$ ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $200 < y < 250$ ਅਧੀਨ ਟੈਂਕ ਦੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 200 kg ਅਤੇ 250 kg ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਨੇਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (application) ਬਹੁਤ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਗੰਭੀਰਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾਪੂਰਵਕ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇ ਜਿਵੇਂ ਗਣਿਤੀ, ਭੌਤਿਕੀ, ਗਣਿਤੀ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ, ਸੰਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ (operations research), ਜੀਵ ਗਣਿਤ (Bio-mathematics) ਆਦਿ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ (ਲਗਭਗ) ਸਮਾਨਅਰਥੀ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਅੱਜ ਵੀ ਕਈ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਡਲ ਅਜੇ ਬਣਨੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਬਹੁਤ ਜਟਿਲ ਹਨ ਜਾਂ ਵਿਕਸਿਤ ਮਾਡਲ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪੇਚੀਦਾ ਹਨ।

ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਅਤੇ ਸੁਪਰ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ (Super Computers) ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਨੇ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ, ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਯੋਗ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਤੇਜ਼ (fast) ਅਤੇ ਉੱਨਤ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਧੇਰੇ ਯਥਾਰਥ ਮਾਡਲਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧ ਸਹਿਮਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਕੋਲ, ਕਿਸੇ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਯੁਕਤ ਵਿਭਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਚਲਾਂ ਦੇ ਮੁਲਅੰਕਣ ਹਿੱਤ ਵਧੇਰੇ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਸਿਧਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਨਾਂ ਛੇ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕੜੇ ਦੇ ਲਈ ਬਹੁਤ ਹੱਦ ਤੱਕ ਵਿਅਰਥ (accurate) ਮਾਡਲਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਠੀਕ ਠੀਕ ਮੁਲੰਕਣ ਹਿੱਤ ਸਾਨੂੰ ਚਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਵੱਡੀ ਜਟਿਲ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਆਪਣੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੱਸਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵਾਤਾਵਰਣ (environment), ਸਮੁੰਦਰ ਵਿਗਿਆਨ (oceanography), ਜੰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਿਯੰਤਰਣ (population control) ਆਦਿ ਦੇ ਲੋਕ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ (world models) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਖਿਆ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਾਖਾਵਾਂ ਗਣਿਤ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ, ਭੌਤਿਕੀ, ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਸਮਾਜ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਇਸ ਚੁਣੌਤੀ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਸਾਹਸਪੂਰਵਕ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ
   (ii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ
   (iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ
   (iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (v) (a) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (b) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (c) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਤਾਂ ਸਕਰਮਕ
   (d) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ
   (e) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ

3. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

5. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

9. (i) {1, 5, 9}, (ii) {1}

12. T_1 ਅਤੇ T_3 ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

13. ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਿੱਜਵਾਚਕ

14. ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 2x + c$, $c \in \mathbf{R}$ ਦਾ

15. B

16. C

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਨਹੀਂ

2. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ
   (ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (iii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (iv) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ
   (v) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ

7. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

9. ਨਹੀਂ 10. ਹਾਂ 11. D 12. A

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

3. ਨਹੀਂ

4. $n!$

5. ਹਾਂ 6. A 7. B

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{6}$ 3. $\frac{\pi}{6}$ 4. $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ 6. $-\frac{\pi}{4}$ 7. $\frac{\pi}{6}$ 8. $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ 10. $\frac{-\pi}{4}$ 11. $\frac{3\pi}{4}$ 12. $\frac{2\pi}{3}$

13. B 14. B

ਅਭਿਆਸ 2.2

3. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x$ 4. $\frac{x}{2}$ 5. $\frac{\pi}{4} - x$ 6. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

7. $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ 8. $\frac{\pi}{4}$ 9. $\frac{x+y}{1-xy}$ 10. $\frac{\pi}{3}$

11. $\frac{-\pi}{4}$ 12. $\frac{17}{6}$ 13. B 14. D

15. B

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{6}$ 11. $x = \frac{\pi}{4}$ 12. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

13. D 14. C

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C 9. B 10. D

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B - C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ 9. $x = 3, y = 3$ 10. $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3, y = -4$ 12. $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ 17. $k = 1$

19. (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

20. Rs 20160 21. A 22. B

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A=\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A 12. B

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

3. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $x=-1$ 6. $x=\pm 4\sqrt{3}$

7. (a) ਬਜ਼ਾਰ -I ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 46000
ਬਜ਼ਾਰ-II ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 53000
(b) Rs 15000, Rs 17000

8. $X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 9. C 10. B 11. C

ਅਭਿਆਸ 4.1

1. (i) 18 2. (i) 1, (ii) x^3-x^2+2
5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 6. 0
7. (i) $x=\pm\sqrt{3}$, (ii) $x=2$ 8. (B)

ਅਭਿਆਸ 4.2

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15
3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 4. (i) $y=2x$, (ii) $x-3y=0$ 5. (D)

