ਗਣਿਤ

(ਨੌਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

I5C1E7

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਮੁਫ਼ਤ ਦਿੱਤੀ
ਜਾਣੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਕਾਊ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਰੀਵਾਈਜ਼ਡ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2023 .... 1,50,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਅਨੁਵਾਦਕ : • ਡਾ. ਖੁਸ਼ਵਿੰਦਰ ਕੁਮਾਰ
ਬੀ.ਸੀ.ਐਮ. ਕਾਲੇਜ ਆੱਫ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ, ਲੁਧਿਆਣਾ
• ਰਾਕੇਸ਼ ਕੁਮਾਰ 'ਦੀਪਕ'
ਸਰਕਾਰੀ ਸੀ.ਸੈ.ਸਕੂਲ, ਦੌਲਤ ਸਿੰਘ ਵਾਲਾ, ਐਸ.ਏ.ਐਸ.ਨਗਰ

ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਅਫ਼ਸਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਨੋਵਾ ਪਬਲੀਕੇਸ਼ਨਜ਼, ਸੀ-51, ਫੋਕਲ ਪੁਆਇੰਟ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਹੋਇਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਖਿਅਕ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਾਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਪ੍ਰਫ਼ੁਲਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ਼-ਨਾਲ਼ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ ਵੱਲੋਂ ਨੌਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਤੋਂ ਪ੍ਰਵਾਨਗੀ ਲੈਣ ਉਪਰੰਤ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

'ਸਮਾਜਿਕ ਨਿਆਂ, ਅਧਿਕਾਰਤਾ ਅਤੇ ਘੱਟ ਗਿਣਤੀ ਵਿਭਾਗ' ਪੰਜਾਬ।

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਚੇਅਰਮੈਨ

ਜਯੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮੀਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਚੇਅਰਮੈਨ, ਆਈ.ਯੂ.ਸੀ.ਏ.ਏ., ਗਣੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨਿਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ.ਸਿੰਕਲੇਅਰ, ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅੰਜਲੀ ਲਾਲ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਸੈਕਟਰ-14, ਗੁੜਗਾਵਾਂ

ਅੰਜੂ ਨਿਰੂਲਾ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ) ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਪੁਸ਼ਪਾਂਜਲੀ ਇੰਨਕਲੇਵ, ਪੀਤਮ ਪੁਰਾ, ਦਿੱਲੀ

ਉਦੇ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਏ.ਕੇ.ਵਜਲਵਾਰ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਐਸ.ਵੈਂਕਟਰਮਨ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਜੀ.ਪੀ.ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਕੇ.ਏ.ਐਸ.ਐਸ.ਵੀ.ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਵ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਭੁਵਨੇਸ਼ਵਰ

ਮਹਿੰਦਰ ਆਰ.ਗਜਰੇ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਅਤੁਲ ਸਕੂਲ, ਅਤੁਲ, ਜ਼ਿਲ੍ਹਾ ਵਲਸਾਦ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਰਾਮਾ ਬਾਲਾਜੀ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਕੇ.ਵੀ.ਮੇਗ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ, ਸੈਂਟ ਜੋਹਨਜ਼ ਰੋਡ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਵੇਦ ਡੁਡੇਜਾ, ਉਪ ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ (ਰਿਟਾ.), ਗੌ.ਗ.ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਸੈਨਿਕ ਵਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ

ਸੰਜੇ ਮੁਦਗੱਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ.ਆਈ.ਈ.ਟੀ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ਼ਸ਼ੀਧਰ ਜਗਦੀਸ਼ਨ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੈਂਬਰ, ਗਵਰਨਿੰਗ ਕਾਊਂਸਿਲ, ਸੈਂਟਰ ਫ਼ਾਰ ਲਰਨਿੰਗ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਹਿੰਦੀ ਅਨੁਵਾਦਕ :

ਜੀ.ਪੀ. ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਹਰੀਸ਼ਵਰ ਪ੍ਰਸਾਦ ਸਿੰਨਹਾ, ਸੀ-210, ਰਾਜਾਜੀ ਪੁਰਮ, ਲਖਨਊ

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਰਾਮ ਅਵਤਾਰ, ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਦਿਸੰਬਰ 2005 ਤੱਕ)

ਆਰ.ਪੀ.ਮੋਰੀਆ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਜਨਵਰੀ 2006 ਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ਾ -ਸੂਚੀ

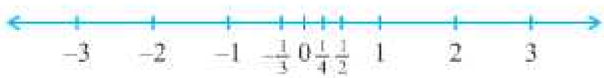
L4H8K6

ਅਧਿਆਇ 1

ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

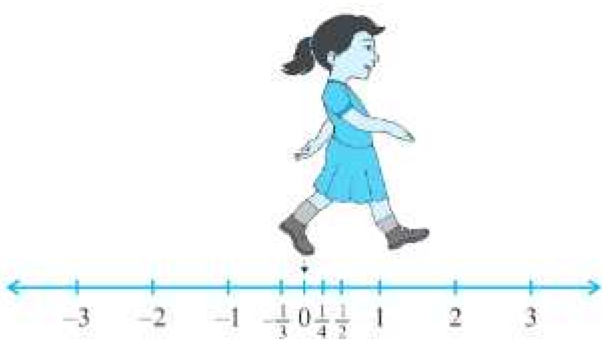
1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.1 : ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ

ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਸੀਂ ਸਿਫਰ ਤੋਂ ਚੱਲਣਾ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਇਸ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹੋ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 1.2

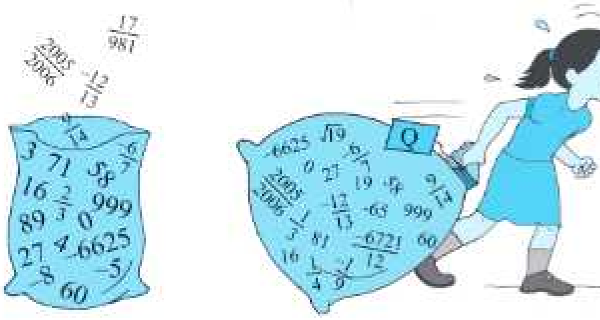
ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਚੱਲਣਾ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠੀਆਂ ਕਰਦੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਲਈ ਇੱਕ ਥੈਲਾ ਤਿਆਰ ਰੱਖੋ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ 1, 2, 3 ਆਦਿ ਵਰਗੀਆਂ ਸਿਰਫ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਚੁੱਕਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਸੂਚੀ ਸਦਾ ਵਾਸਤੇ ਵਧਦੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। (ਇਹ ਸੱਚ ਕਿਉਂ ਹੈ ?) ਇਸ ਲਈ ਹੁਣ ਤੁਹਾਡੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਰ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਇਕੱਠ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ **N** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਘੁੰਮ ਜਾਓ ਅਤੇ ਉਲਟੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦੇ ਹੋਏ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਚੁੱਕੋ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਵੀ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ। ਹੁਣ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (**whole numbers**) ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ **W** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਨੇਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀਆ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਲਉ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤੁਹਾਡਾ ਇਹ ਨਵਾਂ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਕੀ ਹੈ ? ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (**integers**) ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ **Z** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕੀ ਅਜੇ ਵੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਕੀ ਬਚਦੀਆਂ ਹਨ ? ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਵੇਂ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, ਜਾਂ $\frac{-2005}{2006}$ ਆਦਿ ਬਾਕੀ ਬਚਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (**rational numbers**) ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਨੂੰ **Q** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



"rational" ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਸ਼ਬਦ "ratio" ਤੋਂ ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ **Q** ਅੰਗਰੇਜੀ ਸ਼ਬਦ 'quotient' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ:

ਸੰਖਿਆ 'r' ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਇਸਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ (ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜੋਰ ਕਿਉਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $q \neq 0$ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।)

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, -25 ਨੂੰ $\frac{-25}{1}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ; ਜਿੱਥੇ $p = -25$ ਅਤੇ $q = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਨਿਰੂਪਣ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, ਆਦਿ। ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਜਾਂ ਭਿੰਨ) ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਨੂੰ ਇੱਕ

ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $q \neq 0$ ਅਤੇ p ਤੇ q ਦਾ 1 ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ [ਅਰਥਾਤ p ਅਤੇ q ਸਹਿਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (coprime numbers) ਹਨ]। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਤੁੱਲ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ $\frac{1}{2}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ, ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹਨ ਜਾਂ ਗਲਤ ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

(i) ਹਰੇਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਹਰੇਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਗਲਤ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਪਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀ ਹੈ।

(ii) ਸਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਨੂੰ $\frac{m}{1}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iii) ਗਲਤ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{3}{5}$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੱਲ 1 : ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ r ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਲੱਭਣ ਲਈ ਅਸੀਂ r ਅਤੇ s ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੋ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ $\frac{r+s}{2}$, r ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\frac{3}{2}$, 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਪ੍ਰੀਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਚਾਰ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਚਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ : $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ ਅਤੇ $\frac{7}{4}$।

ਹੱਲ 2 : ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਕਲਪ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਹੀ ਪਗ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭ ਲਈਆਂ ਜਾਣ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ 5 + 1 ਅਰਥਾਤ 6 ਨੂੰ ਹਰ ਲੈ ਕੇ 1 ਅਤੇ 2 ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਰਥਾਤ $1 = \frac{6}{6}$ ਅਤੇ $2 = \frac{12}{6}$ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ ਅਤੇ $\frac{11}{6}$ ਸਾਰੀਆਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ: $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ਅਤੇ $\frac{11}{6}$।

ਟਿੱਪਣੀ: ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਸਿਰਫ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਲੱਭਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਪਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰ ਅਨੁਭਵ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿਚਕਾਰ ਅਨੰਤ ਰੂਪਾਂ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ, **ਕਿਸੇ ਦੋ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ**।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਦੇਖੀਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਲਿਆ ਹੈ ? ਅਜੇ ਤੱਕ ਤਾਂ ਨਹੀਂ। ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕਾਂ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਚੀਆਂ ਰਹਿੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਚੁੱਕੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਨਾ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਹਨ, ਬਲਕਿ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਹਨ। ਹੈਰਾਨੀ ਜਨਕ ਗੱਲ ਤਾਂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਵਿਚਾਲੇ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬਾਕੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:

1. ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਬਚੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ?
2. ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪਹਿਚਾਣਦੇ ਹਾਂ ? ਅਰਥਾਤ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਾਲੇ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਕ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ?

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਅਗਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣਗੇ।

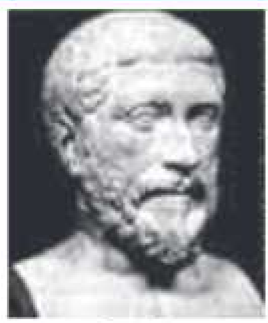
ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ ?
2. 3 ਅਤੇ 4 ਵਿਚਕਾਰ ਛੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭੋ।
3. $\frac{3}{5}$ ਅਤੇ $\frac{4}{5}$ ਵਿਚਕਾਰ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭੋ।
4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹਨ ਜਾਂ ਗਲਤ ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।
   (i) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਹਰੇਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   (iii) ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

1.2 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਪਿਛਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅਜਿਹਿਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਉਹ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਸਨ, ਜਿਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਵਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੀ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਇਸ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਲਗਭਗ 400 ਈ. ਪੂ. ਗ੍ਰੀਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਅਤੇ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਦੇ ਸ਼ਗਿਰਦਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **(irrational numbers)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ਗਿਰਦ, ਕਰੋਟੋਨ ਕੇ ਹਿਪਾਕਸ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਲਗਾਈਆ ਗਈਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਮਿਥਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਹਿਪਾਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਦੁਰਭਾਗ ਪੂਰਨ ਅੰਤ ਰਿਹਾ। ਚਾਹੇ ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਨ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਖੋਜ ਹੋਵੇ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸ ਖੋਜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਦੁਨੀਆਂ ਨੂੰ ਉਜਾਗਰ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ।



ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ
(569 ਈ. ਪੂ. – 479 ਈ. ਪੂ.)
ਚਿੱਤਰ 1.3

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਰਸਮੀ ਪਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦੇਈਏ।

ਸੰਖਿਆ 's' ਨੂੰ **ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ (irrational number)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਇਸਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਹਿਲਾ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ:

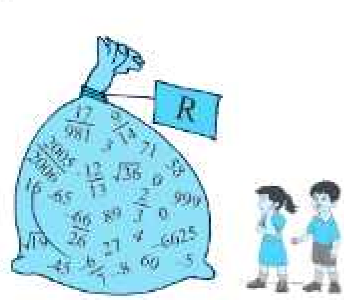
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਚਿੰਨ੍ਹ "$\sqrt{\ }$" ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਦ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $\sqrt{4} = 2$ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ 2 ਅਤੇ -2 ਦੋਨੋ ਹੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਹਨ।

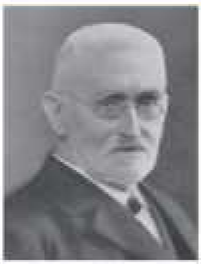
ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਕੁੱਝ ਅਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੇਕ ਵਰਗਮੂਲਾਂ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ π ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਦੇ ਸ਼ਗਿਰਦਾਂ ਨੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ 425 ਈ.ਪੂ. ਦੇ ਨੇੜੇ–ਤੇੜੇ ਸਾਈਰੀਨ ਦੇ ਥਿਉਡੋਰਸ ਨੇ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ ਅਤੇ $\sqrt{17}$ ਵੀ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ (irrationality) ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਜਮਾਤ 10 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ π ਦਾ ਸਬੰਧ ਹੈ, ਹਜਾਰਾਂ ਵਰ੍ਹਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਸੱਭਿਆਚਾਰ ਇਸ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਰਹੇ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ 1700 ਈ. ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਹੀ ਲੈਂਬਰਟ ਅਤੇ ਲੈਜਾਂਲਰੇ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਅਗਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ੍ਹ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ 0.10110111011110... ਅਤੇ π ਅਪਰਿਮੇਯ ਕਿਉਂ ਹਨ?

ਆਉ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਪੁੱਛੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਲਾ ਥੈਲਾ ਲਉ। ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਪਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁਣ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਬਚੀ ਰਹੇਗੀ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਹੈ "ਨਹੀਂ"। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕਠੀਆਂ ਲਈਆਂ ਗਈਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਤੋਂ ਜੋ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ **ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real number)**



ਦਾ ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ **R** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਜਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਵਿਲੱਖਣ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ **(real number line)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਜੀ. ਕੈਂਟਰ (1845–1918)

ਚਿੱਤਰ 1.4

1870 ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਰਮਨ ਹਿਸਾਬਦਾਨਾਂ, ਕੈਂਟਰ ਅਤੇ ਡੇਡੇਕਿੰਡ ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਸੀ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਵਿੱਲਖਣ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

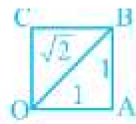
ਆਰ. ਡੇਡੇਕਿੰਡ(1831–1916)

ਚਿੱਤਰ 1.5

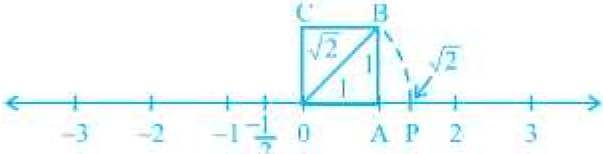
ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਥਾਨ ਸਥਾਪਿਤ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{2}$ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਿਤ (ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ) ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ $\sqrt{2}$ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਵਰਗ OABC ਲਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 1.6)। ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਧਿਆਨ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਿਖਰ O ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਨਾਲ ਅਨੁਰੂਪ ਬਣਿਆ ਰਹੇ, ਚਿੱਤਰ 1.6 ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਾਨੰਤਰਿਤ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 1.7)।



ਚਿੱਤਰ 1.6

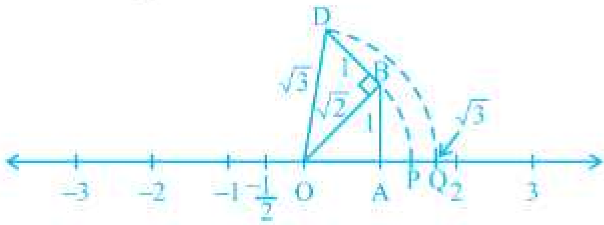


ਚਿੱਤਰ 1.7

ਹੁਣੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ OB = $\sqrt{2}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਪਰਕਾਰ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ O ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ OB ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਮੰਨਕੇ ਇੱਕ ਚਾਪ (arc) ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{2}$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{3}$ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 1.7 ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਈਏ।



ਚਿੱਤਰ 1.8

OB 'ਤੇ ਇਕਾਈ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਲੰਬ BD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਚਿੱਤਰ 1.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤਦ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ $OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਪਰਕਾਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ O ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ OD ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ Q ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਬਿੰਦੂ Q, $\sqrt{3}$ ਦਾ ਅਨੁਸਾਰੀ ਹੈ।

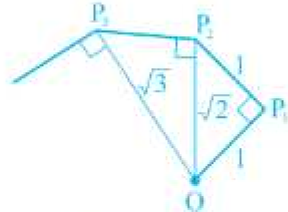
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{n-1}$ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਣ ਪਿੱਛੋਂ ਤੁਸੀਂ $\sqrt{n}$ ਦਾ ਸਥਾਨ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹਨ ਜਾਂ ਗਲਤ ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।
   (i) ਹਰੇਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ $\sqrt{m}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ m ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   (iii) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਜੇ ਨਹੀ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{5}$ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

4. **ਜਮਾਤ ਲਈ ਕਿਰਿਆ (ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਰਚਨਾ) :** ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸ਼ੀਟ ਲਉ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਰਗਮੂਲ (square root spiral) ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਬਿਦੂ O ਲਉ ਅਤੇ ਇਕਾਈ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਰੇਖਾਖੰਡ (line segment) OP ਖਿੱਚੋ। ਇਕਾਈ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ OP_1 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾਖੰਡ P_1P_2 ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 1.9)। ਹੁਣ OP_2 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾਖੰਡ P_2P_3 ਖਿੱਚੋ। ਤਦ OP_3 'ਤੇ ਇਕਾਈ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲਾ ਲੰਬ ਰੇਖਾਖੰਡ P_3P_4 ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ OP_{n-1} 'ਤੇ ਇਕਾਈ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲਾ ਲੰਬ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚਕੇ ਤੁਸੀਂ ਰੇਖਾਖੰਡ $P_{n-1}P_n$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਬਿਦੂ O. P_1, P_2, P_3,...., P_n,.... ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਉਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਕੇ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ... ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸੁੰਦਰ ਚੱਕਰਾਕਾਰ (spiral) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਵਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 1.9 : ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਰਚਨਾ

1.3 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ

ਇਸ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਲੱਗ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ (expansions) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਫਰਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਵੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਜਿਆਦਾ ਜਾਣੂੰ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਆਰੰਭ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ । ਬਾਕੀਆਂ (remainder) 'ਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (pattern) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ ਅਤੇ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

3.333...	0.875	0.142857...
3) 10	8) 7.0	7) 1.0
9	64	7
10	60	30
9	56	28
10	40	20
9	40	14
10	0	60
9		56
1		40
		35
		50
		49
		1

ਬਾਕੀ : 1, 1, 1, 1, 1...
ਭਾਜਕ : 3

ਬਾਕੀ : 6, 4, 0
ਭਾਜਕ : 8

ਬਾਕੀ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,...
ਭਾਜਕ : 7

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੀਆਂ-2 ਗੱਲਾਂ ਦਾ ਧਿਆਨ ਰੱਖਿਆ ਹੈ? ਤੁਹਾਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਤਿੰਨ ਗੱਲਾਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(i) ਕੁੱਝ ਪਗਾਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਜਾਂ ਤਾਂ 0 ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਖੁਦ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਬਾਕੀਆਂ (remainder) ਦੀ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲਿਆਂ (entries) ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਭਾਜਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ($\frac{1}{3}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੁਹਰਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 3 ਹੈ, $\frac{1}{7}$ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀਆਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਛੇ ਦਾਖਲ 326451 ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ)।

(iii) ਜੇ ਬਾਕੀਆਂ (remainder) ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਭਾਗਫਲ (quotient) ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲਾ ਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ($\frac{1}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ 3 ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{1}{7}$ ਲਈ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲਾ ਖੰਡ 142857 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)।

ਭਾਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਮੂਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਇਹ $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) ਦੇ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। q ਨਾਲ p ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ ਨਾਲ ਦੋ ਮੁੱਖ ਗੱਲਾਂ ਵਾਪਰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਕਦੇ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਅਤੇ ਤਦ ਸਾਨੂੰ ਬਾਕੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲੀ ਕਤਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਸਥਿਤੀ (i) : ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$\frac{7}{8}$ ਵਾਲੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{7}{8}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ 0.875 ਹੈ। ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਸੀਮਿਤ ਪਗਾਂ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਦਾ ਅੰਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਂਤ **(terminating)** ਦਸ਼ਮਲਵ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ (ii) : ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਕਦੇ ਨਹੀਂ ਬਚਦਾ।

$\frac{1}{3}$ ਅਤੇ $\frac{1}{7}$ ਵਾਲੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਜਾਰੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲਾ ਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ **(non-terminating recurring)** ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, $\frac{1}{3} = 0.3333...$ ਅਤੇ $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ ਹੈ।

ਇਹ ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਕਿ $\frac{1}{3}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ 3 ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $0.\bar{3}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਖੰਡ 142857 ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਨੂੰ $0.\overline{142857}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਉੱਪਰ ਲਗਾਇਆ ਬਾਰ, ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਉਸ ਖੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, 3.57272 . . . ਨੂੰ $3.5\overline{72}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਣ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਣ।

ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਚੱਲਣ ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ 3.142678 ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ 1.272727..., ਅਰਥਾਤ $1.\overline{27}$ ਵਰਗੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਹੈ, ਹਾਂ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ, ਪਰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਸ਼ਾਂਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਤਾਂ ਸੌਖੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ 3.142678 ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ 3.142678 ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਦੋਂ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $0.3333... = 0.\bar{3}$ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ $0.\bar{3}$ ਕੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ 'x' ਹੈ।

$$x = 0.3333...$$

ਹੁਣ, ਇਹ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਕੁੱਝ ਜੁਗਤ ਲੜਾਉਣੀ ਪਵੇਗੀ।

ਇੱਥੇ, $10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$

ਹੁਣ, $3.3333... = 3 + x$, ਕਿਉਂਕਿ $x = 0.3333...$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $10x = 3 + x$

x ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$9x = 3$$

ਅਰਥਾਤ $x = \frac{1}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $1.272727... = 1.\overline{27}$ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $x = 1.272727...$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਦੁਹਰਾਉ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ 100 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$100\,x = 127.272727...$$

$$100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

ਇਸ ਲਈ, $$100\,x - x = 126, \text{ ਅਰਥਾਤ } 99\,x = 126$$

ਅਰਥਾਤ $$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $x = 0.2\overline{35}$ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਦੇਖੋ ਕਿ 2 ਦਾ ਦੁਹਰਾਉ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰ ਖੰਡ 35 ਦਾ ਦੁਹਰਾਉ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਦੁਹਰਾਉ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ 100 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$100\,x = 23.53535...$$

ਇਸ ਲਈ, $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

ਇਸ ਲਈ, $$99\,x = 23.3$$

ਅਰਥਾਤ $$99\,x = \frac{233}{10}, \text{ ਜਿਸ ਨਾਲ } x = \frac{233}{990} \text{ ਹੋਇਆ।}$$

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ, ਅਰਥਾਤ $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸ਼ਾਤ ਆਵਰਤੀ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਾਲੀ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ:

ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਉਹ ਸੰਖਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਤ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਗੁਣ ਦੇ ਮੁਤਾਬਕ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਰਤੀ **(non-terminating non-recurring)** ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਉੱਪਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦੱਸੇ ਗਏ ਗੁਣ ਵਰਗਾ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਲਟਾ: ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇ, ਅਪ੍ਰਮੇਯ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਿਛਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ 0.10110111011110... ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $s = 0.10110111011110...$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ ਆਵਰਤੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਗੁਣ ਮੁਤਾਬਕ ਇਹ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੁਸੀਂ s ਵਰਗੀਆਂ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੈਦਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ π ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ? ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਤੱਕ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

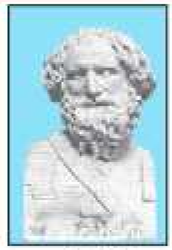
(ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ : $\frac{22}{7}$ ਨੂੰ π ਦਾ ਇੱਕ ਨੇੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\pi \neq \frac{22}{7}$ ਹੈ।)

ਵਰਿਆਂ ਤੋਂ ਹਿਸਾਬਦਾਨਾਂ ਨੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਸੀਂ ਵਿਭਾਜਨ ਵਿਧੀ (division method) ਨਾਲ $\sqrt{2}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿੱਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਇੱਕ ਰੌਚਕ ਗੱਲ ਹੈ ਕਿ ਸੁਲਬਸੂਤਰਾਂ (ਜੀਵਾ -ਨਿਯਮਾਂ) ਵਿੱਚੋਂ, ਜੋ ਵੈਦਿਕ ਯੁੱਗ (800 ਈ.ਪੂ. - 500 ਈ.ਪੂ.) ਦੇ ਗਣਿਤਿਕ ਗ੍ਰੰਥ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ $\sqrt{2}$ ਦਾ ਇੱਕ ਨੇੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਇਹ ਹੈ:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਉੱਪਰ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। π ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਇਤਿਹਾਸ ਕਾਫ਼ੀ ਰੋਚਕ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਯੂਨਾਨ ਦਾ ਸ਼੍ਰੇਸ਼ਟ-ਬੁੱਧੀ ਵਿਅਕਤੀ ਆਰਕੀਮੀਡੀਜ਼ ਹੀ ਉਹ ਪਹਿਲਾ ਵਿਅਕਤੀ ਸੀ ਜਿਸਨੇ π ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭਿਆ ਸੀ। ਉਸਨੇ ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਕਿ $3.140845 < \pi < 3.142857$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਰਿਆ ਭੱਟ (476 – 550 ਈ.) ਨੇ ਜੋ ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ ਸੀ, ਚਾਰ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਸ਼ੁੱਧ π ਦਾ ਮੁੱਲ (3.1416) ਲੱਭਿਆ ਸੀ। ਤੇਜ਼ ਚਾਲ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਅਤੇ ਵਿਕਸਿਤ ਵਿਧੀਆਂ (algorithms) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 1.24 ਟ੍ਰਿਲੀਅਨ ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਧ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ π ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।



ਆਰਕੀਮੀਡੀਜ਼
(287 ਈ.ਪੂ.–212 ਈ.ਪੂ.)
ਚਿੱਤਰ 1.10

ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $\frac{1}{7}$ ਅਤੇ $\frac{2}{7}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ਹੈ। $\frac{1}{7}$ ਅਤੇ $\frac{2}{7}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਅਸ਼ਾਤ ਅਣ-ਅਵਾਰਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਕਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 0.150150015000150000. . . ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਭਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ:

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਲੰਬੀ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ

ਇਹ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕੀ ਹਨ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿਵੇਂ ?