ਅਭਿਆਸ 4.3

1. (i) $M_{11}=3, M_{12}=0, M_{21}=-4, M_{22}=2, A_{11}=3, A_{12}=0, A_{21}=4, A_{22}=2$
(ii) $M_{11}=d, M_{12}=b, M_{21}=c, M_{22}=a$
$A_{11}=d, A_{12}=-b, A_{21}=-c, A_{22}=a$
2. (i) $M_{11}=1, M_{12}=0, M_{13}=0, M_{21}=0, M_{22}=1, M_{23}=0, M_{31}=0, M_{32}=0, M_{33}=1,$
$A_{11}=1, A_{12}=0, A_{13}=0, A_{21}=0, A_{22}=1, A_{23}=0, A_{31}=0, A_{32}=0, A_{33}=1$

(ii) $M_{11}=11, M_{12}=6, M_{13}=3, M_{21}=-4, M_{22}=2, M_{23}=1, M_{31}=-20, M_{32}=-13, M_{33}=5$
$A_{11}=11, A_{12}=-6, A_{13}=3, A_{21}=4, A_{22}=2, A_{23}=-1, A_{31}=-20, A_{32}=13, A_{33}=5$

3. 7 **4.** $(x-y)(y-z)(z-x)$ **5.** (D)

ਅਭਿਆਸ 4.4

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a=-4, b=1$ **15.** $A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

ਅਭਿਆਸ 4.5

1. ਸੰਗਤ **2.** ਸੰਗਤ **3.** ਅਸੰਗਤ
4. ਸੰਗਤ **5.** ਅਸੰਗਤ **6.** ਸੰਗਤ

7. $x=2, y=-3$ **8.** $x=\frac{-5}{11}, y=\frac{12}{11}$ **9.** $x=\frac{-6}{11}, y=\frac{-19}{11}$

10. $x=-1, y=4$ **11.** $x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{-3}{2}$

12. $x=2, y=-1, z=1$ **13.** $x=1, y=2, z=-1$

14. $x=2, y=1, z=3$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$, $x=1, y=2, z=3$

16. ਪਿਆਜ਼ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 5
ਕਣਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8
ਚੌਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8

ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. 1   3. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $-2(x^3 + y^3)$ 6. xy 7. $x = 2, y = 3, z = 5$

8. A   9. D

ਅਭਿਆਸ 5.1

2. f, $x = 3$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
3. (a), (b), (c) ਅਤੇ (d) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।
5. f, $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ
6. $x = 2$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ   7. $x = 3$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
8. $x = 0$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ   9. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ
10. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ   11. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ
12. $x = 1$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ   13. $x = 1$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
14. $x = 1$ ਅਤੇ $x = 3$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
15. ਕੇਵਲ $x = 1$ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
16. ਲਗਾਤਾਰ   17. $a = b + \dfrac{2}{3}$
18. λ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ f, $x = 0$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ f, λ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
20. $x = \pi$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।   21. (a), (b) ਅਤੇ (c) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।
22. ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ cosine ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cosecant ਫਲਨ $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ secant ਫਲਨ $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cotangent ਫਲਨ, $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
23. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

24. ਹਾਂ, ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। 25. ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

26. $k = 6$ 27. $k = \dfrac{3}{4}$ 28. $k = \dfrac{-2}{\pi}$

29. $k = \dfrac{9}{5}$ 30. $a = 2, b = 1$ 34. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$ 2. $-\cos x \sin(\sin x)$ 3. $a \cos(ax + b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a\cos(ax + b)\sec(cx + d) + c\sin(ax + b)\tan(cx + d)\sec(cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$ 8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$ 2. $\dfrac{2}{\cos y - 3}$ 3. $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$ 5. $-\dfrac{(2x + y)}{(x + 2y)}$ 6. $-\dfrac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$

7. $\dfrac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}$ 8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ 9. $\dfrac{2}{1 + x^2}$ 10. $\dfrac{3}{1 + x^2}$

11. $\dfrac{2}{1 + x^2}$ 12. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$ 13. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$ 14. $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

ਅਭਿਆਸ 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$ 2. $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$

3. $3x^2 e^{x^3}$ 4. $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1 + e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$

6. $e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x > 0$

8. $\dfrac{1}{x\log x}, x > 1$

9. $-\dfrac{(x\sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$

10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right)\sin(\log x + e^x), x > 0$

ਅਭਿਆਸ 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\ [\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x\log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

4. $x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x}\cos x \log 2$

5. $(x + 3)(x + 4)^2(x + 5)^3(9x^2 + 70x + 133)$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1 + \log x \,.\, \log(\log x)] + 2x^{\log x-1} \,.\, \log x$

8. $(\sin x)^x(x\cot x + \log \sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] + (\sin x)^{\cos x}[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$

10. $x^{x\cos x}[\cos x \,.\, (1 + \log x) - x\sin x \log x] - \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x[1 - x\tan x + \log(x\cos x)] + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1} + y^x\log y}{x^y\log x + xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y - x\log y}{x - y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$ **15.** $\dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$