[ਸੰਕੇਤ: $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੱਭਣ ਸਮੇਂ ਬਾਕੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਕਰੋ।]

3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ:

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. $0.99999\ldots$ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਤੋਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ? ਆਪਣੇ ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਸਹਿਪਾਠੀਆਂ ਨਾਲ ਉੱਤਰ ਦੀ ਸਾਰਥਕਤਾ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।

5. $\frac{1}{17}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਦੁਹਰਾਉਣ ਵਾਲੇ ਖੰਡਾ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਲਈ ਭਾਗ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ।

6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਉ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ 1 ਦੇ ਬਿਨਾਂ ਹੋਰ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਸ਼ਾਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਨਿਰੂਪਣ (ਵਿਸਤਾਰ) ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ q ਨੂੰ ਕਿਹੜਾ ਗੁਣ ਜ਼ਰੂਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ?

7. ਅਜਿਹਿਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਤ ਅਣ-ਅਵਾਰਤੀ ਹੋਣ।

8. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{5}{7}$ ਅਤੇ $\frac{9}{11}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭੋ।

9. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ-ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ:

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ 'ਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ:

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ (commutative), ਸਹਿਚਾਰਤਾ (associative) ਅਤੇ ਵੰਡਕਾਰੀ (distributive) ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੀਏ,

ਘਟਾਈਏ, ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਜਾਂ ਭਾਗ ਕਰੀਏ (ਸਿਫ਼ਰ ਛੱਡ ਕੇ) ਤਦ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ [ਅਰਥਾਤ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੀਮਿਤ (closed) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾਂ, ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਅਤੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰ, ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਸਦਾ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $(\sqrt{2})-(\sqrt{2}), (\sqrt{3}.\sqrt{3})$ ਅਤੇ $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਤਦ $2+\sqrt{3}$ ਅਤੇ $2\sqrt{3}$ ਕੀ ਹਨ? ਕਿਉਂਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ ਆਵਰਤੀ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਗੱਲ $2+\sqrt{3}$ ਅਤੇ $2\sqrt{3}$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ: $2+\sqrt{3}$ ਅਤੇ $2\sqrt{3}$ ਵੀ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ: $\sqrt{5} = 2.236..., \sqrt{2} = 1.4142..., \pi = 3.1415...$ ਹਨ।

ਤਦ $7\sqrt{5} = 15.652....\ \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$ ਹਨ।

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142..., \pi - 2 = 1.1415...$

ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਾਰਤੀ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ ਨੂੰ ਜੋੜੋ।

ਹੱਲ: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $6\sqrt{5}$ ਨੂੰ $2\sqrt{5}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $8\sqrt{15}$ ਨੂੰ $2\sqrt{3}$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3\times5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜੋ ਕਿ ਸਹੀ ਹਨ:

(i) ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ, ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

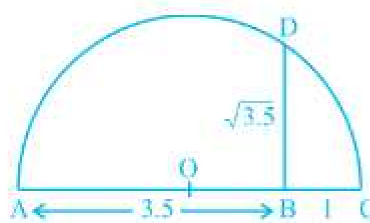
(ii) ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ (non-zero) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੀਏ, ਘਟਾਈਏ, ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਜਾਂ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਿੱਟਾ ਪਰਿਮੇਯ ਜਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਕੁੱਝ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਕੱਢਣ ਦੀ ਪ੍ਰੀਕ੍ਰਿਆ 'ਤੇ ਕਰਾਂਗੇ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜੇ a ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $\sqrt{a} = b$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $b^2 = a$ ਅਤੇ $b > 0$ । ਇਹੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਤਦ $\sqrt{a} = b$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $b^2 = a$ ਅਤੇ $b > 0$ ਹੈ।

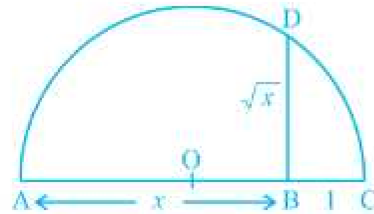
ਅਨੁਭਾਗ 1.2 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{n}$ ਨੂੰ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦਿਖਾਵਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਵੇਂ $\sqrt{x}$ ਨੂੰ, ਜਿੱਥੇ x ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਮਾਇਤੀ (geometrically) ਰੂਪ ਨਾਲ ਲੱਭਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $x = 3.5$ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੀਏ। ਅਰਥਾਤ ਅਸੀਂ $\sqrt{3.5}$ ਨੂੰ ਜਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਲੱਭਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 1.11

ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ 3.5 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾਉਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ B ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ AB = 3.5 ਇਕਾਈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 1.11)। B ਤੋਂ 1 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ C ਮੰਨ ਲਉ। AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਲੱਭ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ O ਮੰਨ ਲਉ। O ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ OC ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਮੰਨਕੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉ। AC 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ B ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਨੂੰ D ਉੱਤੇ ਕੱਟੇ। ਤਦ, BD = $\sqrt{3.5}$ ਹੈ।

ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ, $\sqrt{x}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਜਿੱਥੇ x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ B ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ AB = x ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ C ਲਓ ਜਿਸ ਨਾਲ BC = 1 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ। ਤਦ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀ $x = 3.5$ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ, ਸਾਨੂੰ BD = $\sqrt{x}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 1.12)।



ਚਿੱਤਰ 1.12

ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1.12 ਵਿੱਚ, Δ OBD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣ ਹੈ।

ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $\frac{x+1}{2}$ ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ ਇਕਾਈ

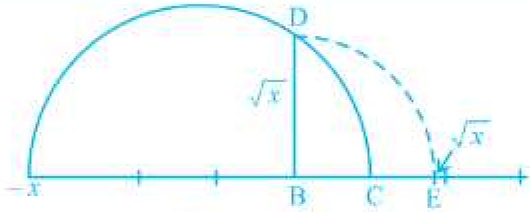
ਹੁਣ, OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ BD = $\sqrt{x}$ ਹੈ।

ਇਸ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਦਰਸ਼ੀ ਅਤੇ ਜਮਾਇਤੀ ਵਿਧੀ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{x}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{x}$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ BC ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਮੰਨ ਲਈਏ, B ਨੂੰ ਸਿਫਰ ਮੰਨ ਲਈਏ ਅਤੇ C ਨੂੰ 1 ਮੰਨ ਲਈਏ ਆਦਿ। B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ BD ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ E 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 1.13)। ਤਦ E, $\sqrt{x}$ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.13

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਘਣਮੂਲਾਂ, ਚੌਥੇ ਮੂਲਾਂ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ n ਵੇਂ ਮੂਲਾਂ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਵਰਗਮੂਲਾਂ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

$\sqrt[3]{8}$ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਘਣ 8 ਹੈ, ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਜ਼ਰੂਰ ਲਗਾ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ $\sqrt[3]{8} = 2$ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ $\sqrt[5]{243}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ b ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜਿਸ ਨਾਲ $b^5 = 243$ ਹੋਵੇ?

ਉੱਤਰ ਹੈ 3, ਇਸ ਲਈ $\sqrt[5]{243} = 3$ ਹੋਇਆ।

ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਕੀ ਤੁਸੀਂ $\sqrt[n]{a}$ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਿੱਥੇ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ?

ਮੰਨ ਲਉ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਤਦ $\sqrt[n]{a} = b$, ਜਦੋਂਕਿ $b^n = a$ ਅਤੇ $b > 0$। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਚਿੰਨ ਪ੍ਰਤੀਕ '' $\sqrt{\ }$ '' ਨੂੰ ਕਰਣੀ ਚਿੰਨ੍ਹ (radical sign) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਰਗਮੂਲਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜੋ ਵੱਖ ਵਖ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਬਾਕੀ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਅਤੇ ਸਰਬਸਮਤਾ (identities) ਨਾਲ, ਜਿੱਥੇ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ਨਾਲ, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਦ

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ:

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ਹੱਲ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

ਟਿੱਪਣੀ: ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸ਼ਬਦ "ਸਰਲ ਕਰਨਾ" ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿੱਥੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਅਨੁਭਾਗ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਹੀ ਸਮਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਜੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਹਰ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਨ (rationalise) ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ ਕੀ 'ਹਰ' ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗਮੂਲਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਦੇ 'ਹਰ' ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ

ਹਾਂ ਕਿ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਨੂੰ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ ਲੈਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਦਾ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਨ ਸੌਖਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ 0 ਅਤੇ $\sqrt{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ਦੇ ਹਰ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਰਬਸਮਤਾ (iv) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ਨੂੰ $2-\sqrt{3}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ਦੇ ਹਰ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਰਬਸਮਤਾ (iii) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ਦੇ ਹਰ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਹਰ ਵਿੱਚ ਵਰਗਮੂਲ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਜਾਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਕਰਣੀ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੋਵੇ), ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਬਦਲਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਹਰ ਦਾ *ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ* (*rationalising the denominator*) *ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।*

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਦੱਸੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ ?

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ π ਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਘੇਰੇ (ਮੰਨ ਲਉ c) ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿਆਸ (ਮੰਨ ਲਉ d) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਨਾਲ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ $\pi = \frac{c}{d}$ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਵਿਰੋਧ ਕਰਦਾ ਹੋਇਆ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ π ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਰੋਧ ਦੀ ਦਲੀਲ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਉਗੇ ?

4. ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ $\sqrt{9.3}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਓ।

5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ ਕਰੋ।

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਘਾਤ ਅੰਕ ਨਿਯਮ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸੀ ?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

ਇਹਨਾਂ ਉੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਨਿਯਮਾਂ (Laws of exponents) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਰੂਰ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ,

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

[ਇੱਥੇ a, n ਅਤੇ m ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a ਨੂੰ ਆਧਾਰ (base) ਅਤੇ m ਅਤੇ n ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕ (exponents) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ] ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ:

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ਕੀ ਹੈ ? ਮੁੱਲ 1 ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਅਧਿਐਨ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $(a)^0 = 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, (iii) ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ, ਤੁਸੀਂ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ,

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਭਾਂਗੇ ? ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ ਅੰਕ ਨਿਯਮ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂਕਿ ਆਧਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ (ਅੱਗੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਨਿਯਮ ਉੱਥੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਘਾਤ

ਅੰਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ)। ਪਰ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਕਥਨ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਇਹ ਸਮਝ ਲੈਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $4^{\frac{3}{2}}$ ਕੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਨੁਭਾਗ 1.4 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $\sqrt[n]{a}$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ:

ਮੰਨ ਲਉ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਾਂ $\sqrt[n]{a} = b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ $b^n = a$ ਅਤੇ $b > 0$ ਹੋਵੇ।

ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ $4^{\frac{3}{2}}$ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਮੰਨ ਲਉ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ m ਤੇ n ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ 1 ਦੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਝਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ $n > 0$ ਹੈ। ਤਦ,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਘਾਤ ਅੰਕ ਨਿਯਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ:

ਮੰਨ ਲਓ $a > 0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p ਅਤੇ q ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪੁੱਛੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੱਸਣ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਸਰਲ ਕਰੋ: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ਹੱਲ:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13\times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

ਅਭਿਆਸ 1.5

1. ਪਤਾ ਕਰੋ: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. ਪਤਾ ਕਰੋ: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. ਸਰਲ ਕਰੋ: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਇਸਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।
2. ਸੰਖਿਆ s ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਇਸਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਉਹ ਸੰਖਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ, ਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਰਤੀ ਹੈ, ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

5. ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈਣ ਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. ਜੇਕਰ r ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ s ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ, ਤਦ $r+s$ ਅਤੇ $r-s$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇ rs ਅਤੇ $\frac{r}{s}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇ $r \neq 0$ ਹੈ।

7. ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ:

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ਦੇ ਹਰ ਦਾ ਪਰਿਮੇਯੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

9. ਮੰਨ ਲਉ $a>0$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p ਅਤੇ q ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

J1P5Q3

ਅਧਿਆਇ 2

ਬਹੁਪਦ

2.1 ਜਾਣ ਪਛਾਣ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਉੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

ਅਤੇ,

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਿਸਮ ਦੇ ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ (*polynomial*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ (terminology) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਥਿਊਰਮ (*Remainder Theorem*), ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ (Factor Theorem) ਅਤੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਨ ਅਤੇ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਬਾਰੇ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

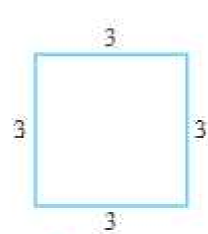
2.2 ਇੱਕ ਚੱਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਚਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਧਾਰਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅੱਖਰਾਂ $x, y, z,$ ਆਦਿ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹਨ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਵਿਅੰਜਕ, (ਇੱਕ ਅਚਲ) $\times x$ ਦੇ ਰੂਪ ਹਨ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵਿਅੰਜਕ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ

ਕਿ (ਇੱਕ ਅਚਲ) × (ਇੱਕ ਚਲ) ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ ਅਚਲ ਕੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅਚਲ ਨੂੰ a, b, c ਆਦਿ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਅੰਜਕ ਮੰਨ ਲਓ, ax ਹੋਵੇਗਾ।

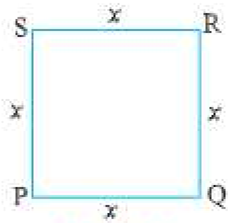
ਫਿਰ ਵੀ ਅਚਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰ ਅਤੇ ਚਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਚਲਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਦਾ ਸਮਾਨ ਬਣੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਪਰੰਤੂ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਲਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.1)। ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ (perimeter) ਕੀ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਰਗ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 4×3 ਅਰਥਾਤ 12 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਜੇ ਵਰਗ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ 10 ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪਰਿਮਾਪ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਪਰਿਮਾਪ 4×10 ਅਰਥਾਤ 40 ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.2), ਤਾਂ ਪਰਿਮਾਪ $4x$ ਇਕਾਈਆਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਨਾਲ ਪਰਿਮਾਪ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਵਰਗ PQRS ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਇਹ $x \times x = x^2$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। x^2 ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ਵਰਗੇ ਹੋਰ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨਾਲ ਵੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਹੁਣ ਤੱਕ ਲਏ ਗਏ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਰਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਰੂਪ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ (*polynomials in one variable*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ x ਚਲ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $x^3 - x^2 + 4x + 7$, ਚਲ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $3y^2 + 5y$, ਚਲ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $t^2 + 4$, ਚਲ t ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਬਹੁਪਦ $x^2 + 2x$ ਵਿੱਚ ਵਿਅੰਜਕ x^2 ਅਤੇ $2x$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਪਦ (*terms*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਬਹੁਪਦ $3y^2 + 5y + 7$ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਦ ਅਰਥਾਤ $3y^2$, $5y$ ਅਤੇ 7 ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਬਹੁਪਦ $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ਦੇ ਪਦ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਚਾਰ ਪਦ ਅਰਥਾਤ $-x^3$, $4x^2$, $7x$ ਅਤੇ -2 ਹਨ।

ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਾਂਕ (coefficient) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ਵਿੱਚ x^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -1 ਹੈ, x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 4 ਹੈ, x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 7 ਹੈ ਅਤੇ x^0 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -2 ਹੈ।

(ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ $x^0 = 1$ ਹੈ)। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $x^2 - x + 7$ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਕੀ ਹੈ? x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -1 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ 2 ਵੀ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ 2, -5, 7 ਆਦਿ ਅਚਲ ਬਹੁਪਦਾਂ (*constant polynomials*) ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। ਅਚਲ ਬਹੁਪਦ 0 ਨੂੰ **ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਇੱਕਠ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ ਇੱਕ ਅਤਿ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ ਅਤੇ $\sqrt[3]{y} + y^2$ ਵਰਗੇ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕ ਲਉ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇੱਥੇ ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਅਰਥਾਤ x^{-1} ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ -1 ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਾਲ, $\sqrt{x} + 3$ ਨੂੰ $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ $\frac{1}{2}$ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹੋ ਕਿ $\sqrt{x} + 3$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ? ਨਹੀਂ, ਇਹ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕੀ $\sqrt[3]{y} + y^2$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ? ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਜੇ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ ਚਲ x ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ $p(x)$ ਜਾਂ $q(x)$ ਜਾਂ $r(x)$, ਆਦਿ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੁਝ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 151 ਪਦ ਹਨ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y ਅਤੇ u^4 ਲਉ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਦ ਹੈ। ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਪਦ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ (*monomial*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ 'mono' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਇੱਕ")।

ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ:

$p(x) = x + 1$, $\quad q(x) = x^2 - x$, $\quad r(y) = y^{30} + 1$, $\quad t(u) = u^{43} - u^2$

ਇੱਥੇ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹਨ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਦੋ ਪਦ ਹਨ। ਸਿਰਫ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ (binomials) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ 'bi' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਦੋ")।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿਰਫ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ (*trinomials*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ 'tri' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਤਿੰਨ")। ਤਿੰਨ ਪਦੀਆਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ:

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$,

$r(u) = u + u^2 - 2$, $\quad t(y) = y^4 + y + 5$

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਵਾਲਾ ਪਦ ਕਿਹੜਾ ਹੈ ? ਇਹ ਪਦ $3x^7$ ਹੈ। ਇਸ ਪਦ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 7 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਬਹੁਪਦ $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ ਵਿੱਚੋਂ y ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਵਾਲਾ ਪਦ $5y^6$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ y ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 6 ਹੈ। ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਚਲ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (*degree of the polynomial*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਬਹੁਪਦ $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ਦੀ ਘਾਤ 7 ਹੈ ਅਤੇ ਬਹੁਪਦ $5y^6 - 4y^2 - 6$ ਦੀ ਘਾਤ 6 ਹੈ। ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਲੇ ਅਚਲ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਲੱਭੋ।

(i) $x^5 - x^4 + 3$ $\quad$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ $\quad$ (iii) 2

ਹੱਲ : (i) ਚਲ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ 5 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ 5 ਹੈ।

(ii) ਚਲ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਅੰਕ 8 ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਪਦ 2 ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ $2x^0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 0 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ 0 ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ ਅਤੇ $s(u) = 3 - u$ ਨੂੰ ਲਓ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝੀ ਗੱਲ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਹੈ। ਇੱਕ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਰੇਖੀ (*linear polynomial*) ਬਹੁਪਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਹੋਰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$ ਅਤੇ $2 - u$ ਹਨ। ਹੁਣ ਕੀ ਅਸੀਂ x ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਕਿਉਂਕਿ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਦ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਕੋਈ ਵੀ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਅਚਲ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $ay + b$, y ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਓ:

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ ਅਤੇ } x^2 + \frac{2}{5}x$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ ਬਹੁਪਦ ਘਾਤ 2 ਵਾਲੇ ਹਨ ? ਘਾਤ ਦੋ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਜਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (*quadratic polynomial*) ਕਿਹਾ

ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ ਅਤੇ $6 - y - y^2$ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 3 ਪਦ ਹੋਣਗੇ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਦੋਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਬਣਾ ਸਕੋਂ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ, $ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ $a \neq 0$ ਅਤੇ a, b, c ਅਚਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ay^2 + by + c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ $a \neq 0$ ਅਤੇ a, b, c ਅਚਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਤਿੰਨ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ (*cubic polynomial*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$ ਅਤੇ $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ ਹਨ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 4 ਪਦ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $a \neq 0$ ਅਤੇ a, b, c ਅਤੇ d ਅਚਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤਕ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਘਾਤ 1, ਘਾਤ 2 ਜਾਂ 3 ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਲੱਗਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ n ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਿੱਥੇ n ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਇੱਕ ਚਲ x ਵਿੱਚ, ਘਾਤ n ਵਾਲਾ ਬਹੁਪਦ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦਾ ਵਿਅੰਜਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ਜਿਥੇ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜੇ $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ (**zero polynomial**) ਮਿਲਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ 0 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਕੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ? ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $x^2 + y^2 + xyz$ (ਜਿੱਥੇ x, y ਅਤੇ z ਚਲ ਹਨ) ਤਿੰਨ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $p^2 + q^{10} + r$ (ਜਿਥੇ p, q ਅਤੇ r ਚਲ ਹਨ), $u^3 + v^2$ (ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v ਚਲ ਹਨ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਿੰਨ ਚਲਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਦਾ ਅਸੀਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ -ਕਿਹੜਾ ਬਹੁਪਦ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤੇ ਕਿਹੜਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚੋਂ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਲਿਖੋ।

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 ਘਾਤ ਦੇ ਦੋ ਪਦ ਦਾ ਅਤੇ ਘਾਤ 100 ਦੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਇੱਕ -ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।

4. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਲਿਖੋ।

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ-ਕਿਹੜਾ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਕਿਹੜਾ-ਕਿਹੜਾ ਬਹੁਪਦ ਦੋ ਘਾਤੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਬਹੁਪਦ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਹੈ:

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ (ਜ਼ੀਰੋ)

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਬਹੁਪਦ ਲਉ

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

ਜੇ $p(x)$ ਵਿੱਚ ਹਰ ਜਗ੍ਹਾ 'ਤੇ x ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 1 ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 1$ ਲਈ $p(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 4 ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ $p(-1)$ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਚਲਾਂ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $x = 1$ ਲਈ $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ ਦਾ ਮੁੱਲ

(ii) $y = 2$ ਲਈ $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ ਦਾ ਮੁੱਲ

(iii) $t = a$ ਲਈ $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ ਦਾ ਮੁੱਲ

ਹੱਲ : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ ਲਈ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ ਲਈ ਬਹੁਪਦ $q(y)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ ਲਈ ਬਹੁਪਦ $p(t)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x) = x - 1$ ਲਓ।

$p(1)$ ਕੀ ਹੈ ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $p(1) = 1 - 1 = 0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(1) = 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1, ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 2, $q(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $q(x) = x - 2$ ਹੈ।

ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ c ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ $p(c) = 0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਲਿਆਂਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਬਹੁਪਦ $(x - 1)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ $x - 1 = 0$, ਜਿਸ ਨਾਲ $x = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $p(x) = 0$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਸਮੀਕਰਣ $p(x) = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1, ਬਹੁਪਦ $x - 1$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਜਾਂ ਇਹ ਬਹੁਪਦ ਸਮੀਕਰਣ $x - 1 = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ (*root*) ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਚਲ ਬਹੁਪਦ 5 ਲਓ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਹੜੀ ਹੈ ? ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $5x^0$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ 5 ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਹੁਣ ਸਵਾਲ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ। ਪਰੰਪਰਾ ਦੇ ਮੁਤਾਬਕ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ -2 ਅਤੇ 2 ਬਹੁਪਦ $x + 2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $p(x) = x + 2$

ਤਦ $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

ਇਸ ਲਈ, -2 ਬਹੁਪਦ $x + 2$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਪਰ 2 ਬਹੁਪਦ $x + 2$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਬਹੁਪਦ $p(x) = 2x + 1$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ: $p(x)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਲੱਭਣਾ ਉਸ ਤਰਾਂ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ

$$p(x) = 0$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ

ਹੁਣ $2x + 1 = 0$ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $x = -\frac{1}{2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $-\frac{1}{2}$ ਬਹੁਪਦ $2x + 1$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਹੁਣ ਜੇ $p(x) = ax + b, a \neq 0$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ $p(x)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਉਦਾਹਰਣ 4 ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦਾ ਕੁੱਝ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਲੱਭਣ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਬਹੁਪਦ ਸਮੀਕਰਣ $p(x) = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ।

ਹੁਣ $p(x) = 0$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $ax + b = 0, a \neq 0$

ਇਸ ਲਈ $\quad ax = -b$

ਅਰਥਾਤ $\quad x = -\frac{b}{a}$

ਇਸ ਲਈ ਸਿਰਫ $x = -\frac{b}{a}$ ਹੀ $p(x)$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਿਰਫ 1, $x - 1$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਰਫ -2, $x + 2$ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ 2 ਅਤੇ 0 ਬਹੁਪਦ $x^2 - 2x$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਓ $\quad p(x) = x^2 - 2x$

ਤਦ $\quad p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

ਅਤੇ $\quad p(0) = 0 - 0 = 0$

ਇਸ ਲਈ, 2 ਅਤੇ 0 ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 2x$ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

1. ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ, ਸਿਫ਼ਰ ਹੀ ਹੋਵੇ।
2. 0, ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
3. ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਸਿਰਫ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਿਫਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦ $5x - 4x^2 + 3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਲਈ $p(0)$, $p(1)$ ਅਤੇ $p(2)$ ਲੱਭੋ:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ।

(i) $p(x) = 3x + 1;\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2);\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2;\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m;\ x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1;\ x = \frac{1}{2}$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਸਿਫ਼ਰ ਲੱਭੋ।

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d;\ c \neq 0$, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

2.4 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 10 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਪੂਰਵਕ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸਦੇ

ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $2t + 1$. $q(t)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ $g(t)$ ਦੇ ਲਈ,

$$q(t) = (2t + 1)\, g(t) \text{ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ:

ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ : ਜੇ $p(x)$ ਘਾਤ $n \geq 1$ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੋਵੇ ਅਤੇ a ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ

(i) $x - a$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇ $p(a) = 0$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ

(ii) $p(a) = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇ $x - a$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ।

ਸਬੂਤ : ਬਾਕੀ ਥਿਊਰਮ ਰਾਹੀਂ $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(*i*) ਜੇਕਰ $p(a) = 0$ ਤਾਂ $p(x) = (x - a)\, q(x)$, ਜੋ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $(x - a)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

(*ii*) ਕਿਉਂਕਿ $(x - a)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਦੇ ਲਈ $p(x) = (x - a)\, g(x)$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ $x + 2$ ਬਹੁਪਦਾਂ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ਅਤੇ $2x + 4$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : -2, $x + 2$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ਅਤੇ $s(x) = 2x + 4$