ਅਭਿਆਸ 5.6

1. t^2 **2.** $\dfrac{b}{a}$ **3.** $-4\sin t$ **4.** $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos2\theta}{2\sin2\theta-\sin\theta}$ **6.** $-\cot\dfrac{\theta}{2}$ **7.** $-\cot 3t$ **8.** $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ **10.** $\tan\theta$

ਅਭਿਆਸ 5.7

1. 2 **2.** $380\, x^{18}$ **3.** $-x\cos x - 2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$ **5.** $x(5 + 6\log x)$ **6.** $2e^x(5\cos 5x - 12\sin 5x)$

7. $9\,e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$ **8.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$ **10.** $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\operatorname{cosec}^2 y$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $27(3x^2 - 9x + 5)^8(2x - 3)$ **2.** $3\sin x\cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2x+7}}+\dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log(\log x)}{x}\right]$, $x > 1$

8. $(a\sin x - b\cos x)\sin(a\cos x + b\sin x)$

9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x}(\cos x + \sin x)(1 + \log(\sin x - \cos x))$, $\sin x > \cos x$

10. $x^x(1+\log x)+ax^{a-1}+a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

12. $\frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$ 13. 0 17. $\frac{\sec^3 t}{at}, 0<t<\frac{\pi}{2}$

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (a) 6π cm²/cm (b) 8π cm²/cm
2. $\frac{8}{3}$ cm²/s 3. 60π cm²/s 4. 900 cm³/s
5. 80π cm²/s 6. 1.4π cm/s
7. (a) –2 cm/min (b) 2 cm²/min
8. $\frac{1}{\pi}$ cm/s 9. 400π cm³/cm 10. $\frac{8}{3}$ cm/s
11. (4, 11) and $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ 12. 2π cm³/s
13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ 14. $\frac{1}{48\pi}$ cm/s 15. Rs 20.967
16. Rs 208 17. B 18. D

ਅਭਿਆਸ 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ (b) $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$
5. (a) $(-\infty,-2)$ and $(3,\infty)$ (b) $(-2, 3)$
6. (a) $x<-1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x>-1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

   (b) $x>-\frac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x<-\frac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

   (c) $-2<x<-1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $x<-2$ ਅਤੇ $x>-1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

   (d) $x<-\frac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $x>-\frac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

   (e) (1, 3) ਅਤੇ (3, ∞), ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ (– ∞, –1) ਅਤੇ (– 1, 1) ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

8. $0 < x < 1$ ਅਤੇ $x > 2$ 12. A, B

13. D 14. $a = -2$ 19. D

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 3$ (ii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -2$
   (iii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 10$ (iv) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ
2. (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -1$; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ
   (ii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 3$; ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ
   (iii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 4$; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 6$
   (iv) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 2$; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 4$
   (v) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ
3. (i) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 0$
   (ii) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= -2$
   $x = -1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= 2$
   (iii) $x = \frac{\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= \sqrt{2}$
   (iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ,ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= \sqrt{2}$
   $x = \frac{7\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= -\sqrt{2}$
   (v) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= 19$
   $x = 3$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 15$
   (vi) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 2$
   (vii) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{1}{2}$
   (viii) $x = \frac{2}{3}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$
5. (i) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -8$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 8$
   (ii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -1$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \sqrt{2}$
   (iii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -10$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 8$
   (iv) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 3$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 19$

6. ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ = 113 ਇਕਾਈ

7. $x = 2$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -39$, $x = 0$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 25$.

8. $x = \frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\frac{5\pi}{4}$ 'ਤੇ

9. ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 89; $x = -2$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 2\pi$; $x = 0$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 0$

13. 12, 12   14. 45, 15   15. 25, 10   16. 8, 8

17. 3 cm   18. $x = 5$ cm

21. ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

22. $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm   27. A   28. D   29. C

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. $b\sqrt{3}$ cm²/s

3. (i) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

4. (i) $x < -1$ ਅਤੇ $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ 6. Rs 1000

8. ਲੰਬਾਈ $= \frac{20}{\pi+4}$ m, ਚੌੜਾਈ $= \frac{10}{\pi+4}$ m

10. (i) $x = \frac{2}{7}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ   (ii) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ

(iii) $x = -1$ 'ਤੇ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ

11. ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{5}{4}$. ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 1$

14. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ 16. A

ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ

ਅਭਿਆਸ 5

ਪ੍ਰਮੇਯ 5(ਪੰਨਾ 190 'ਤੇ ਸਿਰਲੇਖ ''ਪ੍ਰਮੇਯ'' ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੈ)

(i) ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ $f(x) = e^x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

ਜੇਕਰ $f(x) = e^x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot 1 \quad [\text{ਕਿਉਂਕਿ} \ \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1] \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ਹੈ।

(ii) ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ $f(x) = \log_e x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e (x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \quad [\text{ਕਿਉਂਕਿ} \ \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1] \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$ ਹੈ।