ਤਦ,
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ (Factor Theorem) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $x + 2$, $x^3 + 5x^2 + 5x + 6$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

ਇਸ ਲਈ, $x + 2$, $2x + 4$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਲਾਗੂ ਕੀਤੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਕਿਉਂਕਿ $2x + 4 = 2(x + 2)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਜੇਕਰ $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ, ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $x - 1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $p(1) = 0$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

ਇਸ ਲਈ $4 + 3 - 4 + k = 0$

ਅਰਥਾਤ $k = -3$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਾਤ 2 ਅਤੇ ਘਾਤ 3 ਦੇ ਕੁਝ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲੱਭਣ ਲਈ ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਤੁਸੀਂ $x^2 + lx + m$ ਵਰਗੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਮੱਧ ਪਦ lx ਨੂੰ $ax + bx$ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡ ਕੇ ਕਿ $ab = m$ ਹੋਵੇ, ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਤਦ $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ $ax^2 + bx + c$, ਜਿੱਥੇ $a \neq 0$ ਅਤੇ a, b, c ਅਚਲ ਹਨ, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ ਵੰਡਦੇ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(px + q)$ ਅਤੇ $(rx + s)$ ਹਨ। ਤਦ,

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

x^2 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ $a = pr$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $b = ps + qr$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ $c = qs$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ b ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ps ਅਤੇ qr ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ b ਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ac ਹੋਵੇ। ਇਹ ਤੱਥ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ ਵੰਡ ਕੇ ਅਤੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $6x^2 + 17x + 5$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ 1 : (ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ ਵੰਡ ਕੇ) : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋਈਏ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ

$p + q = 17$ ਅਤੇ $pq = 6 \times 5 = 30$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ 30 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੱਭੀਏ। ਕੁਝ ਜੋੜੇ 1 ਤੇ 30, 2 ਤੇ 15, 3 ਤੇ 10 ਅਤੇ 5 ਤੇ 6 ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ 2 ਤੇ 15 ਦੇ ਜੋੜੇ ਤੋਂ $p + q = 17$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$
$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$
$$= (3x + 1)\ (2x + 5)$$

ਹੱਲ 2 : (ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ):

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\ p(x)$, ਮੰਨ ਲਓ। ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b, $p(x)$ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)\ (x - b)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $ab = \frac{5}{6}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਓ ਅਸੀਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਣ, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ ਹੈ। ਪਰ $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਂਚ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\left(x + \frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,
$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$
$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$
$$= (3x + 1)\ (2x + 5)$$

ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਵੰਡ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿਆਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $y^2 - 5y + 6$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $p(y) = y^2 - 5y + 6$ ਹੈ। ਹੁਣ, ਜੇਕਰ $p(y) = (y - a)\ (y - b)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸਦਾ ਅਚਲ ਪਦ ab ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $ab = 6$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $p(y)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ 6 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ।

6 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਹੁਣ, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

ਇਸ ਲਈ, $y-2$, $p(y)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

ਇਸ ਲਈ, $y-3$ ਵੀ $y^2 - 5y + 6$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਮੱਧ ਪਦ $-5y$ ਨੂੰ ਵੰਡਕੇ ਵੀ $y^2 - 5y + 6$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ। ਇੱਥੇ ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਵੰਡਕ੍ਰਮ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਧਿਕ ਉਪਯੋਗੀ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲੱਭਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖੋਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ -120 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਵਾਂਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$

ਜਾਂਚ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $p(1) = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x-1)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$$= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1) \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= (x-1)(x^2 - 22x + 120) \quad [(x-1) \text{ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਲੈ ਕੇ}]$$

ਇਸਨੂੰ $p(x)$ ਨੂੰ $(x-1)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਸੀ।

ਹੁਣ $x^2 - 22x + 120$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਜਾਂ ਤਾਂ ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ ਵੰਡ ਕੇ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x-12) - 10(x-12)$$

$$= (x-12)(x-10)$$

ਇਸ ਲਈ, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12)$

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ $x + 1$ ਹੈ।

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $g(x)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

3. k ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੱਭੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚੋਂ $(x - 1)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ:

   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

   (iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰੋ:

   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਰਬਸਮਤਾ (algebraic identity) ਇੱਕ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਹੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਚਲਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ:

ਸਰਬਸਮਤਾ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ਸਰਬਸਮਤਾ II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ਸਰਬਸਮਤਾ III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ਸਰਬਸਮਤਾ IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿੰਅਜਕਾਂ

ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰ ਕੀਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਗਣਨਾ (computations) ਵਿੱਚ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਲੋੜੀਦੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(x-3)(x+5)$

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ I $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਸਰਬਸਮਤਾ ਵਿੱਚ $y = 3$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(x+3)(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) ਸਰਬਸਮਤਾ IV ਭਾਵ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(x-3)(x+5) = x^2 + (-3+5)x + (-3)(5)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਸਿੱਧੇ ਗੁਣਾ ਨਾ ਕਰਕੇ 105×106 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $105 \times 106 = (100+5) \times (100+6)$

$= (100)^2 + (5+6)(100) + (5 \times 6)$ (ਸਰਬਸਮਤਾ IV ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ਕੁੱਝ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁੱਝ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$49a^2 = (7a)^2,\ 25b^2 = (5b)^2,\ 70ab = 2(7a)(5b)$$

$x^2 + 2xy + y^2$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 7a$ ਅਤੇ $y = 5b$ ਹੈ।

ਸਰਬਸਮਤਾ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a+5b)^2 = (7a+5b)(7a+5b)$$

(ii) ਇਥੇ $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

ਸਰਬਸਮਤਾ III ਦੇ ਨਾਲ ਇਸਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$
$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ਹੁਣ ਤੱਕ ਸਾਡੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦ $x + y + z$ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ, $(x + y + z)^2$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ $x + y = t$ ਹੈ। ਤਦ,

$$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$$
$$= t^2 + 2tz + t^2 \quad \text{(ਸਰਬਸਮਤਾ I ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$
$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \quad (t \text{ ਦਾ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ)}$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad \text{(ਸਰਬਸਮਤਾ I ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \quad \text{(ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਰਬਸਮਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਸਰਬਸਮਤਾ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $(x + y + z)^2$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵਰਗ ਪਦ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣਨਫਲ ਪਦ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ਦੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ $(x + y + z)^2$ ਦੇ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ
$x = 3a$, $y = 4b$ ਅਤੇ $z = 5c$

ਇਸ ਲਈ ਸਰਬਸਮਤਾ V ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $(4a - 2b - 3c)^2$ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਰਬਸਮਤਾ V ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y)$
$$+ 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$$
$$= [2x + (-y) + z]^2 \quad \text{(ਸਰਬਸਮਤਾ V ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$
$$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)\,(2x - y + z)$$

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਪਦਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਹੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ I ਨੂੰ $(x + y)^3$ ਖੋਲਣ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰੀਏ । ਇੱਥੇ

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ:

ਸਰਬਸਮਤਾ VI : $\mathbf{(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)}$

ਸਰਬਸਮਤਾ VI ਵਿੱਚ y ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ $-y$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

ਸਰਬਸਮਤਾ VII : $\mathbf{(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}$
$$\mathbf{= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰਪੂਰਵਕ ਲਿਖੋ:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

ਹੱਲ : (i) $(x + y)^3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$x = 3a$ ਅਤੇ $y = 4b$

ਇਸ ਲਈ, ਸਰਬਸਮਤਾ VI ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) $(x-y)^3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$x = 5p$ ਅਤੇ $y = 3q$

ਸਰਬਸਮਤਾ VII ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਸਹੀ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ

$$(104)^3 = (100+4)^3$$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$$

(ਸਰਬਸਮਤਾ VI ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= 1000000 + 64 + 124800$$
$$= 1124864$$

(ii) ਇੱਥੇ

$$(999)^3 = (1000-1)^3$$
$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$

(ਸਰਬਸਮਤਾ VII ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$
$$= 997002999$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$
$$= (2x+3y)^3 \quad \text{(ਸਰਬਸਮਤਾ VI ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$
$$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$$

ਹੁਣ $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਗੁਣਨਫਲ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$+z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz$$
$$+x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz \qquad \text{(ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਰਬਸਮਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਰਬਸਮਤਾ VIII : $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$8x^3+y^3+27z^3-18xyz$$
$$=(2x)^3+y^3+(3z)^3-3(2x)(y)(3z)$$
$$=(2x+y+3z)[(2x)^2+y^2+(3z)^2-(2x)(y)-(y)(3z)-(2x)(3z)]$$
$$=(2x+y+3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy-3yz-6xz)$$

ਅਭਿਆਸ 2.4

1. ਢੁਕਵੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$ (iii) $(3x+4)(3x-5)$

   (iv) $(y^2+\frac{3}{2})(y^2-\frac{3}{2})$ (v) $(3-2x)(3+2x)$

2. ਸਿੱਧੀ ਗੁਣਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. ਢੁਕਵੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ:

   (i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

4. ਢੁਕਵੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ:

   (i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

   (iv) $(3a-7b-c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

5. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. ਢੁਕਵੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲੱਭੋ:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ਜਾਂਚ ਕਰੋ : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$ [**ਸੰਕੇਤ**: ਦੇਖੋ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9]

11. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕਰੋ: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ਜਾਂਚ ਕਰੋ: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

13. ਜੇ $x + y + z = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ਹੈ।

14. ਘਣਾਂ ਦੀ ਅਸਲ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. ਹੇਠਾਂ ਕੁਝ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਲਈ ਸੰਭਵ ਵਿਅੰਜਕ ਲਿਖੋ:

ਖੇਤਰਫਲ: $25a^2 - 35a + 12$	ਖੇਤਰਫਲ: $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. ਘਣਾਵਾਂ (cuboids), ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਲਈ ਸੰਭਵ ਵਿਅੰਜਕ ਕੀ ਹਨ ?

ਆਇਤਨ: $3x^2 - 12x$	ਆਇਤਨ: $12ky^2 + 6ky - 20k$
(i)	(ii)

2.6 ਸਾਰ ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲਾ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦਾ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ:

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$

   ਜਿੱਥੇ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਅਚਲ ਹਨ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਹੈ। $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਹਨ ਅਤੇ n ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ... a_0, ਜਿੱਥੇ $a_n \neq 0$, ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਪਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਪਦ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. ਦੋ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
7. ਤਿੰਨ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
8. ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ 'a', ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇ $p(a) = 0$ ਹੋਵੇ।
9. ਇੱਕ ਚਲ, ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਅਚਲ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
10. ਜੇ $p(a) = 0$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $x - a$ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ $x - a$, $p(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $p(a) = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

X1V8F2

ਅਧਿਆਇ 3

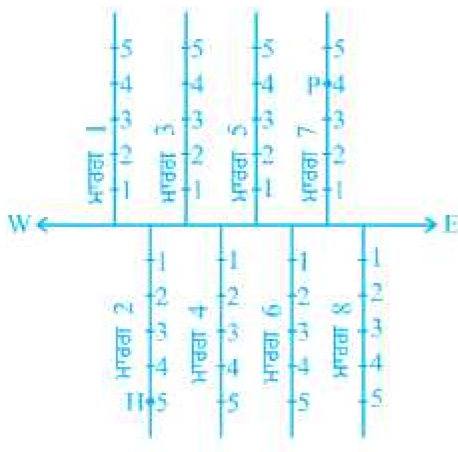
ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਮਾਇਤੀ

> What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics. Zones and Meridian Lines? So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'
>
> (ਮਰਕੇਟਰ ਦੇ ਉੱਤਰੀ ਧਰੁਵਾਂ ਅਤੇ ਭੂ-ਮੱਧ ਰੇਖਾ, ਤਪਤ ਖੰਡੀ, ਭੂ-ਮੰਡਲਾਂ ਅਤੇ ਮਧਿਅਨ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਕੀ ਚੰਗਿਆਈ ਹੈ ? ਇਸ ਲਈ ਬੇਲਮੈਨ ਨੇ ਰੌਲਾ ਪਾਇਆ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਨਾਵਿਕ ਦਲ ਨੇ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ, "ਇਹ ਸਿਰਫ ਪਰੰਪਰਾਗਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹਨ" ।)

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਾਨ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਧਾਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲੱਭਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

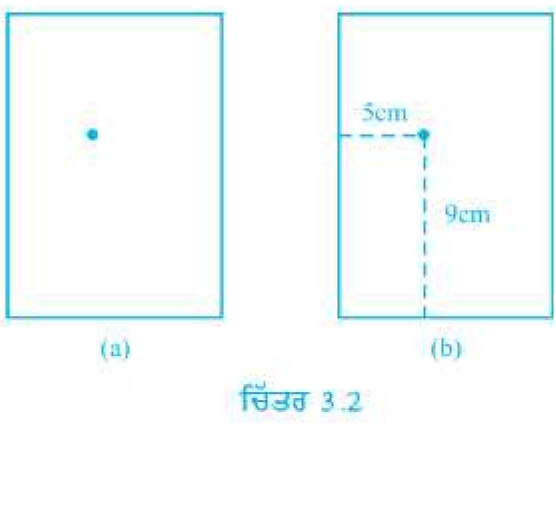


ਚਿੱਤਰ 3.1

I. ਚਿੱਤਰ 3.1 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਮਾਰਗ ਹੈ ਜੋ ਪੂਰਬ ਤੋਂ ਪੱਛਮ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਕੁੱਝ

ਸੜਕਾਂ ਬਣੀਆਂ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਸੜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੱਛਮ ਤੋਂ ਪੂਰਬ ਵੱਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸੜਕ (ਮਾਰਗ) 'ਤੇ ਬਣੇ ਮਕਾਨਾਂ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਥੇ ਆਪਣੀ ਸਹੇਲੀ ਦੇ ਮਕਾਨ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਕਾਫੀ ਹੈ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜੇ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਸੜਕ 2 'ਤੇ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਘਰ ਦਾ ਪਤਾ ਆਰਾਮ ਨਾਲ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਉਨੀ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਨਹੀ, ਜਿੰਨੀ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਤਦ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਜਾਣਕਾਰੀਆਂ ਅਰਥਾਤ ਸੜਕ ਦੀ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਤੇ ਉਸਦਾ ਮਕਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਮਕਾਨ 'ਤੇ ਜਾਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਜੋ ਸੜਕ 2 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਸੰਖਿਆ 5 ਹੈ, ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਸੜਕ 2 ਕਿਹੜੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤਦ ਉਸ ਮਕਾਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਖਿਆ 5 ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 3.1 ਵਿੱਚ **H** ਇਸੇ ਮਕਾਨ ਦਾ ਸਥਾਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, **P** ਉਸ ਮਕਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਸੜਕ ਸੰਖਿਆ 7 'ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਹੈ।

II. ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਕਾਗਜ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹੋ [ਚਿੱਤਰ 3.2 (a)]। ਜੇ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੁੱਛੀਏ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਦੱਸੋਗੇ ? ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਉਗੇ; "ਬਿੰਦੂ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਅੱਧ ਦੇ ਉੱਪਰੀ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ" ਜਾਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਕਾਗਜ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਨੇੜੇ ਸਥਿਤ ਹੈ" ਕੀ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਥਨ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਸਥਿਤੀ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤਰ "ਨਹੀਂ" ਹੈ। ਪਰ, ਜੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਕਹੀਏ ਕਿ "ਬਿੰਦੂ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਲਗਭਗ 5 ਸਮ ਦੂਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਪਤਾ ਤਾਂ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਸਥਾਨ ਦਾ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਲੱਗਦਾ। ਥੋੜ੍ਹੀ ਬਹੁਤ ਸੋਚ ਵਿਚਾਰ ਦੇ ਬਾਅਦ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ 9 ਸਮ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 3.2

ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਰਥਾਤ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਅਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ [ਚਿੱਤਰ 3.2(b)]। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਲੱਭਣ ਲਈ ਦੋ ਸੁਤੰਤਰ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

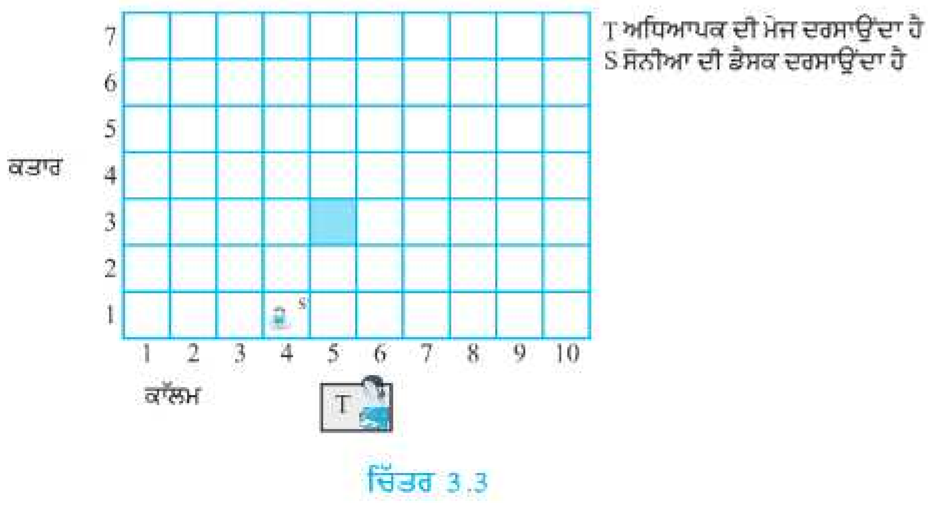
ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ "ਬੈਠਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ" ਨਾਮਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ :

ਕਿਰਿਆ 1 (ਬੈਠਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ) : ਸਾਰੇ ਡੈਸਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ ਖਿੱਚਕੇ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਤਿਆਰ ਕਰੋ। ਹਰੇਕ ਡੈਸਕ ਨੂੰ ਇਕ ਵਰਗ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰੋ। ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਨਾਮ ਲਿਖੋ ਜਿਸ 'ਤੇ ਉਹ ਬੈਠਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਨੂੰ ਉਹ ਵਰਗ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਨਿਰਧਾਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੋ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਉਹ ਕਾੱਲਮ ਜਿਸ 'ਤੇ ਉਹ ਬੈਠਦਾ/ਬੈਠਦੀ ਹੈ।

(ii) ਉਹ ਕਤਾਰ ਜਿਸ 'ਤੇ ਉਹ ਬੈਠਦਾ/ਬੈਠਦੀ ਹੈ।

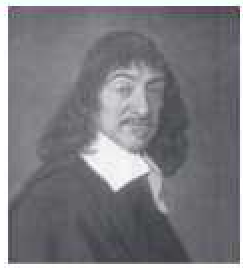
ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਡੈਸਕ ਉੱਤੇ ਬੈਠਦੇ ਹੋ ਜੋ 5ਵੇਂ ਕਾਲਮ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 3.3 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਵਰਗ ਵਜੋਂ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ (5, 3) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਕਾੱਲਮ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਕਤਾਰ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ (3, 5) ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਹੋਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬੈਠਣ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲਿਖੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇ ਸੋਨੀਆ ਚੌਥੇ ਕਾੱਲਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਬੈਠਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਲਈ S(4, 1) ਲਿਖੋ। ਅਧਿਆਪਕ ਦੀ ਮੇਜ ਤੁਹਾਡੀ ਬੈਠਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਪਕ ਨੂੰ ਸਿਰਫ ਨਿਗਰਾਣ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 3.3

ਤੁਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਰੱਖੀ ਹੋਈ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੋ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਵਸਤੂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਥੱਲੇ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਅਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। "ਬੈਠਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ" ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਾੱਲਮ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਕਤਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਰਲ ਵਿਚਾਰਧਾਰਾ ਦੇ ਦੂਰਅੰਦੇਸ਼ੀ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਗਣਿਤ ਦੀ **ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਮਾਇਤੀ** (Coordinate Geometry) ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਅਤਿ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸਾਖਾ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਆਈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਮਾਇਤੀ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਣੂੰ ਕਰਾਉਣਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਉਚੇਰੀ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰੋਗੇ। ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਫ਼ਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ **ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਰੇਨੇ ਦਕਾਰਤੇ** ਨੇ ਇਸ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਕੁੱਝ ਲੋਕ ਸਵੇਰੇ ਬਿਸਤਰ ਤੇ ਪਏ ਰਹਿਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹੀ ਆਦਤ ਸਤ੍ਹਾਰਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮਹਾਨ ਫਰਾਂਸੀਸੀ **ਹਿਸਾਬਦਾਨ** ਰੇਨੇ ਦਕਾਰਤੇ ਦੀ ਸੀ। ਪਰ ਉਹ ਆਲਸੀ ਵਿਅਕਤੀ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਉਹ ਸਮਝਦਾ ਸੀ ਕਿ ਬਿਸਤਰ 'ਤੇ ਪਏ ਹੋਏ ਜ਼ਿਆਦਾ ਚਿੰਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਜਦੋਂ ਉਹ ਆਪਣੇ ਬਿਸਤਰ 'ਤੇ ਆਰਾਮ ਕਰ ਰਿਹਾ ਸੀ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭ ਲਿਆ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਸਦੀ ਵਿਧੀ ਅਕਸ਼ਾਸ਼ ਅਤੇ ਰੇਖਾਂਸ਼ ਦੀ ਪੁਰਾਣੀ ਵਿਚਾਰਧਾਰਾ ਦਾ ਹੀ ਇੱਕ ਵਿਕਸਿਤ ਰੂਪ ਸੀ। ਇੱਕ ਸਤਮਲ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਜਰੂਰੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਦਕਾਰਤੇ ਦੇ ਮਾਣ ਵਿੱਚ ਕਾਰਟੀਜਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ (**Cartesian System**) ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਰੇਨੇ ਦਕਾਰਤੇ (1596 -1650)

ਚਿੱਤਰ 3.4

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਅਧਿਐਨ ਮੇਜ਼ 'ਤੇ ਰੱਖੇ ਟੇਬਲ ਲੈਂਪ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੱਸੋਗੇ ?

2. (**ਸੜਕ ਯੋਜਨਾ**) : ਇੱਕ ਨਗਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੁੱਖ ਸੜਕਾਂ ਹਨ ਜੋ ਨਗਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਸੜਕਾਂ ਉੱਤਰ-ਦੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਅਤੇ ਪੂਰਬ-ਪੱਛਮ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ।

   ਨਗਰ ਦੀਆਂ ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਸੜਕਾਂ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਖ-ਸੜਕਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ 200 ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਪੰਜ ਸੜਕਾਂ ਹਨ। 1 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ =200 ਮੀ. ਦਾ

ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ ਆਪਣੀ ਨੋਟ ਬੁੱਕ ਵਿੱਚ ਨਗਰ ਦਾ ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਓ। ਸੜਕਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

ਤੁਹਾਡੇ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਕ੍ਰਾਸ ਸਟਰੀਟ (ਚੌਰਾਹੇ) ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚੌਰਾਹਾ ਦੋ ਸੜਕਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸੜਕ ਉੱਤਰ-ਦੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਪੂਰਬ-ਪੱਛਮ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ। ਹਰੇਕ ਕਰਾਸ ਸਟਰੀਟ ਦਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਦੂਸਰੀ ਸੜਕ ਉੱਤਰ-ਦੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪੰਜਵੀ ਸੜਕ ਪੂਰਬ – ਪੱਛਮ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚੌਰਾਹੇ ਤੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਦ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕਰਾਸ-ਸਟਰੀਟ (2,5) ਕਹਾਂਗੇ। ਇਸੇ ਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਲੱਭੋ ਕਿ :

(i) ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਰਾਸ-ਸਟਰੀਟਾਂ ਨੂੰ (4, 3) ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

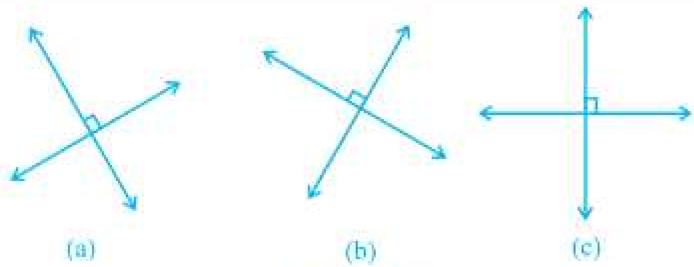
(ii) ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਰਾਸ-ਸਟਰੀਟਾਂ ਨੂੰ (3, 4) ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

3.2 ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

'ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ' ਦੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚੋਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਜਿੱਥੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ **(origin)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀਆਂ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਸੰਖਿਆ '1' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਦੂਰੀ ਸੰਖਿਆ '3' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ 'O' ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ r 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਸੰਖਿਆ r ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ r 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਸੰਖਿਆ r ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਚਿੱਤਰ 3.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਹਨ

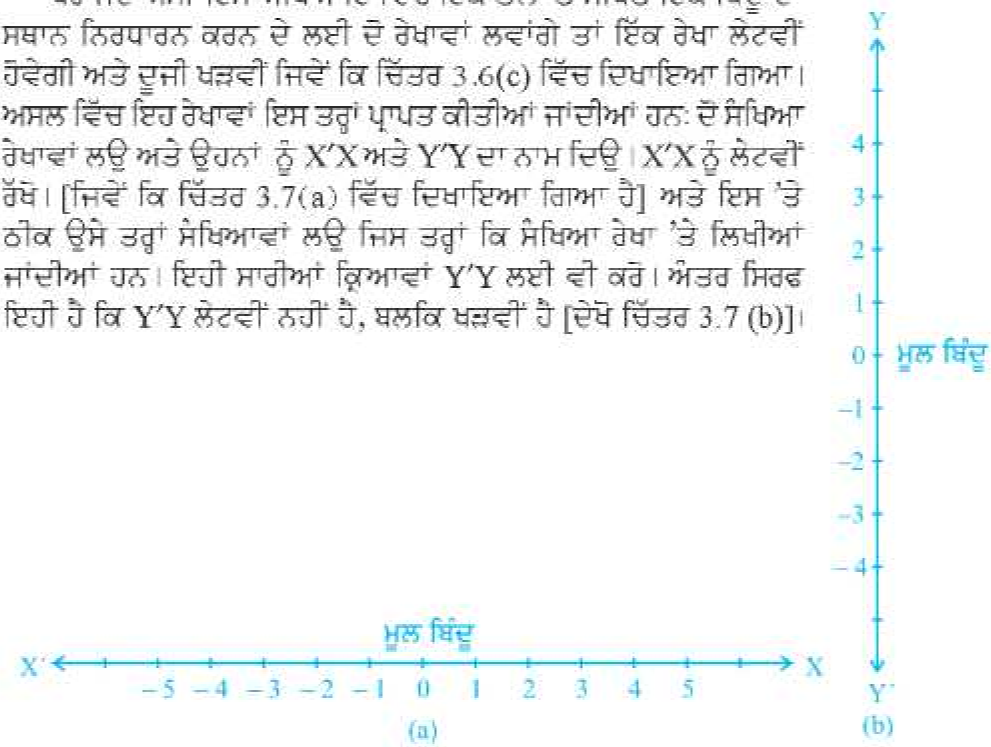
ਚਿੱਤਰ 3.5

ਦਕਾਰਤੇ ਨੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਨ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.6

ਪਰ ਜਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤਲ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਲਵਾਂਗੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਲੇਟਵੀਂ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਖੜਵੀਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.6(c) ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ: ਦੋ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾਵਾਂ ਲਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ X′X ਅਤੇ Y′Y ਦਾ ਨਾਮ ਦਿਉ। X′X ਨੂੰ ਲੇਟਵੀਂ ਰੱਖੋ। [ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.7(a) ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ] ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਉ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲਿਖੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹੀ ਸਾਰੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ Y′Y ਲਈ ਵੀ ਕਰੋ। ਅੰਤਰ ਸਿਰਫ ਇਹੀ ਹੈ ਕਿ Y′Y ਲੇਟਵੀਂ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਖੜਵੀਂ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.7 (b)]।

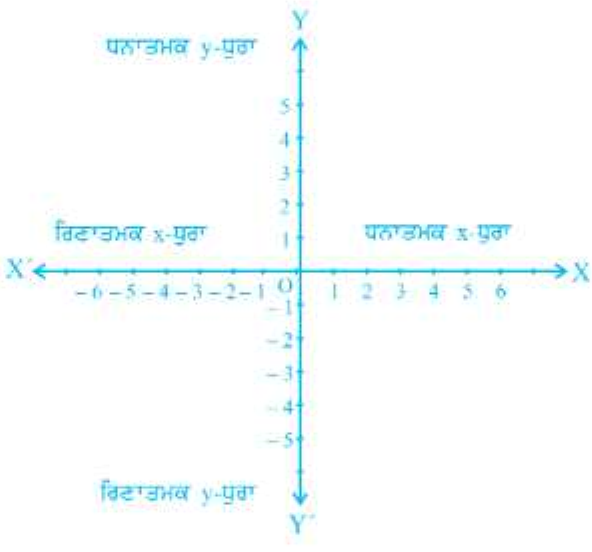


ਚਿੱਤਰ 3.7

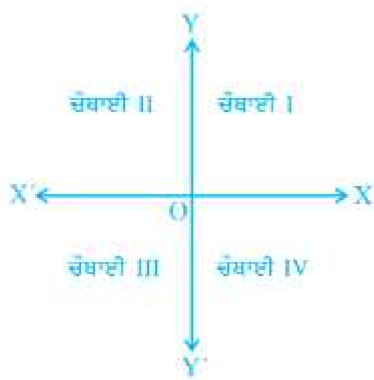
ਦੋਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ (ਚਿੱਤਰ 3.8)। ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ X′X ਨੂੰ x - ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ Y′Y ਨੂੰ y - ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਬਿੰਦੂ, ਜਿੱਥੇ X′X ਅਤੇ Y′Y ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ **(origin)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ **O** ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਧਨਾਤਮਕ

ਸੰਖਿਆਵਾਂ OX ਅਤੇ OY ਦੀ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ OX ਅਤੇ OY ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, OX′ ਅਤੇ OY′ ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਧੁਰੇ ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਚਾਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਚਾਰ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ **ਚੌਥਾਈਆਂ (quadrants)** (ਇੱਕ-ਚੌਥਾਈ) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। OX ਤੋਂ ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਇਨਾਂ ਨੂੰ I, II, III ਅਤੇ IV ਚੌਥਾਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.9)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਸਮਤਲ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਚਾਰ ਚੌਥਾਈਆਂ ਇੱਕੋ ਤਲ 'ਚ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਲ ਨੂੰ *ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਤਲ* (*Cartesian plane*) ਜਾਂ *ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮਤਲ* (*Coordinate plane*) ਜਾਂ *xy-ਸਮਤਲ* (*xy-plane*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ (*coordinate axes*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

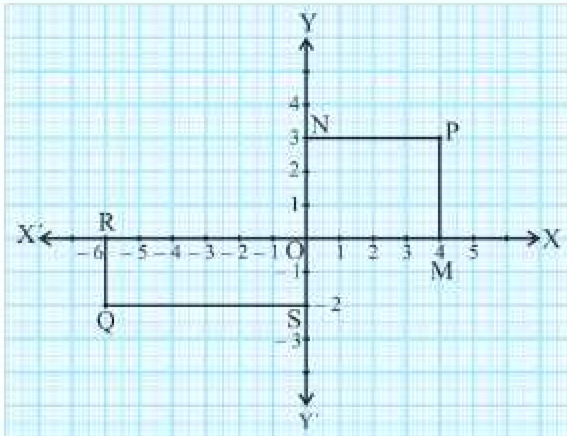


ਚਿੱਤਰ 3.8



ਚਿੱਤਰ 3.9

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਏਨਾ ਮਹੱਤਵ ਕਿਉਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਚਿੱਤਰ ਲਉ, ਜਿੱਥੇ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖ ਕਾਗਜ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਧੁਰਿਆਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਲੱਭੀਏ। ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ PM ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ PN ਸੁੱਟੋ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਲੰਬ QR ਅਤੇ QS ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.10

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

(i) y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ, ਜਿਸਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, PN = OM = 4 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ ।

(ii) x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ, ਜਿਸਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, PM = ON = 3 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

(iii) y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ Q ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ, ਜਿਸਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, OR = SQ = 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

(iv) x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ Q ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, OS = RQ = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਨ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੀਏ ਕਿ ਕੋਈ ਉਲਝਣ ਨਾ ਰਹਿ ਜਾਵੇ ?

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਪਰੰਪਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x - ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x-coordinate). y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ x -ਧੁਰੇ ਤੇ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਜੋ ਕਿ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ)। ਬਿੰਦੂ P ਦੇ

ਲਈ ਇਹ + 4 ਹੈ ਅਤੇ Q ਦੇ ਲਈ ਇਹ – 6 ਹੈ। x - ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਨੂੰ ਭੁਜ **(abscissa)** ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ)। ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਲਈ ਇਹ + 3 ਹੈ ਅਤੇ Q ਦੇ ਲਈ –2 ਹੈ। y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਨੂੰ **ਕੋਟੀ (ordinate)** ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖਦੇ ਸਮੇਂ ਪਹਿਲਾਂ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (4, 3) ਹਨ ਅਤੇ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (– 6, – 2) ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (3, 4) ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (4, 3) ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

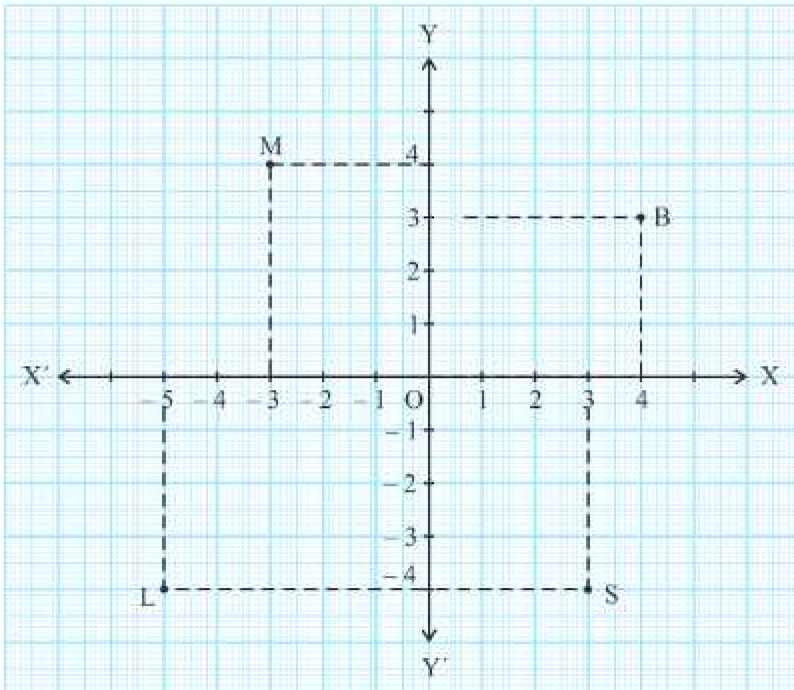
ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ 3.11 ਨੂੰ ਦੇਖਕੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

(i) ਬਿੰਦੂ B ਦਾ ਭੁਜ ਅਤੇ ਕੋਟੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ____ ਅਤੇ ____ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (___, ___) ਹਨ।

(ii) ਬਿੰਦੂ M ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ___ ਅਤੇ ___ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ M ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (__, __) ਹਨ।

(iii) ਬਿੰਦੂ L ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ___ ਅਤੇ ___ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ L ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (__, __) ਹਨ।

(iv) ਬਿੰਦੂ S ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ___ ਅਤੇ ___ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ S ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (__, __) ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.11

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਦੀ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ B ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਭੁਜ 4 ਹੋਵੇਗਾ। x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਦੀ ਦੂਰੀ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ B ਦਾ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਕੋਟੀ 3 ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (4, 3) ਹਨ।

ਉੱਪਰ (i) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ :

(ii) ਬਿੰਦੂ M ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ –3 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ M ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (–3, 4) ਹਨ।

(iii) ਬਿੰਦੂ L ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y - ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ –5 ਅਤੇ – 4 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ L ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (–5, – 4) ਹਨ।

(iv) ਬਿੰਦੂ S ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3 ਅਤੇ – 4 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ S ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (3, – 4) ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 2 : ਚਿੱਤਰ 3.12 ਵਿੱਚ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖੋ :

ਹੱਲ : ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ :

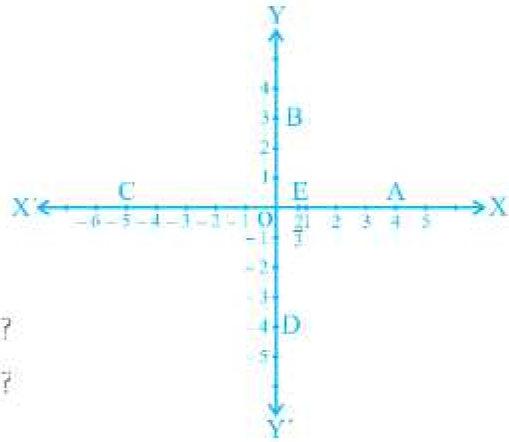
(i) ਬਿੰਦੂ A, y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ + 4 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 0 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 4 ਹੈ ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 0 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (4, 0) ਹਨ।

(ii) B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 3) ਹਨ। ਕਿਉਂ ?

(iii) C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (– 5, 0) ਹਨ। ਕਿਉਂ ?

(iv) D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, – 4) ਹਨ। ਕਿਉਂ ?

(v) E ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ਹਨ। ਕਿਉਂ ?



ਚਿੱਤਰ 3.12

ਕਿਉਂਕਿ x-ਧੁਰੇ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, 0)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੋਣਗੇ, ਜਿੱਥੇ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ x ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੋਣਗੇ, ਜਿੱਥੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ y ਹੈ। ਕਿਉਂ ?

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕੀ ਹਨ ? ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਤੋਂ ਇਸਦੀ ਦੂਰੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਭੁਜ ਅਤੇ ਕੋਟੀ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ **(0, 0)** ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

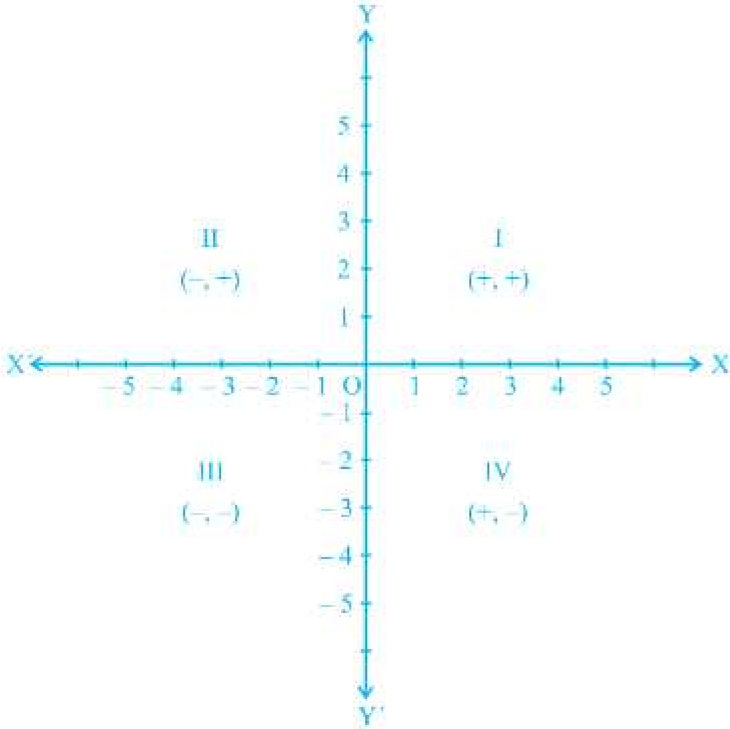
ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਚੌਥਾਈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਬੰਧਾਂ ਵੱਲ ਜਰੂਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ :

(i) ਜੇ ਬਿੰਦੂ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ (+, +) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ, ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੀ ਹੋਈ ਹੈ।

(ii) ਜੇ ਬਿੰਦੂ ਦੂਜੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ (–, +) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਜੀ ਚੌਥਾਈ, ਰਿਣਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੀ ਹੋਈ ਹੈ।

(iii) ਜੇ ਬਿੰਦੂ ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ (–, –) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਤੀਜੀ ਚੌਥਾਈ, ਰਿਣਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੀ ਹੋਈ ਹੈ।

(iv) ਜੇ ਬਿੰਦੂ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ (+, –) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ, ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੀ ਹੋਈ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.13)।



ਚਿੱਤਰ 3.13

ਟਿੱਪਣੀ : ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਦੇ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਉੱਪਰ ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ? ਉਹ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਪਰੰਪਰਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਪੂਰੀ ਦੁਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਕੋਟੀ ਲਿਖੀ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਭੁਜ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ। ਫਿਰ ਵੀ, ਜਿਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਅਸੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਪੂਰੀ ਦੁਨੀਆਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਉਲਝਣ ਦੇ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦਿਉ :

(i) ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਲੇਟਵੀਂ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਂ ਕੀ ਹਨ ?

(ii) ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਹਰੇਕ ਭਾਗ ਦੇ ਨਾਂ ਦੱਸੋ।

(iii) ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਨਾਂ ਦੱਸੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ?

2. ਚਿੱਤਰ 3.14 ਦੇਖਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ :

(i) B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

(ii) C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

(iii) ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (–3, –5) ਦੁਆਰਾ ਪਛਾਣਿਆ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ

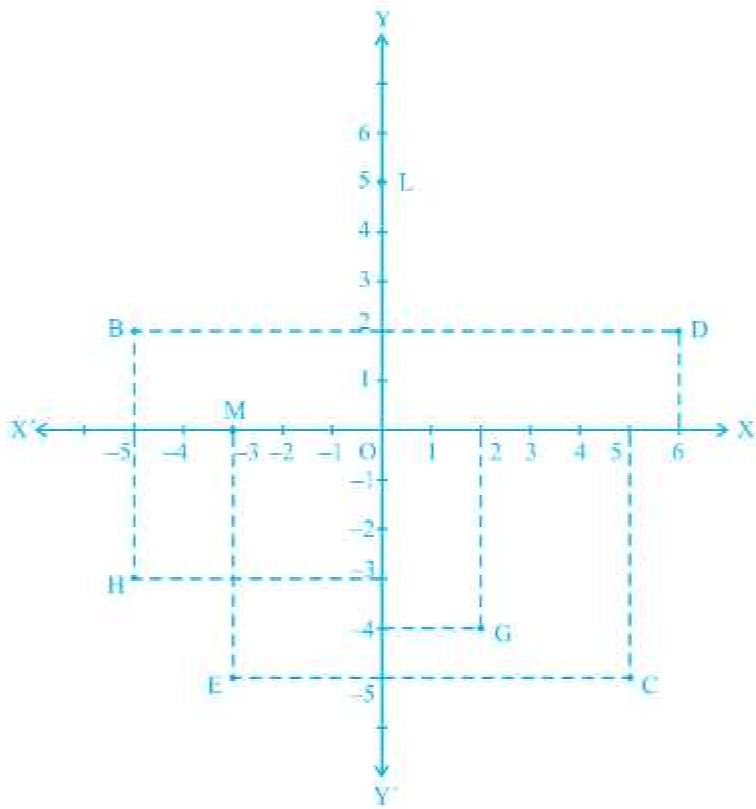
(iv) ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (2, – 4) ਦੁਆਰਾ ਪਛਾਣਿਆ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ

(v) D ਦਾ ਭੁਜ

(vi) ਬਿੰਦੂ H ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

(vii) ਬਿੰਦੂ L ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

(viii) ਬਿੰਦੂ M ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ



ਚਿੱਤਰ 3.14

3.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੇਟਵੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤੇ ਦੂਜੀ ਖੜਵੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਕਾਰਟੀਜਨ ਜਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮਤਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਚਾਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚੌਥਾਈਆਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਉਸਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਭੁਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਕੋਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
7. ਜੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਭੁਜ x ਹੋਵੇ ਤੇ ਕੋਟੀ y ਹੋਵੇ, ਤਾਂ (x, y) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
8. x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, 0)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
9. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, 0)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
10. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(+, +)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ, ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(-, +)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ, ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(-, -)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਅਤੇ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(+, -)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $+$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਤੇ $-$ ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।
11. ਜੇ $x \neq y$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $(x, y) \neq (y, x)$ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਤੇ ਜੇ $x = y$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $(x, y) = (y, x)$ ਹੋਵੇਗਾ।

U4T3M9

ਅਧਿਆਇ 4

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

(ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਲਾ ਦਾ ਮੁੱਖ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ਆਉਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸੰਭਵ ਸਰਲ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ।)।

—***Edmund Halley***

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

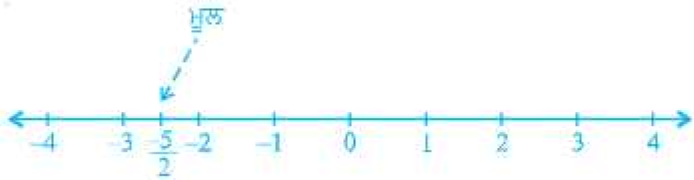
ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲਾ ਕੋਈ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ (ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ) ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਸ਼ਾਇਦ ਇਹ ਵੀ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ 'ਤੇ ਮੁੜ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਗਿਆਨ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ : ਕੀ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕੀ ਇਹ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਹੱਲ ਕਿਵੇਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 3 ਵਿੱਚ ਦੱਸੀਆਂ ਗਈਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ।

4.2 ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ

ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕੀ-ਕੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇਖੀਏ

$$2x + 5 = 0$$

ਇਸਦਾ ਹੱਲ, ਅਰਥਾਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਮੂਲ $-\frac{5}{2}$ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਗੱਲਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ 'ਤੇ ਤਦ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ, ਜਦੋਂ :

(i) ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਂ ਘਟਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(ii) ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਗੈਰ-ਸਿਫਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਜਾਂ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਨਾਗਪੁਰ ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਅਤੇ ਸ਼੍ਰੀਲੰਕਾਂ ਵਿਚਾਲੇ ਖੇਡੇ ਗਏ ਇੱਕ ਇੱਕ ਦਿਨਾ ਅੰਤਰਾਸ਼ਟਰੀ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਦੋ ਭਾਰਤੀ ਬੱਲੇਬਾਜਾਂ ਨੇ ਮਿਲਕੇ 176 ਰਨ ਬਣਾਏ। ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਬੱਲੇਬਾਜਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬੱਲੇਬਾਜ ਵੱਲੋਂ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਰਥਾਤ ਇੱਥੇ ਦੋ ਅਣਜਾਣ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ x ਅਤੇ y ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਬੱਲੇਬਾਜ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਬੱਲੇਬਾਜ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ y ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x + y = 176$$

ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। ਇਹ ਚਲਦਾ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਚਲਾਂ ਨੂੰ x ਅਤੇ y ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਹੋਰ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ ਅਤੇ } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ , ਜਿਸਨੂੰ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ (*linear equation in two variables*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੱਸੋ :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ਹੱਲ : : (i) $2x + 3y = 4.37$ ਨੂੰ $2x + 3y - 4.37 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 2$, $b = 3$ ਅਤੇ $c = -4.37$ ਹੈ।

(ii) ਸਮੀਕਰਣ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ਨੂੰ $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ ਅਤੇ $c = -4$ ਹੈ।

(iii) ਸਮੀਕਰਣ $4 = 5x - 3y$ ਨੂੰ $5x - 3y - 4 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 5$, $b = -3$ ਅਤੇ $c = -4$ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ $-5x + 3y + 4 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, $a = -5$, $b = 3$ ਅਤੇ $c = 4$ ਹੈ।

(iv) ਸਮੀਕਰਣ $2x = y$ ਨੂੰ $2x - y + 0 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 2$, $b = -1$ ਅਤੇ $c = 0$ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ $ax + b = 0$ ਵੀ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸਨੂੰ $ax + 0.y + b = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $4 - 3x = 0$ ਨੂੰ $-3x + 0.y + 4 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ਹੱਲ : (i) $x = -5$ ਨੂੰ $1.x + 0.y = -5$, ਜਾਂ $1.x + 0.y + 5 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(ii) $y = 2$ ਨੂੰ $0.x + 1.y = 2$, ਜਾਂ $0.x + 1.y - 2 = 0$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iii) $2x = 3$ ਨੂੰ $2.x + 0.y - 3 = 0$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iv) $5y = 2$ ਨੂੰ $0.x + 5.y - 2 = 0$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4.1

1. ਇੱਕ ਕਾਪੀ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ।

   (ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਾਪੀ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ x ਹੈ ਅਤੇ ਪੈੱਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਹੈ)।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ :

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ :

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਲ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ x ਅਤੇ y ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਉ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 12$ ਲਈਏ। ਇੱਥੇ $x = 3$ ਅਤੇ $y = 2$ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $x = 3$ ਅਤੇ $y = 2$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

ਇਸ ਹੱਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜੇ (3, 2) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ x ਦਾ ਅਤੇ ਬਆਦ ਵਿੱਚ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ (0, 4) ਵੀ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਉਲਟ, (1, 4) ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2x + 3y = 14$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ 12 ਨਹੀਂ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ (0, 4) ਤਾਂ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ ਪਰ (4, 0) ਇੱਕ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ $2x + 3y = 12$ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਹੱਲ (3, 2) ਅਤੇ (0, 4) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਏ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋ ਕਿ (6, 0) ਇੱਕ ਹੋਰ ਹੱਲ ਹੈ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਕਈ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਤੁਸੀਂ $2x + 3y = 12$ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ x ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਲ (ਮੰਨ ਲਉ $x = 2$) ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ $4 + 3y = 12$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = \frac{8}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x = -5$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $-10 + 3y = 12$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ $y = \frac{22}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਭਿੰਨ - ਭਿੰਨ ਹੱਲਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਅੰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਹਿਣ ਤੋਂ ਭਾਵ ਕਿ *ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਮੀਕਰਣ $x + 2y = 6$ ਦੇ ਚਾਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x = 2, y = 2$ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $x = 2, y = 2$ ਭਰਨ 'ਤੇ

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਲਈਏ। x ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ $2y = 6$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ $y = 3$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 0, y = 3$ ਵੀ $x + 2y = 6$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਣ $x = 6$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 6, y = 0$ ਵੀ $x + 2y = 6$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਆਓ ਅਸੀਂ $y = 1$ ਲਈਏ। ਹੁਣ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਣ $x + 2 = 6$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਹੱਲ $x = 4$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(4, 1)$ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚਾਰ ਹੱਲ ਇਹ ਹਨ :

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ ਅਤੇ } (4, 1)$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਰਲ ਵਿਧੀ $x = 0$ ਲੈਣਾ ਹੈ ਅਤੇ y ਦਾ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ, $y = 0$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਤਦ x ਦਾ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਲੱਭੋ :

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ਹੱਲ : (i) $x = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ $3y = 12$, ਅਰਥਾਤ $y = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(0, 4)$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $y = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $(3, 0)$ ਵੀ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

(ii) $x = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ $5y = 0$, ਅਰਥਾਤ $y = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(0, 0)$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਜੇ ਅਸੀਂ $y = 0$ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ $(0, 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਉਹੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ $x = 1$ ਲਉ ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ y ਦਾ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ $-\frac{2}{5}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$, $2x + 5y = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਹੱਲ ਹੈ।

(iii) ਸਮੀਕਰਣ $3y + 4 = 0$ ਨੂੰ $0.x + 3y + 4 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ, x ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = -\frac{4}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਹੱਲ $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ਅਤੇ $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 4.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਕਿਹੜਾ ਵਿਕਲਪ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?

   $y = 3x + 5$ ਦਾ

   (i) ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ। (ii) ਸਿਰਫ ਦੋ ਹੱਲ ਹਨ (iii) ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਕਈ ਹੱਲ ਹਨ।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਚਾਰ ਹੱਲ ਲਿਖੋ

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੱਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸਮੀਕਰਣ $x - 2y = 4$ ਦੇ ਹੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਨਹੀਂ ਹੈ :

   (i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. k ਦਾ ਮੁੱਲ ਦੱਸੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 2, y = 1$ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = k$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੋਵੇ।

4.4 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ –

1. $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ a 'ਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਅਨੰਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।
3. ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਆਲੇਖ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹੱਲ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਆਲੇਖ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

N9M9V3

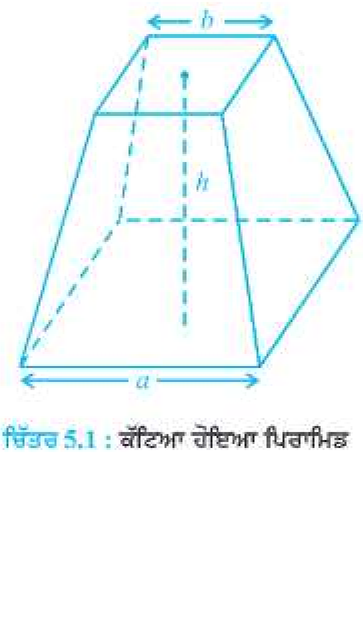
ਅਧਿਆਇ 5

ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਜਮਾਇਤੀ ਦੀ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ

5.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਸ਼ਬਦ 'ਜਮਾਇਤੀ' (Geometry) ਯੂਨਾਨੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ 'ਜਿਓ' (geo) ਅਤੇ 'ਮੀਟ੍ਰਿਨਿ' (metrein) ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਜਿਓ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ 'ਪ੍ਰਿਥਵੀ' ਜਾਂ 'ਧਰਤੀ' ਅਤੇ ਮੀਟ੍ਰਿਨ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ 'ਮਾਪਣਾ'। ਇਸ ਨਾਲ ਅਜਿਹਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਮਾਇਤੀ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਧਰਤੀ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਕਰਕੇ ਹੋਈ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਦੀ ਇਸ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਸੱਭਿਆਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਚਾਹੇ ਉਹ ਮਿਸਰ ਹੋਵੇ, ਬੇਬੀਲੋਨ ਹੋਵੇ, ਚੀਨ ਹੋਵੇ, ਭਾਰਤ ਹੋਵੇ, ਯੂਨਾਨ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ ਇਨਕਾਸ (Incas), ਆਦਿ। ਇਹਨਾਂ ਸੱਭਿਆਤਾਵਾਂ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪਿਆ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਪਈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਨੀਲ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੜ੍ਹ ਆਉਂਦੇ ਸਨ, ਤਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭੂਮੀ ਮਾਲਕਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਲੱਗਦੇ ਖੇਤਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (boundaries) ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਨਾਲ ਵਹਾ ਕੇ ਲੈ ਜਾਂਦੇ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਹੜਾਂ ਦੇ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ। ਇਸ ਕਾਰਜ ਲਈ, ਮਿਸਰ ਵਾਸੀਆਂ ਨੇ ਸਰਲ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਸਰਲ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਨੇਕਾਂ ਜਮਾਇਤੀ ਤਕਨੀਕਾਂ ਅਤੇ ਨਿਯਮ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੇ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਅੰਨ ਭੰਡਾਰ ਦੇ ਆਇਤਨ ਕੱਢਣ ਅਤੇ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ। ਉਹ ਇੱਕ ਕੱਟੇ ਹੋਏ ਪਿਰਾਮਿਡ (truncated pyramid) (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.1) ਦਾ ਆਇਤਨ ਲੱਭਣ ਦਾ ਸਹੀ ਸੂਤਰ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਿਰਾਮਿਡ



ਚਿੱਤਰ 5.1 : ਕੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਪਿਰਾਮਿਡ

ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਠੋਸ ਸ਼ਕਲ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਧਾਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਵਰਗ ਜਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀਆਂ ਪਾਸਵੀਆਂ ਫਲਕਾਂ (side faces ਜਾਂ lateral faces). ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਹੀ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

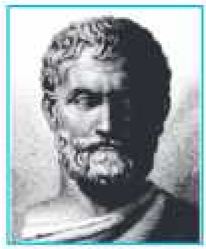
ਭਾਰਤੀ ਉਪ ਮਹਾਂਦੀਪ ਵਿੱਚ, ਹੜੱਪਾ ਅਤੇ ਮੋਹਨਜੋਦੜੋ ਆਦਿ ਦੀਆਂ ਖੁਦਾਈਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਿੰਧੂ ਘਾਟੀ ਦੀ ਸੱਭਿਅਤਾ (ਲਗਭਗ 3000 ਈ. ਪੂ) ਨੇ ਜਮਾਇਤੀ ਦਾ ਕਾਫੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਉਹ ਇੱਕ ਉੱਚ ਕੋਟੀ ਦਾ ਸੰਗਠਿਤ ਸਮਾਜ ਸੀ। ਸ਼ਹਿਰ ਅਤਿ ਅਧਿਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਿਕਸਤਿ ਸੀ ਅਤੇ ਬੜੇ ਯੋਜਨਾ ਬੱਧ ਢੰਗ ਨਾਲ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਸੜਕਾਂ ਬਿਲਕੁਲ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਸਨ ਅਤੇ ਭੂਮੀਗਤ ਨਾਲਿਆਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਸੀ। ਘਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕ ਕਮਰੇ ਹੁੰਦੇ ਸਨ। ਇਹ ਗੱਲਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਨਗਰਵਾਸੀ ਖੇਤਰਮਿਤੀ (mensuration) ਅਤੇ ਵਿਹਾਰਿਕ ਅੰਕ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਨਿਪੁੰਨ ਸਨ। ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਇੱਟਾਂ ਭੱਠਿਆਂ ਤੇ ਪਕਾਈਆਂ (ਬਣਾਈਆਂ) ਜਾਂਦੀਆਂ ਸਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਇੱਟਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਪਾਤ ਲੰਬਾਈ : ਚੌੜਾਈ : ਮੋਟਾਈ, 4 : 2 : 1 ਹੁੰਦਾ ਸੀ।

ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ, ਸੁਲਬਾਸੂਤਰ (800 ਈ. ਪੂ. -500 ਈ. ਪੂ.) ਜਮਾਇਤੀ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗ੍ਰੰਥ ਸਨ। ਵੈਦਿਕ ਕਾਲ ਦੀ ਜਮਾਇਤੀ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਵੈਦਿਕ ਪੂਜਾ ਦੇ ਲਈ ਜਰੂਰੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵੇਦੀਆਂ ਅਤੇ ਅਗਨੀ ਕੁੰਡਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਨਾਲ ਹੋਇਆ। ਪਵਿੱਤਰ ਅਗਨੀਆਂ ਨੂੰ ਜਿਆਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਕ ਸਿੱਧ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ, ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਥਾਵਾਂ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਅਦੇਸ਼ਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਹੁੰਦੇ ਸੀ। ਘਰੇਲੂ ਧਾਰਮਿਕ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ, ਵਰਗਾਕਾਰ ਅਤੇ ਚੱਕਰਕਾਰ ਵੇਦੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਸੀ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਰਵਜਨਿਕ ਪੂਜਾ ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਆਇਤਾਂ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਸਮਲੰਬਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਅਕਾਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਸੀ। (ਅਥਰ ਵੇਦ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ) 'ਸ਼੍ਰੀਯੰਤ੍ਰ' ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਨੌਂ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਹਨ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਨਾਲ 43 ਛੋਟੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਵੇਦੀਆਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਜਮਾਇਤੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ, ਫਿਰ ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਜਮਾਇਤੀ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਰਿਹਾ। ਪਰ ਇਹ ਬੜੇ ਅਨਿਯਮਿਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਸੀ। ਪੁਰਾਣੇ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ, ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਗਤੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਰੌਚਕ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਇੱਕ ਪੀੜੀ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਪੀੜੀ ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਮੌਖਿਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜਾਂ ਤਾੜ ਦੇ ਦਰਖਤ ਦੀਆਂ ਪੱਤੀਆਂ 'ਤੇ ਲਿਖੇ ਸੰਦੇਸ਼ਾਂ ਜਾਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਰਿਹਾ। ਨਾਲ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁਝ ਸੱਭਿਆਤਾਵਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੇਬੀਲੋਨੀਆ ਵਿੱਚ, ਜਮਾਇਤੀ ਇੱਕ ਅਤਿ ਅਧਿਕ ਵਿਹਾਰਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਵਾਲਾ ਵਿਸ਼ਾ ਬਣਿਆ ਰਿਹਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਭਾਰਤ ਅਤੇ ਰੋਮ ਵਿੱਚ ਰਿਹਾ। ਮਿਸਰ ਵਾਸੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਜਮਾਇਤੀ

ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਕਥਨ ਹੀ ਬਣੇ ਹੋਏ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਕੋਈ ਵਿਆਪਕ ਨਿਯਮ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਬੇਬੀਲੋਨ ਅਤੇ ਮਿਸਰਵਾਸੀਆਂ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਹੀ ਜਮਾਇਤੀ ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਵਿਹਾਰਿਕ ਕਾਰਜਾਂ ਲਈ ਹੀ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਪਰੰਤੂ ਯੂਨਾਨ ਵਰਗੀਆਂ ਸੱਭਿਅਤਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰਕ ਤੇ ਬਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਕਿ ਕੁਝ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਰੁਚੀ ਉਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਨਿਗਮਣ ਤਰਕ (deductive reasoning) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚਣ ਵਿੱਚ ਸੀ (ਦੇਖੋ ਅੰਤਿਕਾ 1)।

ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਥੇਲਸ (Thales) ਨੂੰ ਸਿਹਰਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਸਬੂਤ ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਸੀ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ (ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ) ਕਰਦਾ ਹੈ। ਥੇਲਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਚੇਲਾ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ (572 ਈ. ਪੂ.) ਸੀ, ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸਾਥੀਆਂ ਨੇ ਅਨੇਕਾਂ ਜਮਾਇਤੀ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਸਿਧਾਤਾਂ ਨੂੰ ਅਤਿਅਧਿਕ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ। ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ 300 ਈ. ਪੂ. ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰਹੀ। ਇਸੇ ਸਮੇਂ ਮਿਸਰ ਵਿੱਚ ਅਲੈਗਜੈਂਡਰੀਆ ਦੇ ਇੱਕ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਧਿਆਪਕ ਯੂਕਲਿਡ (Euclid) ਨੇ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਜਾਣੇ ਪਹਿਚਾਣੇ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤ ਨੂੰ ਇੱਕਤਰਿਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ **ਏਲੀਮੈਂਟਸ (Elements)** ਨਾਮਕ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਗ੍ਰੰਥ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਸਨੂੰ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਏਲੀਮੈਂਟਸ ਨੂੰ 13 ਅਧਿਆਵਾਂ (Chapters) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ, ਜਿਹਨਾਂ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ 'ਪੁਸਤਕ' ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਨੇ ਸਾਰੀ ਦੁਨੀਆਂ ਦੀ ਜਮਾਇਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮਝ ਨੂੰ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਤੱਕ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕੀਤਾ।


ਥੇਲਸ (640 ਈ.ਪੂ. - 546 ਈ.ਪੂ.)
ਚਿੱਤਰ 5.2


ਯੂਕਲਿਡ (325 ਈ.ਪੂ. - 265 ਈ.ਪੂ.)
ਚਿੱਤਰ 5.3

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਵਰਤਮਾਨ ਰੂਪ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ।

5.2 ਯੂਕਲਿਡ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ, ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਅਤੇ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ

ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਯੂਨਾਨੀ ਹਿਸਾਬਦਾਨਾਂ ਨੇ ਜਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਉਸ ਦੁਨੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤੀ ਮਾਡਲ (model) ਸੋਚਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਰਹਿੰਦੇ ਸੀ। ਬਿੰਦੂ (point), ਰੇਖਾ (line), ਸਮਤਲ (plane) [ਜਾਂ ਸਤ੍ਹਾ (surface)], ਆਦਿ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਤੋਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨੇੜੇ -ਤੇੜੇ ਸੀ। ਆਕਾਸ਼ **(space)** ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਨੇੜੇ-ਤੇੜੇ ਦੀਆਂ ਠੋਸ

ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਤੇ, ਇੱਕ ਠੋਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤੀ ਜਮਾਇਤੀ ਧਾਰਨਾ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਇੱਕ ਠੋਸ **(solid)** ਦਾ ਅਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਮਾਪ ਅਤੇ ਸਥਿਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਥਾਂ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਥਾਂ ਤੇ ਲਿਜਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਸਤ੍ਹਾ **(surface)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਅਕਾਸ਼ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਕੋਈ ਮੋਟਾਈ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਸਤ੍ਹਾ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਵਕਰ **(curves)** ਜਾਂ ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ **(lines)** ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਿਰੇ, ਬਿੰਦੂ **(points)** ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਠੋਸਾਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਠੋਸ-ਸਤ੍ਹਾ-ਰੇਖਾਵਾਂ-ਬਿੰਦੂ) ਤੱਕ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹਰੇਕ ਪਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਸਤਾਰ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮਿਣਤੀ (dimension) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਨੂੰ ਗਵਾ ਬੈਠਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਠੋਸ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਮਿਣਤੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇੱਕ ਸਤ੍ਹਾ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮਿਣਤੀਆਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਇੱਕ ਮਿਣਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਈ ਮਿਣਤੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸੂਖਮ ਰੂਪ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਇਹਨਾਂ ਰਹੱਸਾਂ ਉਦਘਾਟਨਾਂ ਦਾ ਆਰੰਭ 'ਏਲੀਮੈਂਟਸ' ਦੀ ਪੁਸਤਕ 1 ਵਿੱਚ 23 ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ (definitions) ਦੇ ਕੇ ਕੀਤਾ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

1. ਇੱਕ **ਬਿੰਦੂ (point)** ਉਹ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਭਾਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।
2. ਇੱਕ **ਰੇਖਾ (line)** ਚੌੜਾਈ ਰਹਿਤ ਲੰਬਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਿਰੇ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
4. ਇੱਕ **ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ** ਅਜਿਹੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਖੁਦ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਪੱਧਰੇ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਸਤ੍ਹਾ **(Surface)** ਉਹ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਿਰਫ ਲੰਬਾਈ ਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ **ਕਿਨਾਰੇ (edges)** ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
7. ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਸਤ੍ਹਾ **(plane surface)** ਅਜਿਹੀ ਸਤ੍ਹਾ ਹੈ ਜੋ ਖੁਦ ਤੇ ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਪੱਧਰੇ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਪੂਰਵਕ ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਜਿਵੇਂ ਭਾਗ, ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ, ਪੱਧਰੇ ਰੂਪ ਨਾਲ, ਆਦਿ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅੱਗੇ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਝਾਉਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੋ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'ਇੱਕ ਭਾਗ' ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਗ ਉਹ ਹੈ, ਜੋ 'ਖੇਤਰ' ਘੇਰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ 'ਖੇਤਰ' ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤ ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੰਮੀ ਕਤਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ ਕਰਕੇ, ਹਿਸਾਬਦਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਸੌਖਾ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਕਿ ਕੁਝ ਜਮਾਇਤੀ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (*undefined*) ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਜਮਾਇਤੀ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦਾ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ 'ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ' ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਹਤਰ ਅੰਤਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਗਤ ਅਭਾਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ

ਇੱਕ ਸੂਖਮ ਬਿੰਦੂ (dot) ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਇਸ ਸੂਖਮ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੁੱਝ ਨਾਂ ਕੁੱਝ ਮਿਣਤੀ ਜਰੂਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਉੱਪਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਵਿੱਚ ਵੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਚੌੜਾਈ ਤੇ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਜਿਕਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਪਹਿਲਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਜਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ, ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਤਲ (ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਸਤ੍ਹਾ) ਨੂੰ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨਕੇ ਚੱਲਦੇ ਹਾਂ। ਸਿਰਫ ਇਹ ਗੱਲ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਗਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ 'ਭੌਤਿਕ ਵਸਤੂਆਂ' ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਆਪਣੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਤੋਂ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਸੱਚੇ ਕਥਨ ਮੰਨਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ। ਇਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 'ਸਪਸ਼ਟ : ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੱਚ' ਸਨ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ। ਇਹ ਵਰਗ ਸਨ : **ਸਵੈ ਸਿੱਧ (axioms)** ਅਤੇ **ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (postulates)**। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਮੂਲ ਅਧਾਰ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਮਾਇਤੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਨ। ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ [ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ **(axioms)** ਕਿਹਾ ਗਿਆ] ਉਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੰਤਰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਤੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੇਵਲ ਜਮਾਇਤੀ ਨਾਲ ਹੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਸੀ। ਕਥਨ ਅਤੇ ਮੂਲ ਅਧਾਰਾਂ ਦੀ ਹੋਰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਕੁੱਝ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ, ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ :

(1) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(2) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜੀਏ, ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(3) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਈਏ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਫਿਰ ਬਰਾਬਰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

(4) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(5) ਪੂਰਣ ਆਪਣੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(6) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(7) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਅੱਧੇ-ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹ ਸਾਂਝੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਕਹੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਪਹਿਲੀ ਸਾਂਝੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਸਮਤਲੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ

ਵਜੋਂ, ਜੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਵੀ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਆਇਤ ਵਿੱਚ ਜੋੜਿਆ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੀ, ਇੱਕ ਪੰਜਭੁਜ (pentagon) ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਚੌਥਾ ਕਥਨ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਸਰਬਸਮ (identical) ਹੋਣ (ਅਰਥਾਤ ਇੱਕੋ ਹੀ ਹੋਣ), ਤਾਂ ਉਹ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਉੱਪਰ-ਸਥਾਪਨ ਕਿਰਿਆ (superposition) ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ (justification) ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਥਨ (5) 'ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ (greater than)' ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਜੇ ਕੋਈ ਰਾਸ਼ੀ B. ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀ A ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ A ਨੂੰ ਰਾਸ਼ੀ B ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀ C ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਨਾਲ, $A > B$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ C ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $A = B + C$ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (postulates) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

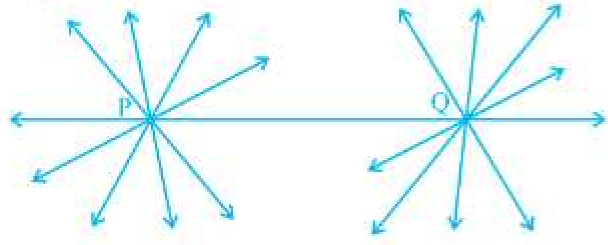
ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 1: *ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।*

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਮੂਲ ਆਧਾਰ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਵੱਖ - ਵੱਖ (distinct) ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਜ਼ਰੂਰ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਲੱਗਦਾ ਕਿ ਅਜਿਹੀਆਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਪਰ ਆਪਣੇ ਕਾਰਜਾਂ ਵਿੱਚ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ, ਬਿਨਾਂ ਕੁੱਝ ਦੱਸੇ, ਇਹ ਬਾਰ-ਬਾਰ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਿੱਲਖਣ (unique) ਰੇਖਾ ਹੀ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 5.1 : *ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।*

ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਬਿੰਦੂ Q ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੀ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹੋਣ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.4)? ਸਿਰਫ ਇੱਕ। ਇਹ ਰੇਖਾ PQ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ Q ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ

ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ? ਸਿਰਫ ਇੱਕ, ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾ PQ । ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (self evident) ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 5.4

ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 2 : *ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਰੇਖਾ (terminated line) ਨੂੰ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।*

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅੱਜ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ (line segment) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਉਸਨੂੰ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਸ਼ਾਂਤ ਰੇਖਾ ਕਿਹਾ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ, ਵਰਤਮਾਨ ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ, ਦੂਸਰਾ ਕਥਨ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵਧਾ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਣਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.5)।

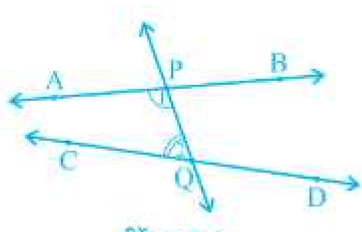
ਚਿੱਤਰ 5.5

ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 3 : *ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।*

ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 4 : *ਸਾਰੇ ਸਮਕੋਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 5 : *ਜੇ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਦੋ ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ 'ਤੇ ਡਿੱਗਕੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ (interior angles) ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਮਿਲਕੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਏ ਜਾਣ 'ਤੇ ਉਸੇ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਜੋੜ ਦੋ ਸਮਕੋਣਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦੇ ਹੈ।*

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਚਿੱਤਰ 5.6 ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ PQ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿੱਗਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੋਣਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦਾ ਜੋੜ, ਜੋ PQ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਸਥਿਤ ਹਨ, 180° ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ PQ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਕੱਟਣਗੀਆਂ।



ਚਿੱਤਰ 5.6

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਪੰਜ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿਰਫ ਦੇਖਣ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸਾਫ ਪਤਾ ਚੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹੋਰ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 5 ਕੁਝ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ, ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ 1 ਤੋਂ 4 ਇਨੀਆਂ ਸਰਲ ਅਤੇ ਸਪਸ਼ਟ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਸੱਚ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਨੂੰ ਬਿਨਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਅੰਤਿਕਾ 1)। ਇਸ ਜਟਿਲਤਾ ਦੇ ਕਾਰਣ, ਪੰਜਵੀਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 'ਤੇ ਅਗਲੇ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਅੱਜ ਕੱਲ, ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ, ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ (verb) ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 'ਆਓ ਧਾਰਣਾ ਕਰੀਏ' ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ 'ਆਉ ਸੰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਵਾਪਰੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਕੁਝ ਕਥਨ ਕਹੀਏ'। ਇਸ ਦੀ ਮੰਨਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਉਹ ਸੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ 'ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ (system) *ਅਵਰੋਧੀ* (*consistent*) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਅੰਤਿਕਾ 1), ਜੇ ਇਹਨਾਂ 'ਸਵੈ ਸਿੱਧਾਂ' ਤੋਂ ਅਜਿਹਾ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣਾ ਅਸੰਭਵ ਹੋਵੇ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਜਾਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਵਿਰੋਧੀ (contradictory) ਹੋਣ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਵਰੋਧੀ ਹੋਵੇ।

ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਆਪਣੇ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਤੇ ਕਥਨ ਦੇਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਰ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ। ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਗਮਣ ਤਰਕ (deductive reasoning) ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ। ਜਿਹੜੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਉਹ ਸਾਧਯ (propositions) ਜਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ (theorems) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਸੀ। ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਆਪਣੇ ਮੂਲ ਆਧਾਰਾਂ, ਕਥਨਾਂ, ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਤਰਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ 465 ਸਾਧਯ ਸਨ। ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਕੁੱਝ ਅਗਲੇ ਅਧਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋਗੇ।

ਆਉ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਕੁੱਝ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਅਤੇ B ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.7), ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB + BC = AC$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 5.7

ਹੱਲ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, AB + BC ਦੇ ਨਾਲ AC ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ।

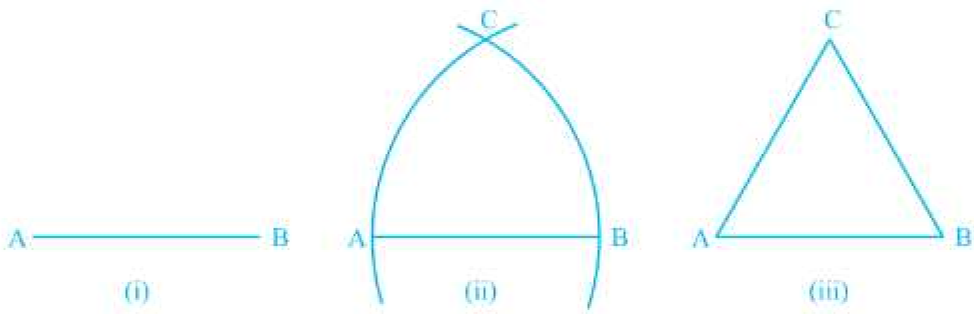
ਨਾਲ ਹੀ, ਯੂਕਲਿਡ ਦਾ ਕਥਨ (4) ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$AB + BC = AC$$

ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਰੇਖਾਖੰਡ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਹਲ : ਉੱਪਰਲੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ, ਮੰਨ ਲਉ, AB ਦਿੱਤਾ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.8 (i)]।



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਇੱਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁੱਝ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ। ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ (3)ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਬਿੰਦੂA ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ AB ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.8 (ii)]। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਕੇ ਅਤੇ BA ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਚੱਕਰ ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਰੇਖਾ ਖੰਡ AC ਅਤੇ BC ਖਿੱਚ ਕੇ Δ ABC ਬਣਾਈਏ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.8 (iii)]।

ਇਸ ਲਈ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ; ਅਰਥਾਤ AB = AC = BC ਹੈ।

ਹੁਣ, AB = AC ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹਨ। (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ , AB = BC (ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ) (2)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਤੱਥਾਂ ਅਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ (ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।) ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹੋ ਕਿ $AB = BC = AC$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਲਈ: Δ ABC ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ, ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਜਿਕਰ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਕਿ ਕੇਂਦਰਾ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਮਿਲਣਗੇ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਵੱਖ - ਵੱਖ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਨੀ ਵਾਰ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5.1 : *ਦੋ ਵੱਖ - ਵੱਖ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝੇ ਨਹੀ ਹੋ ਸਕਦੇ।*

ਸਬੂਤ : ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l ਅਤੇ m ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ l ਅਤੇ m ਵਿੱਚੋਂ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਹੈ।

ਥੋੜੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉਹ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੋ ਭਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ P ਅਤੇ Q 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦੋ ਭਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ P ਅਤੇ Q ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l ਅਤੇ m ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 5.1 ਦੇ ਵਿਰੁੱਧ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਕਲਪਨਾ ਤੋਂ ਚਲੇ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੋ ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਗਲਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਣ ਲਈ ਮਜਬੂਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਝੂਠ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦਿਉ।
   (i) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਅਸੰਖ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।
   (iii) ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਰੇਖਾ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
   (iv) ਜੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ

(v) ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ, ਜੇ AB = PQ ਅਤੇ PQ = XY ਹੈ, ਤਾਂ AB = XY ਹੋਵੇਗਾ।

ਚਿੱਤਰ 5.9

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿਉ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਪਦ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋਗੇ ?

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ (ii) ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ (iii) ਰੇਖਾ ਖੰਡ

(iv) ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (v) ਵਰਗ

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(i) ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਅਤੇ, ਇੱਕ ਤੀਸਰਾ ਬਿੰਦੂ C ਅਜਿਹੀ ਜਗ੍ਹਾ 'ਤੇ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸ਼ਬਦ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਅਵਰੋਧੀ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

4. ਜੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ C ਅਜਿਹਾ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ AC = BC ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC = \frac{1}{2}AB$ ਹੈ। ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇਸਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

5. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ, C ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਾ ਇੱਕ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. ਚਿੱਤਰ 5.10 ਵਿੱਚ, ਜੇ AC = BD ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB = CD ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 5.10

7. ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਕਥਨ 5 ਇੱਕ ਸਰਬਵਿਆਪੀ ਸੱਚ ਕਿਉਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ? (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੰਜਵੀਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।)

5.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

1. ਜੇ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਬਿਦੂ, ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਗਣਿਤਿਕਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਅਤੇ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸਪਸ਼ਟ ਸਰਬਵਿਆਪੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਪ੍ਰਮੇਯ ਉਹ ਕਥਨ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ, ਸਵੈ-ਸਿੱਧ, ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਕਥਨਾਂ ਅਤੇ ਨਿਗਮਣ ਤਰਕ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਕੁਝ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਸਨ :

   (1) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

   (2) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਚ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

   (3) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਚੋਂ ਘਟਾਇਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

   (4) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

   (5) ਪੂਰਣ, ਆਪਣੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   (6) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

   (7) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਅੱਧੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
5. ਯੂਕਲਿਡ ਦੀਆਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਨ :

   ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 1: ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

   ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 2 : ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

   ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 3 : ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਕੇ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

   ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ 4 : ਸਾਰੇ ਸਮਕੋਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

Z7J1T9

ਅਧਿਆਇ 6

ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ

6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਖਿੱਚਣ ਦੇ ਲਈ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਕੁੱਝ ਸਵੈ ਸਿੱਧਾਂ (axioms) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵੀ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਹੋਰ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ ਜਦੋਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵੀ ਕਰੋਗੇ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੋ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਨਿਗਮਣ ਤਰਕ (deductive reasoning) ਨਾਲ ਕੁੱਝ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵੀ ਕਰੋਗੇ (ਦੇਖੋ ਅੰਤਿਕਾ 1)। ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ (edges) ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਬਣੇ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣ ਦੇਖਦੇ ਹੋ। ਸਮਤਲ ਸਤਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਾਰ ਪੂਰਵਕ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨੀ ਲਈ ਬਾਂਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਝੌਂਪੜੀ ਦਾ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਸੋਚੋ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਬਣਾਉਗੇ ? ਕੁਝ ਬਾਂਸਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੱਖੋਗੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨੂੰ ਤਿਰਛਾ ਰੱਖੋਗੇ। ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਨਵੀਸ (architect) ਇੱਕ ਬਹੁਮੰਜਿਲ ਭਵਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੋਣਾਂ 'ਤੇ ਕਾਟਵੀਆਂ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣੀਆਂ ਪੈਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣੇ ਬਿਨਾਂ ਇਸ ਭਵਨ ਦੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਕਿਰਣ ਚਿੱਤਰ (ray diagrams) ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੇ ਅਪਵਰਤਨ (refraction) ਗੁਣ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀਆਂ ਕਿਰਣਾਂ ਇੱਕ ਮਾਧਿਅਮ (medium) ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਮਾਧਿਅਮ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵੇਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ

ਕਰਦੇ ਹੋ। ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪਿੰਡ (body) 'ਤੇ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਬਲ ਕਾਰਜ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਲਾਂ ਦਾ ਉਸ ਪਿੰਡ ਤੇ ਨਤੀਜਾ ਬਲ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਦੇ ਹੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਲਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਖੰਡਾਂ, ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਸਮੇਂ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧ ਜਾਨਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਕਿਰਣਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਕਾਟਵੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲੱਭਣ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਜਹਾਜ ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਘਰ (light house) ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਲੱਭਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਲੇਟਵੀਂ ਅਤੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ (line of sight) ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਾਫੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਇਤੀ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਨਿਗਮਿਤ ਕਰਨ (ਕੱਢਣ) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋਗੇ।

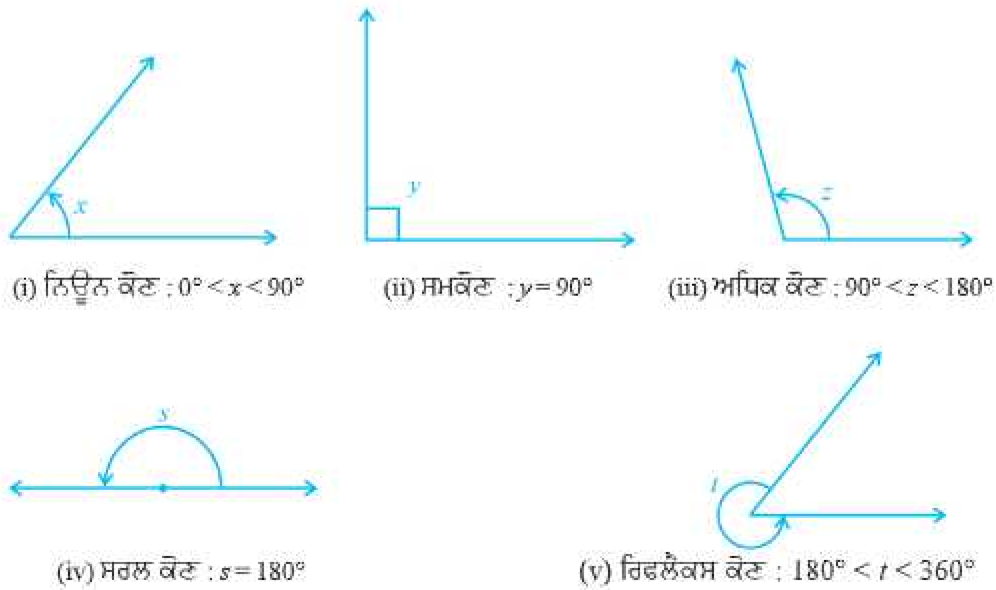
ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪੜ੍ਹੇ ਗਏ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਾਂਗੇ।

6.2 ਆਧਾਰ ਰੂਪ ਪਦ ਅਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜਿਸਦੇ ਦੋ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ, ਕਿਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $\overline{AB}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ AB ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਰਣ AB ਨੂੰ $\overrightarrow{AB}$ ਨਾਲ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਨੂੰ $\overleftrightarrow{AB}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਕੇਤਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾ AB, ਕਿਰਣ AB, ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਕੇਤ AB ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਸੰਦਰਭ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਕਦੇ -ਕਦੇ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰ ਜਿਵੇਂ l, m, n ਆਦਿ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਜੇ ਤਿੰਨ ਜਾਂ ਜਿਆਦਾ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ **ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ (collinear points)** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ **ਅਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ (non-collinear points)** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

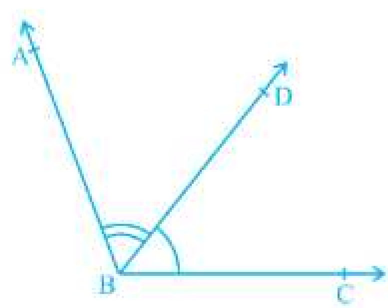
ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਕਿਰਣਾਂ ਇੱਕ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਆਰੰਭ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਇੱਕ **ਕੋਣ (angle)** ਬਣਦਾ ਹੈ। ਕੋਣ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਕਿਰਣਾਂ, ਕੋਣ ਦੀਆਂ **ਭੁਜਾਵਾਂ (arms ਜਾਂ sides)** ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਕੋਣ ਦਾ **ਸਿਖਰ (vertex)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਜਿਵੇਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (acute angle),ਸਮਕੋਣ (right angle). ਅਧਿਕ ਕੋਣ (obtuse angle), ਸਰਲ ਕੋਣ (straight angle) ਅਤੇ ਰਿਫਲੈਕਸ ਕੋਣ (reflex angle) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1)।



ਚਿੱਤਰ 6.1 : ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ

ਇੱਕ **ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ** $0°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਠੀਕ $90°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। $90°$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ $180°$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮਾਪ ਵਾਲਾ ਕੋਣ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਰਲ ਕੋਣ $180°$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਕੋਣ ਜੋ $180°$ ਤੋਂ ਵੱਧ, ਪਰ $360°$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮਾਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਰਿਫਲੈਕਸ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ, ਜੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਜਿਹੇ ਕੋਣ **ਪੂਰਕ ਕੋਣ (complementary angles)** ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਕੋਣ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੋਵੇ, **ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣ (supplementary angles)** ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।

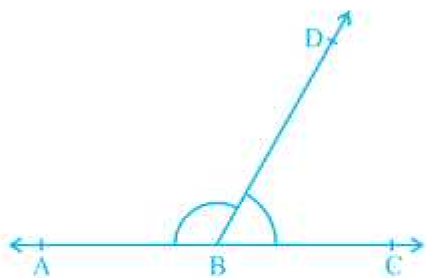
ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ (adjacent angles) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.2)। ਦੋ ਕੋਣ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ **(adjacent angles)** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਸਿਖਰ ਹੋਵੇ, ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉਹ ਭੁਜਾਵਾਂ ਜੋ ਸਾਂਝੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੋਣ। ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ $\angle ABD$ ਅਤੇ $\angle DBC$ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ। ਕਿਰਣ BD ਇਹਨਾਂ ਦੀ



ਚਿੱਤਰ 6.2 : ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ

ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ ਹੈ ਅਤੇ B ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਸਿਖਰ ਹੈ। ਕਿਰਣ BA ਅਤੇ ਕਿਰਣ BC ਉਹ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸਾਂਝੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ, ਜਦੋਂ ਦੋ ਕੋਣ ਲਾਗਵੇਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਸਾਂਝੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ ਹੈ।

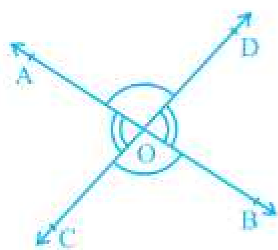
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\angle ABC$ ਅਤੇ $\angle ABD$ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਕਿਉਂ ? ਇਸਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਗੈਰ – ਸਾਂਝੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਭੁਜਾਵਾਂ ਜੋ ਸਾਂਝੀਆਂ ਨਹੀਂ) BD ਅਤੇ BC ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ BA ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.3 : ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ

ਜੇ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਗੈਰ ਸਾਂਝੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ BA ਅਤੇ BC ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਣਾਉਣ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 6.3 ਵਰਗਾ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, $\angle ABD$ ਅਤੇ $\angle DBC$ **ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ (linear pair of angles)** ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

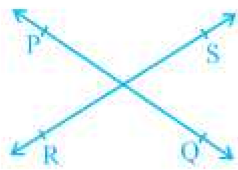
ਤੁਸੀਂ **ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ (vertically opposite angles)** ਨੂੰ ਵੀ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜੋ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ AB ਅਤੇ CD ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ 'ਤੇ ਬਣਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.4)। ਇੱਥੇ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਜੋੜਾ $\angle AOD$ ਅਤੇ $\angle BOC$ ਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੂਸਰਾ ਜੋੜਾ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

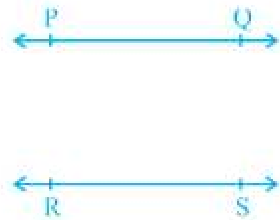


ਚਿੱਤਰ 6.4 : ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ

6.3 ਕੱਟਣ ਵਾਲੀਆਂ ਅਤੇ ਨਾ-ਕੱਟਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ RS ਖਿੱਚੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.5 (i) ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 6.5 (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।





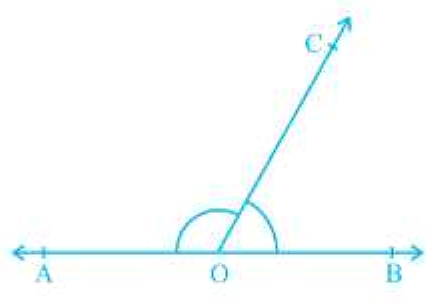
(i) ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ (ii) ਅਕਾਟਵੀਆਂ (ਸਮਾਂਤਰ) ਰੇਖਾਵਾਂ

ਚਿੱਤਰ 6.5 : ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ

ਰੇਖਾ ਦੀ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਵੀ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਰੇਖਾਵਾਂ **PQ** ਅਤੇ **RS** ਚਿੱਤਰ 6.5 (i) ਵਿੱਚ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 6.5 (ii) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਲੰਬਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਹ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਦੋਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

6.4 ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ

ਅਨੁਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਜੋੜਿਆਂ ਜਿਵੇਂ ਪੂਰਕ ਕੋਣ, ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣ, ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ, ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ, ਆਦਿ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਉਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੋਈ ਕਿਰਣ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋ ਕੇ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਨੂੰ AB ਅਤੇ ਕਿਰਣ ਨੂੰ OC ਕਹੋ। ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕੋਣ ਕੀ ਹਨ ? ਇਹ $\angle AOC$, $\angle BOC$ ਅਤੇ $\angle AOB$ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.6 : ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ

ਕੀ ਅਸੀਂ $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? (1)

ਹਾਂ! (ਕਿਉਂ ? ਅਨੁਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਦੇਖੋ)

$\angle AOB$ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ 180° ਹੈ। (ਕਿਉਂ?) (2)

ਕੀ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ਹੈ ? ਹਾਂ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਕਥਨ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

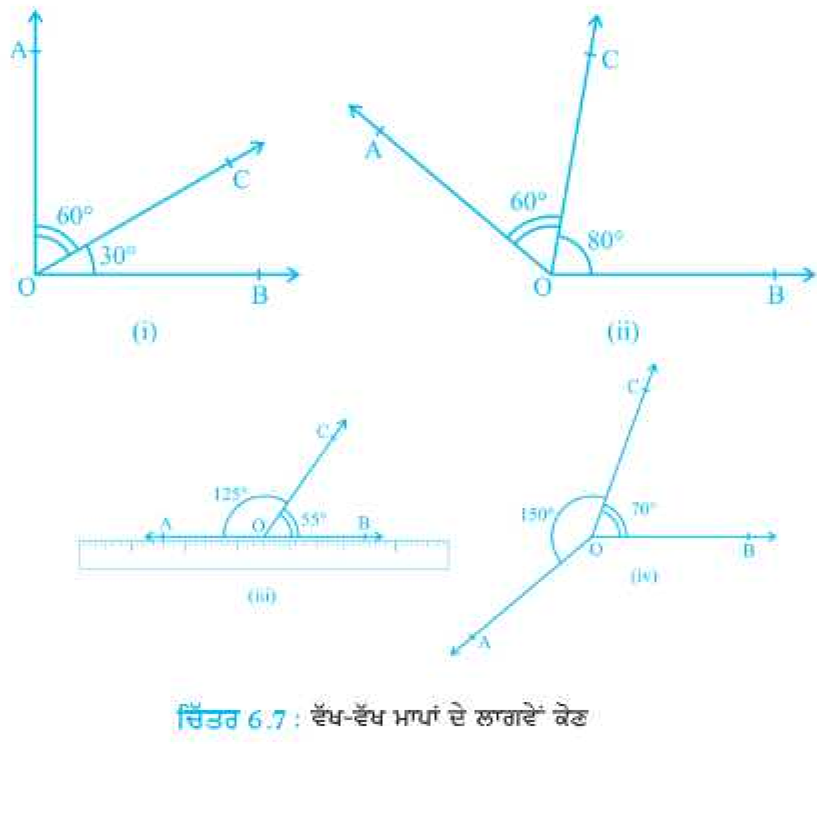
ਸਵੈ ਸਿਧ 6.1 : *ਜੇ ਇੱਕ ਕਿਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਦੋਨੋਂ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.1 ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ 'ਇੱਕ ਕਿਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੋਵੇ'। ਇਸ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਿਆ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਦੋਵੇਂ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਸਵੈ ਸਿੱਧ 6.1 ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਲਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਅਰਥਾਤ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.1 ਦੇ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਮੰਨੀਏ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨੂੰ ਸਿੱਟਾ ਮੰਨੀਏ। ਤਦ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(A) ਜੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਕਿਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਅਰਥਾਤ ਅ-ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਹਨ)।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.1 ਅਤੇ ਕਥਨ (A) ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਦਾ **ਉਲਟ (converse)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ ਕਥਨ (A) ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਆਉ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ। ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪਾਂ ਦੇ, ਚਿੱਤਰ 6.7 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ, ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਖਿੱਚੋ। ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਫੁੱਟਾ (ruler) ਰੱਖੋ। ਕੀ ਦੂਜੀ ਭੁਜਾ ਵੀ ਇਸ ਫੁੱਟੇ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 6.7 : ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਿਰਫ ਚਿੱਤਰ 6.7 (iii) ਵਿੱਚ ਹੀ ਦੋਨੋਂ ਨਾਂ ਸਾਂਝੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਛੁੱਟੇ ਦੇ ਇੱਕੋ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ A, O ਅਤੇ B ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਰਣ OC ਇਸ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖੋ ਕਿ $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਥਨ (A) ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ :

ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.2 : *ਜੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਗੈਰ ਸਾਂਝੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।*

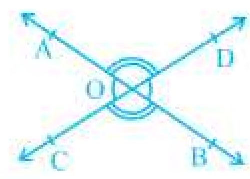
ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣਾਂ ਕਰਕੇ, ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ **(Linear Pair Axiom)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ ਜਦੋਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਬੂਤ (proof) ਦੇ ਤੱਤ ਦੇਖਣ ਲਈ, ਅੰਤਿਕਾ ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਬੂਤ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਸਮੇਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ।

ਥਿਊਰਮ 6.1 : *ਜੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.8 : ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ

(i) $\angle AOC$ ਅਤੇ $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ ਅਤੇ $\angle BOC$

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\angle AOC = \angle BOD$ ਹੈ ਅਤੇ $\angle AOD = \angle BOC$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕਿਰਣ OA ਰੇਖਾ CD 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ) (1)

ਕੀ ਅਸੀਂ $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਹਾਂ। (ਕਿਉਂ?) (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

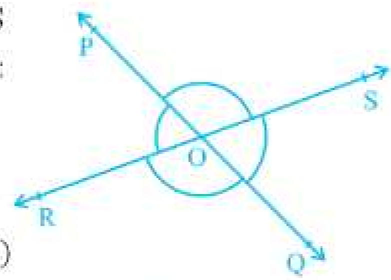
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

ਇਸ ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\angle AOC = \angle BOD$

(ਅਨੁਭਾਗ 5.2 ਦਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 3 ਦੇਖੋ)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\angle AOD = \angle BOC$ ਹੈ।
ਆਉ ਹੁਣ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਅਤੇ ਥਿਊਰਮ 6.1 ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਚਿੱਤਰ 6.9 ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ RS ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.9

ਹੱਲ : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜੇ ਦੇ ਕੋਣ)

ਪਰ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸੇ ਲਈ $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

ਹੁਣ $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਅਤੇ $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਚਿੱਤਰ 6.10 ਵਿੱਚ, ਕਿਰਣ OS ਰੇਖਾ POQ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ। ਕਿਰਣ OR ਅਤੇ OT ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle POS$ ਅਤੇ $\angle SOQ$ ਦੇ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹਨ। ਜੇ $\angle POS = x$ ਹੈ ਤਾਂ $\angle ROT$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਰਣ OS ਰੇਖਾ POQ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 6.10

ਇਸ ਲਈ $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

ਪਰ $\angle POS = x$

ਇਸ ਲਈ $x + \angle SOQ = 180^\circ$

ਇਸ ਲਈ $\angle SOQ = 180^\circ - x$

ਹੁਣ ਕਿਰਣ OR, $\angle POS$ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

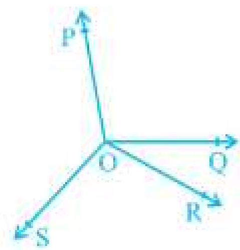
$$= 90° - \frac{x}{2}$$

ਹੁਣ $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90°$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ OP, OQ, OR ਅਤੇ OS ਚਾਰ ਕਿਰਣਾਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ ਹੈ।



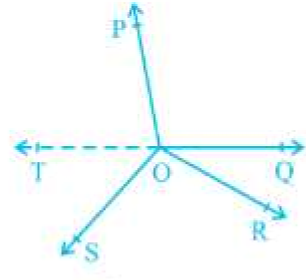
ਚਿੱਤਰ 6.11

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਰਣਾਂ OP, OQ, OR ਅਤੇ OS ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਪਿਛਲੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਵਧਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਆਉ ਕਿਰਣ OQ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ T ਤੱਕ ਪਿੱਛੇ ਵਧਾ ਦਿਉ ਤਾਂ ਕਿ TOQ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.12)।

ਹੁਣ ਕਿਰਣ OP ਰੇਖਾ TOQ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (1)

(ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ)



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਰਣ OS, ਰੇਖਾ TOQ 'ਤੇ ਖੜੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

ਪਰ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (2) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180° \quad (3)$$

ਹੁਣ, (1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਮਿਲੇਗਾ।

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360° \quad (4)$$

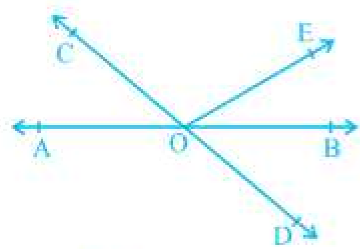
ਪਰ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (4) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ:

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$

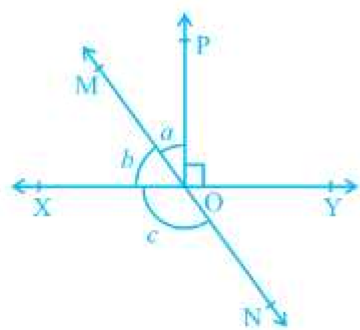
ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਚਿੱਤਰ 6.13 ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ ਹੈ ਅਤੇ $\angle BOD = 40^\circ$ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle BOE$ ਅਤੇ ਰਿਫਲੈਕਸ (ਪ੍ਰਤਿਵਰਤੀ) $\angle COE$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



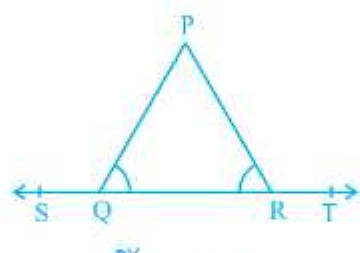
ਚਿੱਤਰ 6.13

2. ਚਿੱਤਰ 6.14 ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਵਾਂ XY ਅਤੇ MN ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ $\angle POY = 90^\circ$ ਅਤੇ $a : b = 2 : 3$ ਹੈ, ਤਾਂ c ਪਤਾ ਕਰੋ।



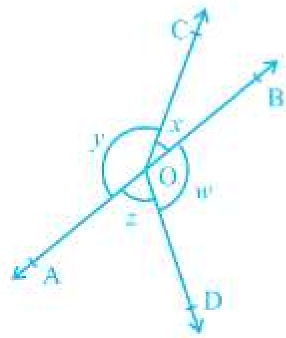
ਚਿੱਤਰ 6.14

3. ਚਿੱਤਰ 6.15 ਵਿੱਚ ਜੇ $\angle PQR = \angle PRQ$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle PQS = \angle PRT$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.15

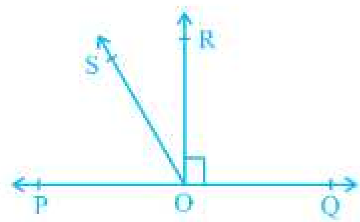
4. ਚਿੱਤਰ 6.16 ਵਿੱਚ, ਜੇ $x + y = w + z$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AOB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.16

5. ਚਿੱਤਰ 6.17 ਵਿੱਚ POQ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਕਿਰਣ OR ਰੇਖਾ PQ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਕਿਰਣਾਂ OP ਅਤੇ OR ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ OS ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਿਰਣ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

$$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$$

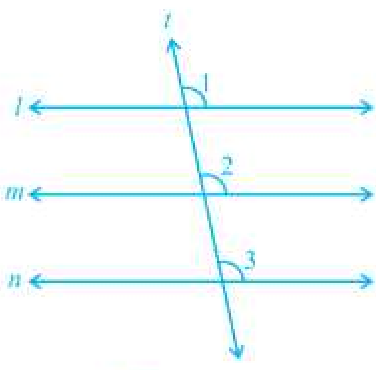


ਚਿੱਤਰ 6.17

6. ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\angle XYZ = 64°$ ਹੈ ਅਤੇ XY ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਤੱਕ ਵਧਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੂਚਨਾ ਤੋਂ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ। ਜੇ ਕਿਰਣ YQ, $\angle ZYP$ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle XYQ$ ਅਤੇ ਰਿਫਲੈਕਸ $\angle QYP$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6.5 ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ

ਜੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕੀ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣਗੀਆਂ ? ਆਉ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ। ਚਿੱਤਰ 6.18 ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $m \parallel l$ ਹੈ ਅਤੇ $n \parallel l$ ਹੈ। ਆਉ ਰੇਖਾਵਾਂ l, m ਅਤੇ n ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ t ਖਿੱਚੀਏ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $m \parallel l$ ਹੈ ਅਤੇ $n \parallel l$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.18

ਇਸ ਲਈ $\angle 1 = \angle 2$ ਅਤੇ $\angle 1 = \angle 3$ ਹੈ।

(ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਸਵੱ-ਸਿਧ)

ਇਸ ਲਈ $\angle 2 = \angle 3$ (ਕਿਉਂ?)

ਪਰੰਤੂ $\angle 2$ ਅਤੇ $\angle 3$ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

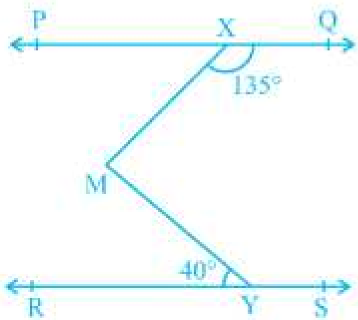
$m \parallel n$ (ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਦਾ ਉਲਟ)

ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

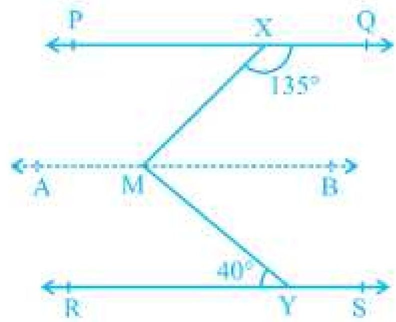
ਥਿਊਰਮ 6.2: ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣ ਨੂੰ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 6.19 ਵਿੱਚ, ਜੇ $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135°$ ਅਤੇ $\angle MYR = 40°$ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle XMY$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.19



ਚਿੱਤਰ 6.20

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ m ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ, ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ AB ਖਿੱਚਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.20 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ, $AB \parallel PQ$ ਅਤੇ $PQ \parallel RS$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $AB \parallel RS$ ਹੈ (ਕਿਉ?)

ਹੁਣ $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

($AB \parallel PQ$, ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ XM ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ)

ਪਰੰਤੂ $\angle QXM = 135°$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

$135° + \angle XMB = 180°$

ਇਸ ਲਈ $\angle XMB = 45°$ (1)

ਹੁਣ $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\angle BMY = 40°$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਜੋੜਨ 'ਤੇ

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

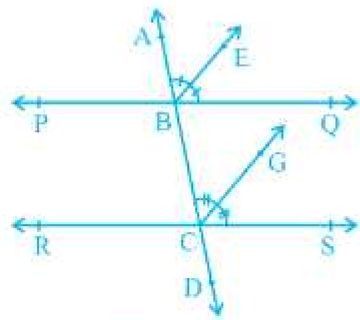
ਭਾਵ $\angle XMY = 85°$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇ ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟੇ ਕਿ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵੀ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 6.21 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ AD, ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ RS ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ C ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਕਿਰਣ BE, $\angle$ ABQ ਦੀ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਰਣ CG, $\angle$ BCS ਦੀ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ ਅਤੇ BE $\parallel$ CG ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ PQ $\parallel$ RS ਹੈ।

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਰਣ BE, $\angle$ ABQ ਦੀ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.21

ਇਸ ਲਈ $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਰਣ CG, $\angle$ BCS ਦੀ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ (2)

ਪਰੰਤੂ BE $\parallel$ CG ਹੈ ਅਤੇ AD ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle ABE = \angle BCG$

(ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਸਵੈ - ਸਿੱਧ) (3)

(3) ਵਿੱਚ, (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਮਿਲੇਗਾ:

$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

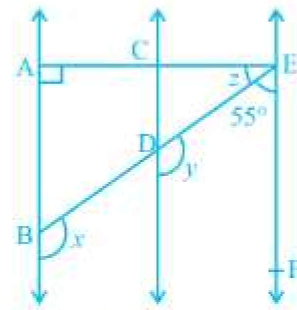
ਭਾਵ $\angle ABQ = \angle BCS$

ਪਰੰਤੂ, ਇਹ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ AD ਦੁਆਰਾ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ RS ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ PQ $\parallel$ RS

(ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਦਾ ਉਲਟ)

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 6.22 ਵਿੱਚ AB $\parallel$ CD ਅਤੇ CD $\parallel$ EF ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, EA $\perp$ AB ਹੈ। ਜੇ $\angle$BEF = 55° ਹੈ, ਤਾਂ x, y ਅਤੇ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.22

ਹੱਲ: $y + 55° = 180°$ (CD $\parallel$ EF, ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ED ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $y = 180° - 55° = 125°$

ਦੁਬਾਰਾ $x = y$ (AB $\parallel$ CD, ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ)

ਇਸ ਲਈ, $x = 125°$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ AB $\parallel$ CD ਅਤੇ CD $\parallel$ EF ਹੈ, ਇਸ ਲਈ AB $\parallel$ EF ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$

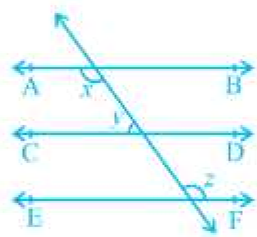
(ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ EA ਦੇ ਇੱਕੋ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $90° + z + 55° = 180°$

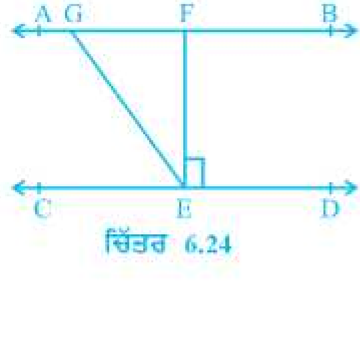
ਜਿਸ ਨਾਲ $z = 180° - 145° = 35°$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਚਿੱਤਰ 6.23 ਵਿੱਚ, ਜੇ AB $\parallel$ CD, CD $\parallel$ EF ਅਤੇ $y : z = 3 : 7$ ਹੈ, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.23

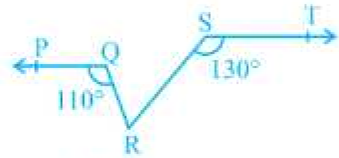


ਚਿੱਤਰ 6.24

2. ਚਿੱਤਰ 6.24 ਵਿੱਚ, ਜੇ AB $\parallel$ CD, EF $\perp$ CD ਅਤੇ $\angle$ GED = 126° ਹੈ, ਤਾਂ $\angle$ AGE, $\angle$ GEF ਅਤੇ $\angle$ FGE ਪਤਾ ਕਰੋ।

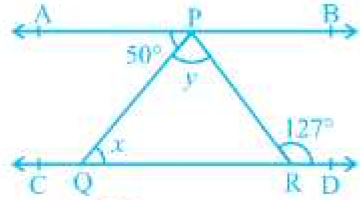
3. ਚਿੱਤਰ 6.25 ਵਿੱਚ, ਜੇ PQ || ST, $\angle$ PQR $= 110°$ ਅਤੇ $\angle$ RST $= 130°$ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle$ QRS ਪਤਾ ਕਰੋ।

[**ਸੰਕੇਤ** : ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ST ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ]



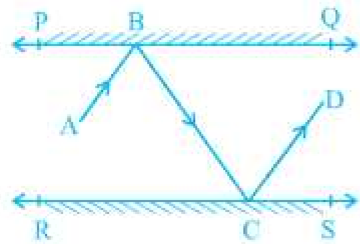
ਚਿੱਤਰ 6.25

4. ਚਿੱਤਰ 6.26 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ AB || CD, $\angle$ APQ $= 50°$ ਅਤੇ $\angle$ PRD $= 127°$ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.26

5. ਚਿੱਤਰ 6.27 ਵਿੱਚ, PQ ਅਤੇ RS ਦੋ ਦਰਪਣ ਹਨ ਜੋ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਇੱਕ ਅਪਾਤੀ ਕਿਰਣ(incident ray) AB, ਦਰਪਣ PQ ਤੋਂ B ਤੇ ਟਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪਰਵਰਤਿਤ ਕਿਰਣ (reflected ray) ਪੱਥ BC ਤੇ ਚੱਲਦੇ ਦਰਪਣ RS ਤੋਂ C 'ਤੇ ਟਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ CD ਦੇ ਇੱਕੋ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB || CD ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.27

6.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਜੇ ਇੱਕ ਕਿਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਦੋਵੇਂ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੋਰ 'ਤੇ ਜੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੈਰ ਸਾਂਝੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਜੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
3. ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

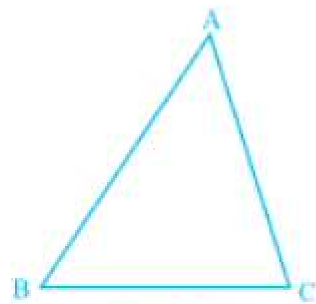
F3B3P4

ਅਭਿਆਸ 7

ਤ੍ਰਿਭੁਜ

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਇੱਕ ਬੰਦ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਤ੍ਰਿ ਮਤਲਬ 'ਤਿੰਨ') ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਤਿੰਨ ਕੋਣ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਸਿਖ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਜਿਸਨੂੰ ਕਿ ΔABC ਵਜੋਂ ਸੂਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵਿੱਚ (ਵੇਖੋ ਆਕ੍ਰਿਤੀ 7.1); AB, BC, CA ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ, $\angle$ A, $\angle$ B ਅਤੇ $\angle$ C ਤਿੰਨ ਕੋਣ ਅਤੇ A, B ਅਤੇ C ਤਿੰਨ ਸਿਖਰ ਹਨ। ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ, ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ, ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਵਕ ਪੜ੍ਹੋਗੇ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਵਿਸ਼ੇਸਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 7.1

7.2 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ

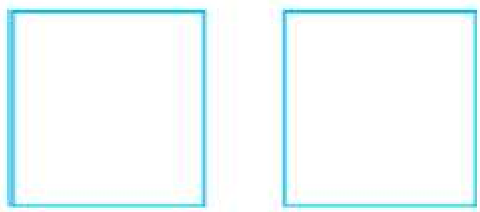
ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਨੋਟ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤੁਹਾਡੀਆਂ ਸਮਾਨ ਅਕਾਰ ਦੀਆਂ ਫੋਟੋਆਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਾਪੀਆਂ ਵੀ (ਇਕੋ ਜਿਹੀਆਂ) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਚੂੜੀਆਂ,

ਇਕ ਹੀ ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਜਾਰੀ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਏ.ਟੀ.ਐਮ. ਕਾਰਡ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੁਪਏ ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਸੇ ਸਾਲ ਦੇ ਨਵੇਂ ਨਕੋਰ ਸਿੱਕੇ ਉੱਤੇ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਕੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ **(congruent figures)** ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ('ਸਰਬੰਗਸਮ' ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਜਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਰੂਪ ਅਤੇ ਆਕਾਰ ਦੋਵੇਂ ਸਮਾਨ ਹੋਣ)।

ਹੁਣ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਉਪਰ ਰੱਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ? ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਕ ਵਰਗ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਉਸੇ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਉਤੇ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.2) ਜਾਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਸਮਭੁਜ ਤਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਉਪਰ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਵਰਗ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਭੁਜ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵੀ।



ਚਿੱਤਰ 7.2

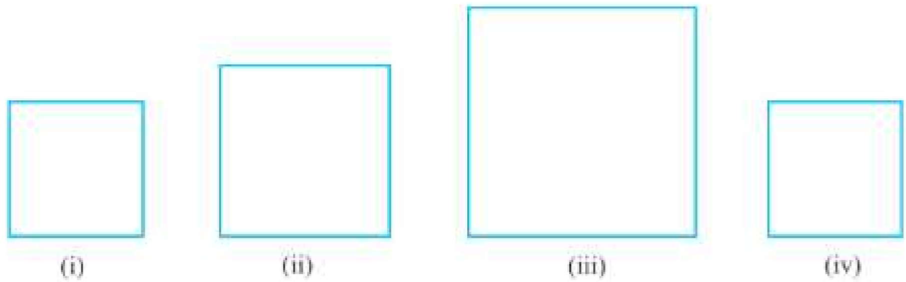
ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਕਿਉਂ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਫਰਿਜ ਵਿੱਚ ਬਰਫ ਵਾਲੀ ਟਰੇਅ ਦੇਖੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਬਰਫ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਂਚੇ ਦੇ ਖਾਨੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ। ਟਰੇਅ ਦੇ ਖਾਨੇ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤੇ ਗਏ ਸਾਂਚੇ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ। (ਸਾਰੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਜਾਂ ਸਾਰੇ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਜਾਂ ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਾਕਾਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।) ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਵੀ ਇਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮਾ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਸਾਂਚੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿਚ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਈ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪੈੱਨ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਬਦਲਣ ਸਮੇਂ ਕਠਿਨਾਈ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰਦੇ ਹੋ। ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਵਾਂ ਸਿੱਕਾ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਸਿੱਕਾ ਪੈੱਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਆਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀਆਂ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਹੁਣ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਚਿੱਤਰ 7.3 (i) ਵਰਗ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ :

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.3 (ii) ਅਤੇ 7.3 (iii) ਵਿਚ ਵੱਡੇ ਵਰਗ, ਚਿੱਤਰ 7.3 (i) ਵਰਗ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਚਿੱਤਰ 7.3 (iv) ਦਾ ਵਰਗ ਚਿੱਤਰ 7.3 (i) ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ।

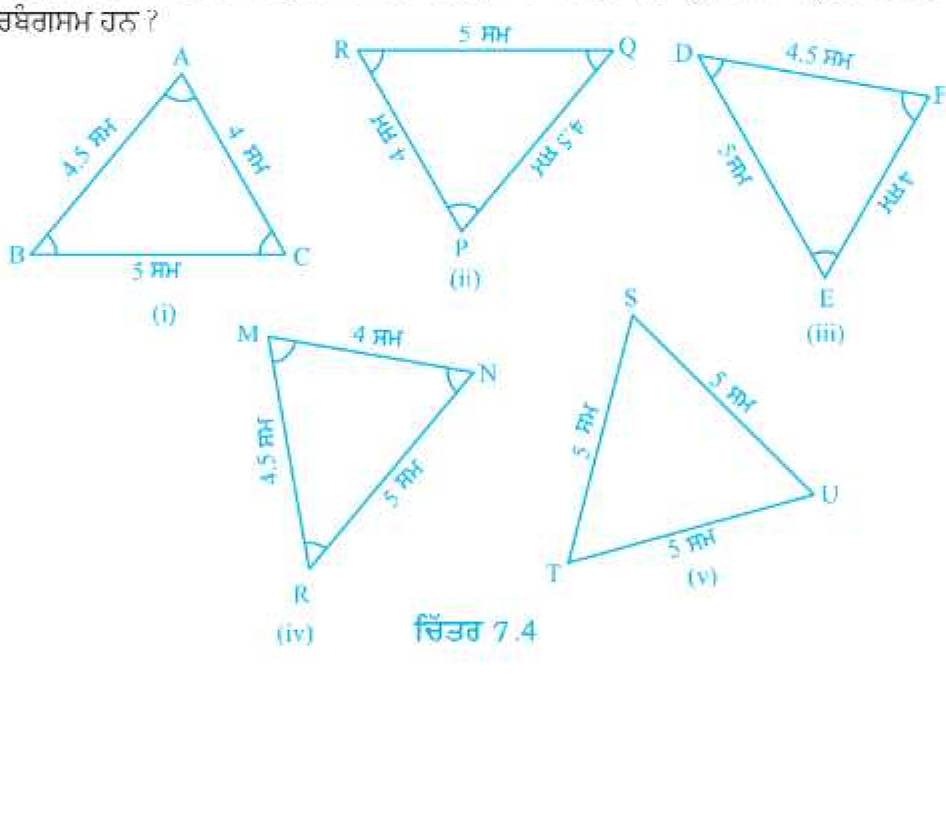


ਚਿੱਤਰ 7.3

ਆਓ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ, ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

ਹੁਣ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਚਿੱਤਰ 7.4 (i) ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ?



ਚਿੱਤਰ 7.4

ਚਿੱਤਰ 7.4 (ii) ਤੋਂ ਲੈ ਕੇ ਚਿੱਤਰ 7.4 (v) ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਕੱਟ ਲਵੋ ਅਤੇ Δ ABC ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਢੱਕਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.4 (ii), (iii) ਅਤੇ (iv), Δ ABC ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.4 (v) ਵਿੱਚ Δ TSU, Δ ABC ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ Δ PQR, Δ ABC ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$, ਤਾਂ Δ PQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ Δ ABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਢੱਕ ਲੈਣਗੀਆਂ ਅਤੇ ਇਹ ਕੋਣਾਂ ਲਈ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ।

PQ , AB ਨੂੰ ਢੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹੈ; QR, BC ਨੂੰ ਢੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹੈ; ਅਤੇ RP, CA ਨੂੰ ਢੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹੈ; ਕੋਣ P, ਕੋਣ A ਨੂੰ ਢੱਕਦਾ ਹੈ : ਕੋਣ Q, ਕੋਣ B ਨੂੰ ਢੱਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਣ R, ਕੋਣ C ਨੂੰ ਢੱਕਦਾ ਹੈ। ਸਿਖਰਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਕ-ਇਕ ਸੰਗਤਤਾ (one-one correspondence) ਵੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P, A ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ; Q, B ਨਾਲ; R, C ਨਾਲ; ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ। ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਸੁਮੇਲਨ ਨਾਲ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਇਹ $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ਲਈ ਠੀਕ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਚਿੱਤਰ 7.4 (iii) ਦੇ ਲਈ ,

$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC$ ਅਤੇ $EF \leftrightarrow CA$

ਅਤੇ $F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B$ ਅਤੇ $E \leftrightarrow C$

ਇਸ ਲਈ , $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਸਨੂੰ $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ ਲਿਖਣਾ ਠੀਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.4 (iv) ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ Δ ABC ਵਿਚਕਾਰ ਸੁਮੇਲਨ ਲਿਖੋ।

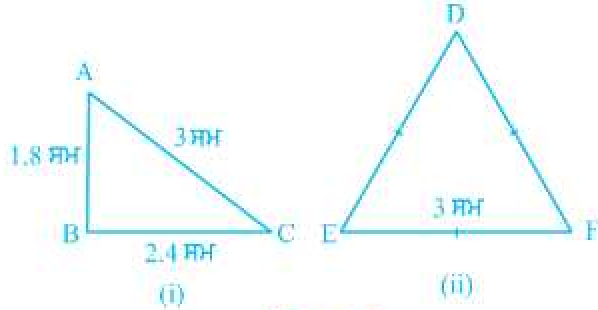
ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਲਈ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਸੁਮੇਲਨ ਨੂੰ ਠੀਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖਣਾ ਬਹੁਤ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ *'ਅਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ* 'CPCT' (Corresponding Part of Congruent Triangle) *ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।*

7.3 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਮਾਪਦੰਡ

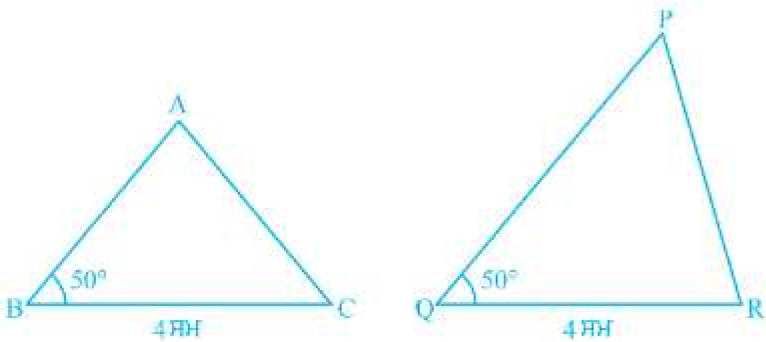
ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਮਾਪ ਦੰਡ ਕਸੌਟੀ (criteria) ਬਾਰੇ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਓ ਉਸਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਭੁਜਾ 3 ਸਮ ਲੈ ਕੇ ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਾਹੋ। ਕੀ ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.5)।



ਚਿੱਤਰ 7.5

ਹੁਣ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਣਾਓ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ 4 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ 50° ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.6) । ਕੀ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ?



ਚਿੱਤਰ 7.6

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ।

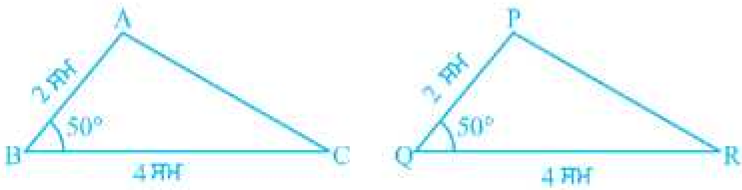
ਇਸ ਲਈ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਜਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਸਾਨੂੰ ਸਰਬਗੰਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦੀ ।

ਜੇਕਰ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਜੋੜਾ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਵਾਪਰੇਗਾ ?

ਚਿੱਤਰ 7.7 ਵਿੱਚ, $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ ਅਤੇ $AB = PQ$ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਤਾ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿਦੇ ਹੋ ?

ਆਪਣੀ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ

ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 7.7 ਤੋਂ, Δ ABC ਅਤੇ Δ PQR ਬਾਰੇ ਸੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਾਕੀ ਜੋੜਿਆਂ ਲਈ ਵੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਓ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕਾਫੀ ਹੈ ? ਹਾਂ ਇਹ ਕਾਫੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.7

ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਕਸੌਟੀ (criterion) ਹੈ।

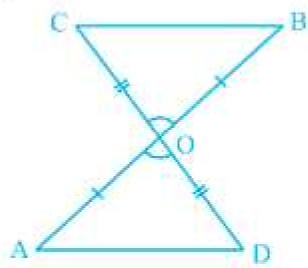
ਸਵੈ ਸਿੱਧ 7.1 (SAS (ਭੁ-ਕੋ-ਭੁ) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ) : *ਜੇਕਰ ਇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ, ਦੂਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੀਆਂ।*

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਸਵੈ ਸਿੱਧ ਹੀ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਅੰਤਿਕਾ 1)।

ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਚਿੱਤਰ 7.8 ਵਿੱਚ OA = OB ਅਤੇ OD = OC ਹੈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC ਅਤੇ (ii) AD || BC



ਚਿੱਤਰ 7.8

ਹੱਲ : (i) Δ AOD ਅਤੇ Δ BOC ਵਿੱਚ,

OA = OB
OD = OC (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਅਤੇ $\angle$ AOD ਅਤੇ $\angle$ BOC ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$$\angle AOD = \angle BOC$$

ਇਸ ਲਈ, Δ AOD $\cong$ Δ BOC (SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)

(ii) ਸਰਬੰਗਸਮ ਤਿਕੋਣਾਂ AOD ਅਤੇ BOC ਵਿੱਚ, ਦੂਸਰੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\angle OAD = \angle OBC$ ਅਤੇ ਇਹ ਰੇਖਾਖੰਡ AD ਅਤੇ BC ਦੇ ਲਈ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $AD \parallel BC$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : AB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ l ਇਸ ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ P, l ਉੱਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ P ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਉੱਤੇ ਹੈ।

ਹੱਲ : $l \perp AB$ ਅਤੇ ਇਹ C ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਜਿਹੜੀ ਕਿ AB ਦਾ ਮੱਧ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.9)। ਤੁਹਾਨੂੰ PA = PB ਦਿਖਾਉਣਾ ਹੈ। ΔPCA ਅਤੇ ΔPCB ਲਵੋ :

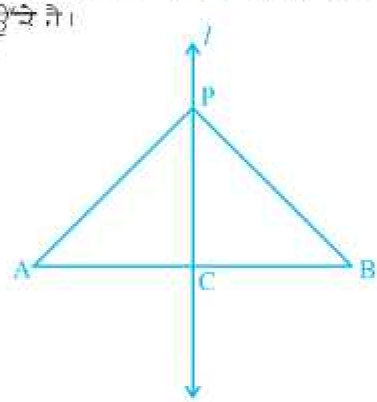
ਸਾਡੇ ਕੋਲ $AC = BC$ (C, AB ਦਾ ਮੱਧ ਹੈ)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$PC = PC$ (ਸਾਂਝਾ)

ਇਸ ਲਈ, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS ਨਿਯਮ)

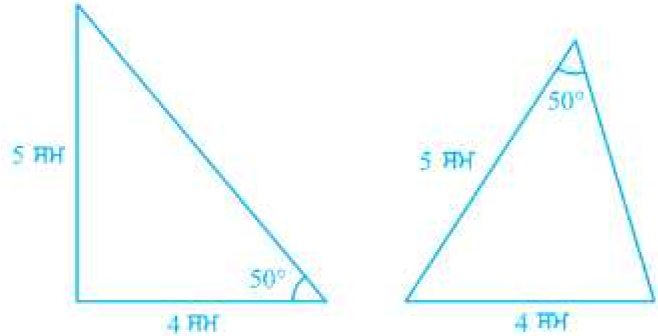
ਇਸ ਲਈ, PA = PB



ਚਿੱਤਰ 7.9

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਲਈਏ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 4 ਸਮ ਅਤੇ 5 ਸਮ ਹੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ 50° ਦਾ ਹੋਵੇ। ਇਹ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.10)। ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ?



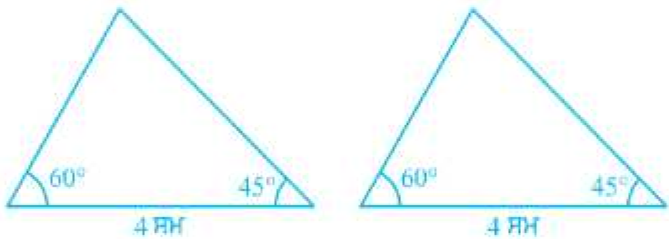
ਚਿੱਤਰ 7.10

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜੋੜੇ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਓ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਂਗੇ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣ ਲਈ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮਾਨ ਕੋਣ, ਬਰਾਬਰ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ASS ਜਾਂ SSA ਨਿਯਮ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਹੁਣ, ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ 60° ਅਤੇ 45° ਹੋਣ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ 4 ਸਮ ਹੋਵੇ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.11)।



ਚਿੱਤਰ 7.11

ਇਹਨਾਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ ਅਤੇ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਉਪਰ ਰੱਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਹੋਰ ਜੋੜੇ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਓ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕਾਫੀ ਹੈ।

ਇਹ **ਨਤੀਜਾ ਕੋਣ ਭੁਜਾ ਕੋਣ** (Angle-Side-Angle) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀ ਕਸੌਟੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ **ASA** ਵਜੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਥਿਊਰਮ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਭੁ-ਕੋ-ਭੁ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 7.1 (ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ) : *ਜੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਈ ਦੋ ਕੋਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ, ਦੂਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

ਅਤੇ $BC = EF$ ਹੈ।

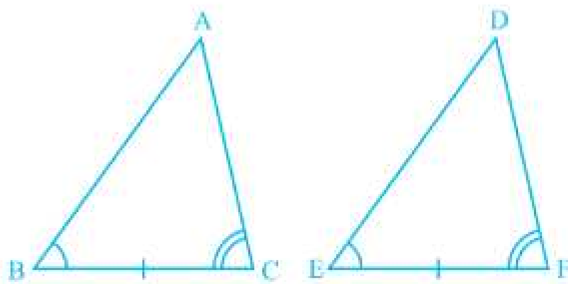
ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਥਿਤੀ (i) : ਜੇ AB = DE ਹੋਵੇ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.12)।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ

	$AB = DE$	(ਮੰਨਿਆ ਹੈ)
	$\angle B = \angle E$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
	$BC = EF$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
ਇਸ ਲਈ	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ)

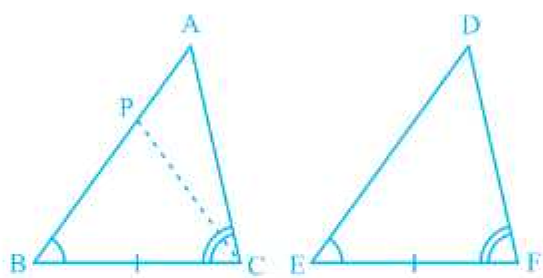


ਚਿੱਤਰ 7.12

ਸਥਿਤੀ (ii) : ਜੇ AB > DE ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਭੁਜਾ AB ਉਤੇ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ P ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$PB = DE$$

ਹੁਣ ΔPBC ਅਤੇ ΔDEF ਲਵੋ, (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.13)।



ਚਿੱਤਰ 7.13

ਹੁਣ ΔPBC ਅਤੇ ΔDEF ਵਿੱਚ,

$PB = DE$	(ਰਚਨਾ ਰਾਹੀਂ)
$\angle B = \angle E$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
$BC = EF$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਅਸੀਂ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ)

ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $\angle PCB = \angle DFE$

ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$\angle ACB = \angle DFE$

ਇਸ ਲਈ $\angle ACB = \angle PCB$

ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ?

ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜੇਕਰ P, A ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਵੇ

ਜਾਂ $BA = ED$

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਦੁਆਰਾ)

ਸਥਿਤੀ (iii) : ਜੇਕਰ $AB < DE$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ DE ਉੱਪਰ ਬਿੰਦੂ M ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $ME = AB$ ਅਤੇ ਸਥਿਤੀ (ii) ਦੀਆਂ ਦਲੀਲਾਂ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $AB = DE$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋਵਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਭੁਜਾ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕੀ ਅਜੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਹ ਸਰਬਗੰਸਮ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਕਾਰਨ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਉਂ ?

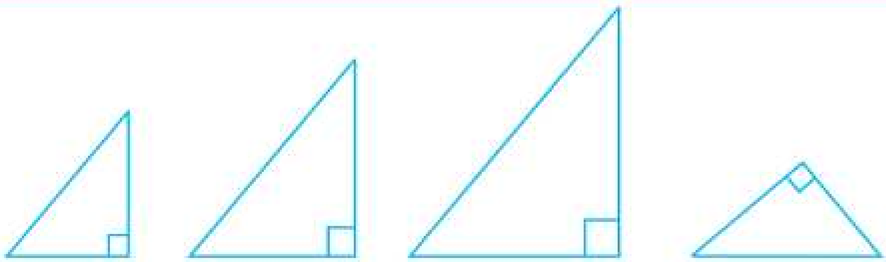
ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤੀਸਰਾ ਜੋੜਾ ਵੀ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ ($180°$ – ਸਮਾਨ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੀਆਂ ਜੇਕਰ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਜੋੜੇ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕੋ-ਕੋ-ਭੁ (AAS) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ :

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦੇ ਕੋਣ $40°$, $50°$ ਅਤੇ $90°$ ਹੋਣ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ?

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਚਾਹੋ, ਉੱਨੀਆਂ ਹੀ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.14)।



ਚਿੱਤਰ 7.14

ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ ।

ਸੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਤਿੰਨੋ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਰੇਖਾ ਖੰਡ AB ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ CD ਦੇ ਸਮਾਨੰਤਰ ਹੈ। O, AD ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.15)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O, BC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਹਲ : (i) Δ AOB ਅਤੇ Δ DOC ਵਿੱਚ

$\angle ABO = \angle DCO$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਕਿਉਂਕਿ AB $\parallel$ CD ਅਤੇ BC ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।)

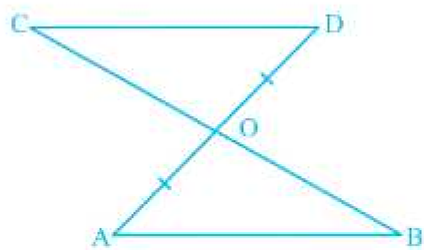
$\angle AOB = \angle DOC$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

OA = OD (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS ਨਿਯਮ)

(ii) OB = OC (CPCT)

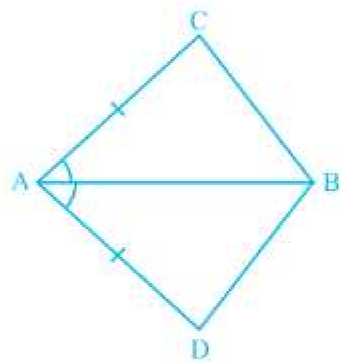
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O, BC ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 7.15

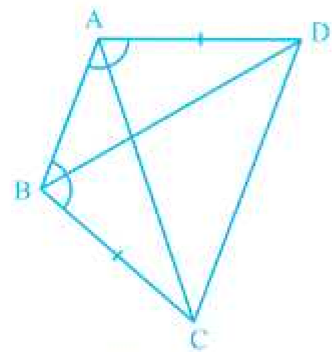
ਅਭਿਆਸ 7.1

1. ਚਤੁਰਭੁਜ ACBD ਵਿੱਚ, AC = AD ਅਤੇ AB, $\angle A$ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.16)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ਤੁਸੀਂ BC ਅਤੇ BD ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋ ?



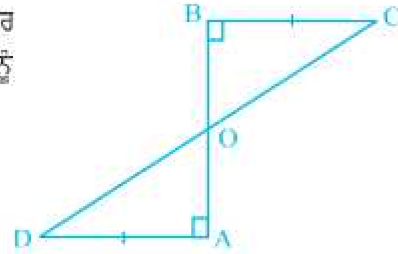
ਚਿੱਤਰ 7.16

2. ABCD ਇੱਕ ਚਤਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AD = BC ਅਤੇ $\angle DAB = \angle CBA$ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.17)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) BD = AC
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



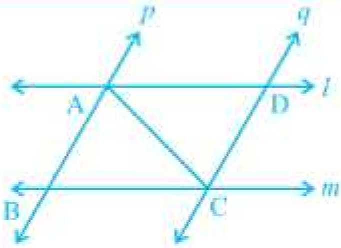
ਚਿੱਤਰ 7.17

3. ਰੇਖਾਖੰਡ AB 'ਤੇ AD ਅਤੇ BC ਲੰਬ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.18)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ CD, ਰੇਖਾ ਖੰਡ AB ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.18

4. ਦੋ ਸਮਾਨੰਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l ਅਤੇ m , ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮਾਨੰਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ p ਅਤੇ q ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.19)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ਹੈ।

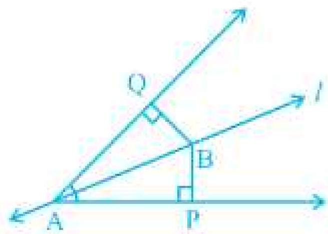


ਚਿੱਤਰ 7.19

5. ਰੇਖਾ l, $\angle A$ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ B, l ਉੱਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। BP ਅਤੇ BQ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ $\angle A$ ਦੀਆਂ ਬਾਹਵਾਂ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.20)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ

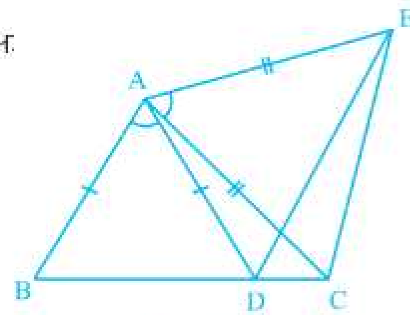
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ ਜਾਂ ਬਿੰਦੂ B, ਕੋਣ A ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.20

6. ਚਿੱਤਰ 7.21 ਵਿੱਚ, $AC = AE$, $AB = AD$ ਅ. $\angle BAD = \angle EAC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $BC = DE$

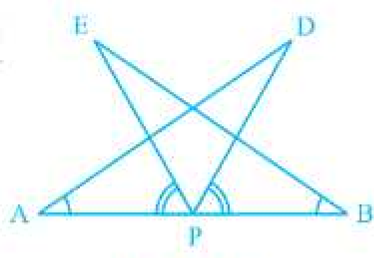


ਚਿੱਤਰ 7.21

7. AB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਅਤੇ P ਇਸ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। D ਅਤੇ E ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦੇ ਇਕੋ ਪਾਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $\angle BAD = \angle ABE$ ਅਤੇ $\angle EPA = \angle DPB$ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.22) ਸਿੱਧ ਕਰੋ

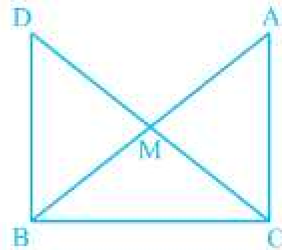
(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$



ਚਿੱਤਰ 7.22

8. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, C 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ M, ਕਰਣ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। C ਨੂੰ M ਤੱਕ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ DM = CM । ਬਿੰਦੂ D ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B ਨਾਲ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.23)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ



ਚਿੱਤਰ 7.23

(i) $\Delta\, AMC \cong \Delta\, BMD$

(ii) $\angle DBC$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

(iii) $\Delta\, DBC \cong \Delta\, ACB$

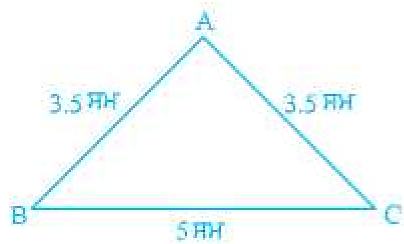
(iv) $CM = \frac{1}{2}\, AB$

7.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਸੌਟੀਆਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੀ ਤਿਕੋਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤੀਏ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ :

ਦੋ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ 3.5 ਸਮ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ 5 ਸਮ ਹੋਵੇ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.24)। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰਚਨਾ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.24

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ?

ਉਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸਨੂੰ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 7.24 ਵਿੱਚ ΔABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = AC ਹੈ ।

ਹੁਣ $\angle B$ ਅਤੇ $\angle C$ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹੋ ?

ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਵੱਖ ਵੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣਾਂ ਨਾਲ ਦੁਹਰਾਉ।

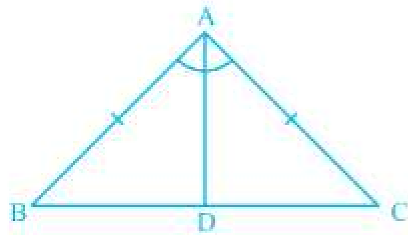
ਤੁਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਅਜਿਹੀ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿਚ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਇਹ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਚਮੁੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 7.2 : ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ΔABC ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB = AC$ ਹੈ। ਅਸੀਂ $\angle B = \angle C$ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.25

ਆਉ ਅਸੀਂ $\angle A$ ਦਾ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਖਿਚੀਏ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\angle A$ ਦਾ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਅਤੇ BC ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ D ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.25)।

ਹੁਣ, ΔBAD ਅਤੇ ΔCAD ਵਿੱਚ,

$AB = AC$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ਰਚਨਾ ਤੋਂ)

$AD = AD$ (ਸਾਂਝਾ)

ਇਸ ਲਈ, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (SAS ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle ABD = \angle ACD$ (ਸਰਬੰਗਸਮ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਕੋਣ)

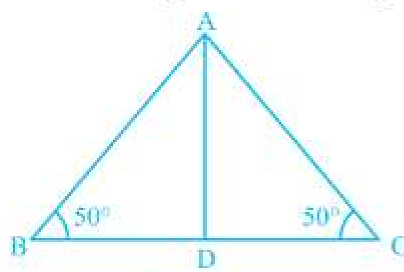
ਅਤੇ $\angle B = \angle C$

ਕੀ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੋ।

ਇੱਕ ΔABC ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC ਕਿਸੇ ਵੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਹੈ ਅਤੇ $\angle B = \angle C = 50^\circ$ ਹੈ। $\angle A$ ਦਾ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਇਹ BC ਨੂੰ D ਉੱਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.26)।



ਚਿੱਤਰ 7.26

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਨੂੰ ਕਾਗਜ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਟ ਲਉ ਅਤੇ AD ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਮੋੜੋ ਤਾਂ ਕਿ ਸਿਖਰ C, ਸਿਖਰ B ਉੱਤੇ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AC ਅਤੇ AB ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ AC, AB ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $AC = AB$

ਕੁਝ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੀਆਂ ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 7.3 : ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਥਿਊਰਮ 7.2 ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਤੁਸੀ ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਕੋ-ਭੁ-ਕੋ (ASA) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਰਤੀਏ ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ΔABC ਵਿੱਚ, $\angle A$ ਦਾ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ AD, ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.27)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $AB = AC$ ਅਤੇ ΔABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਹਲ : ΔABD ਅਤੇ ΔACD ਵਿੱਚ,

$\angle BAD = \angle CAD$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

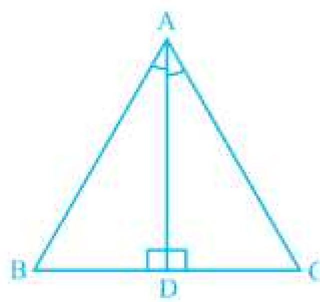
$AD = AD$ (ਸਾਂਝਾ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA ਨਿਯਮ)

ਇਸ ਲਈ, $AB = AC$ (CPCT)

ਜਾਂ ΔABC ਇਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.27

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.28)।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $BF = CE$ ਹੈ।

ਹਲ : ΔABF ਅਤੇ ΔACE ਵਿੱਚ,

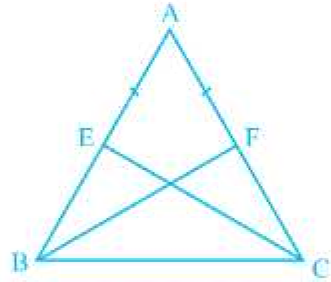
$AB = AC$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\angle A = \angle A$ (ਸਾਂਝਾ)

$AF = AE$ (ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅੱਧੇ)

ਇਸ ਲਈ, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS ਨਿਯਮ)

ਇਸ ਲਈ, $BF = CE$ (CPCT)



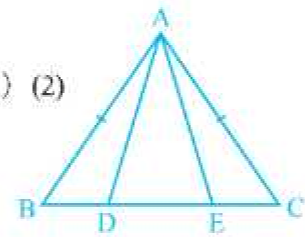
ਚਿੱਤਰ 7.28

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ $AB = AC$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC ਉੱਤੇ D ਅਤੇ E ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $BE = CD$ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.29)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $AD = AE$ ਹੈ।

ਹਲ : ΔABD ਅਤੇ ΔACE ਵਿੱਚ,

$AB = AC$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ) (1)

$\angle B = \angle C$ (ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ) (2)



ਚਿੱਤਰ 7.29

ਅਤੇ, $BE = CD$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ, $BE - DE = CD - DE$

ਤਾਂ ਕਿ, $BD = CE$ (3)

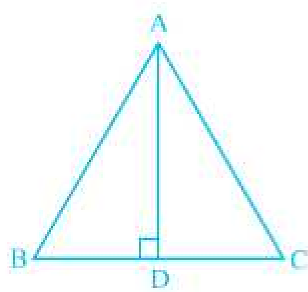
ਸੋ, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ [(1), (2), (3) ਅਤੇ SAS ਨਿਯਮ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ]

ਇਹ ਸਾਨੂੰ $AD = AE$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ (CPCT)

ਅਭਿਆਸ 7.2

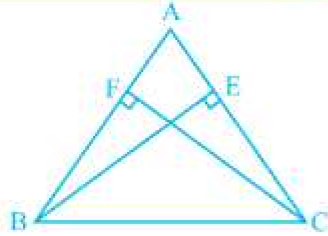
1. ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ $AB = AC$, $\angle B$ ਅਤੇ $\angle C$ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। A ਅਤੇ O ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ।
   ਸਿੱਧ ਕਰੋ
   (i) $OB = OC$
   (ii) AO, $\angle A$ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

2. ΔABC ਵਿੱਚ AD, ਭੁਜਾ BC ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.30)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ΔABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB = AC$ ਹੈ।



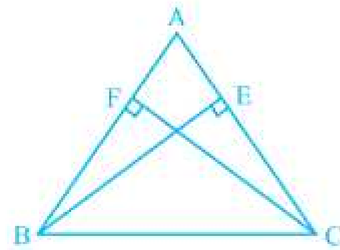
ਚਿੱਤਰ 7.30

3. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BE ਅਤੇ CF ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ AC ਅਤੇ AB 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.31)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਸਮਾਨ ਹੈ।



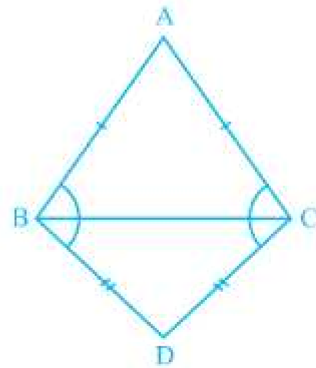
ਚਿੱਤਰ 7.31

4. ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ AC ਅਤੇ AB ਉੱਤੇ ਸਿਖਰਲੰਬ BE ਅਤੇ CF ਬਰਾਬਰ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.32)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ
   (i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$
   (ii) $AB = AC$, ਜਾਂ ΔABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



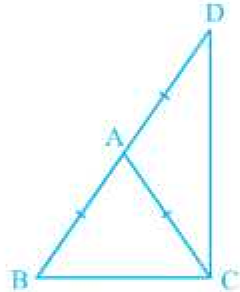
ਚਿੱਤਰ 7.32

5. ABC ਅਤੇ DBC ਇਕੋ ਆਧਾਰ BC ਉੱਤੇ ਦੋ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.33)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\angle ABD = \angle ACD$



ਚਿੱਤਰ 7.33

6. ABC ਇਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB = AC$ ਹੈ। ਭੁਜਾ BA ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਧਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ D 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ $AD = AB$ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.34) ਹੋਵੇ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\angle BCD$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.34

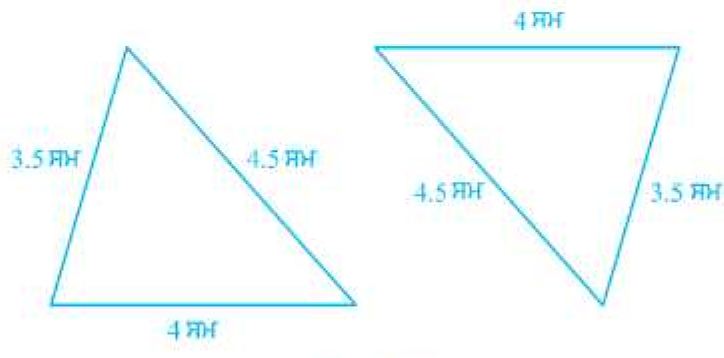
7. ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle A = 90^\circ$ ਅਤੇ $AB = AC$ ਹੈ। $\angle B$ ਅਤੇ $\angle C$ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ 60° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.5 ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਮਾਪਦੰਡ

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੀ, ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨਾਲ ਸਮਾਨਤਾ ਹੋਣਾ, ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸਮਾਨਤਾ ਹੋਣਾ, ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕਾਫੀ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਅਤੇ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸੱਚ ਜਾਨਣ ਲਈ, ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ 4 ਸਮ, 3.5 ਸਮ ਅਤੇ 4.5 ਸਮ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.35)। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ। ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖੀਆਂ ਹੋਣ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.35

ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਓ। ਅਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਥਿਊਰਮ 7.4 (SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ) : *ਜੇਕਰ ਇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੀਆਂ।*

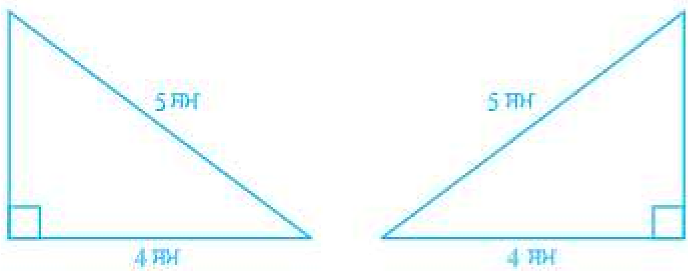
ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਢੁਕਵੀਂ ਰਚਨਾ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ

ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ।

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕਰੋ :

ਦੋ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰਣ 5 ਸਮ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ 4 ਸਮ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.36)।



ਚਿੱਤਰ 7.36

ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾ ਸਮੇਤ ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਉੱਪਰ ਰੱਖੋ। ਜੇਕਰ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਹਿਲਾਉ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ। ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗੇਗਾ ਕਿ ਜੇਕਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਅਤੇ ਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੀਆਂ ।

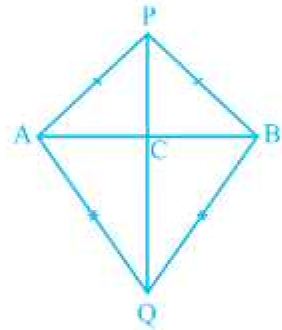
ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹੋ :

ਥਿਉਰਮ 7.5 RHS (ਸ.ਕ.ਭੁ.) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ : *ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮੱਕਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ*

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸ.ਕ.ਭੁ. ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ : ਸਮਕੋਣ–ਕਰਣ–ਭੁਜਾ।

ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : AB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ। P ਅਤੇ Q, AB ਦੇ ਉਲਟ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿਦੂ ਹਨ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਿਦੂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.37)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਰੇਖਾ PQ, AB ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.37

ਹੱਲ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ PA = PB ਅਤੇ QA = QB ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $PQ \perp AB$ ਅਤੇ PQ, AB ਦਾ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ PQ, AB ਨੂੰ C 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਆਉ ਅਸੀਂ Δ PAQ ਅਤੇ Δ PBQ ਲਈਏ।

ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ,

	$AP = BP$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
	$AQ = BQ$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
	$PQ = PQ$	(ਸਾਂਝਾ)
ਇਸ ਲਈ,	$\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(SSS ਨਿਯਮ)
ਅਤੇ	$\angle APQ = \angle BPQ$	(CPCT)

ਹੁਣ Δ PAC ਅਤੇ Δ PBC ਨੂੰ ਲਈਏ।

ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ	$AP = BP$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)
	$\angle APC = \angle BPC$	($\angle APQ = \angle BPQ$ ਉੱਪਰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ)
	$PC = PC$	(ਸਾਂਝਾ)
ਇਸ ਲਈ	$\Delta PAC \cong \Delta PBC$	(SAS ਨਿਯਮ)
ਅਤੇ	$AC = BC$	(CPCT) (1)
ਅਤੇ	$\angle ACP = \angle BCP$	(CPCT)

ਨਾਲ ਹੀ, ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ)

ਇਸ ਲਈ, $2\angle ACP = 180°$

ਜਾਂ, $\angle ACP = 90°$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ PQ, AB ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।

[ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ Δ PAQ ਅਤੇ Δ PBQ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦਰਸਾਏ ਬਿਨਾ ਤੁਸੀਂ Δ PAC $\cong$ Δ PBC ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਫੇਰ ਵੀ AP = BP (ਦਿੱਤਾ ਹੈ),

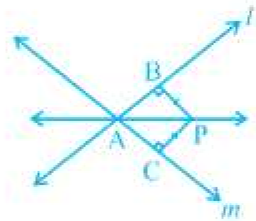
PC =PC (ਸਾਂਝਾ) ਅਤੇ $\angle$ PAC = $\angle$ PBC (Δ APB ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਹੈ।)

ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਨਤੀਜੇ ਸਾਨੂੰ ਭ-ਭੁ-ਕੋ (SSA) ਨਿਯਮ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਾਲ਼ ਹੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।]

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : *l* ਅਤੇ *m* ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਉਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.38)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਰੇਖਾ AP ਉਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ *l* ਅਤੇ *m* ਬਿੰਦੂ A ਉੱਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ PB $\perp$ *l* ਅਤੇ PC $\perp$ *m* ਹੈ ਅਤੇ PB = PC ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.38

ਤੁਸੀਂ $\angle$ PAB = $\angle$ PAC ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ Δ PAB ਅਤੇ Δ PAC ਲਈਏ।

ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ

PB = PC (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90° (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

PA = PA (ਸਾਂਝਾ)

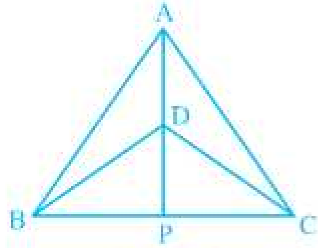
ਇਸ ਲਈ, Δ PAB $\cong$ Δ PAC (RHS ਨਿਯਮ)

ਅਤੇ, $\angle$ PAB = $\angle$ PAC (CPCT)

ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਅਧਿਆਇ 7.1, ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 7.3

1. Δ ABC ਅਤੇ Δ DBC ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਾਰ BC ਉੱਤੇ ਦੋ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਿਖਰ A ਅਤੇ D ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਇਕੋ ਪਾਸੇ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.39)। ਜੇ ਭੁਜਾ AD ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਭੁਜਾ BC ਨੂੰ P 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ



ਚਿੱਤਰ 7.39

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

   (iii) AP, $\angle A$ ਅਤੇ $\angle D$ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

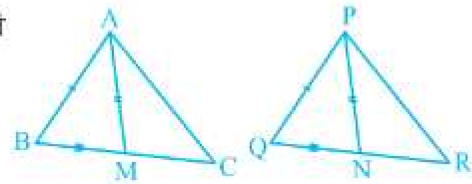
   (iv) AP, ਭੁਜਾ BC ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ।

2. AD ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਸਿਖਰਲੰਬ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = AC ਹੈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ

   (i) AD, BC ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

   (ii) AD, ਕੋਣ A ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ

3. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ AM ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ QR ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ PN ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.40)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ



ਚਿੱਤਰ 7.40

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. BE ਅਤੇ CF ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਹਨ। ਸ-ਕ-ਭੁ (RHS) ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਹੈ।

5. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = AC ਹੈ। AP $\perp$ BC ਖਿੱਚ ਕੇ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\angle B = \angle C$ ਹੈ।

7.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

1. ਦੋ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਮਾਪ ਹੋਵੇ।
2. ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
3. ਸਮਾਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਵਰਗ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
4. ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ PQR ਸੰਗਤਤਾ $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ ਅਤੇ $C \leftrightarrow R$, ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ (SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)।
6. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਅਤੇ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਗਤ ਭੁਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ (ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)।
7. ਜੇਕਰ ਇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੀਆਂ (AAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)।
8. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
9. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
10. ਕਿਸੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ 60° ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
11. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)।
12. ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇਕ ਭੁਜਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (RHS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)।

H8G4Z1

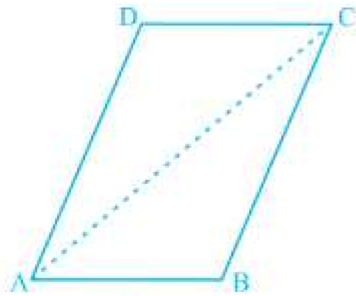
ਅਧਿਆਇ 8

ਚਤੁਰਭੁਜ

8.1 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਗੁਣ

ਆਉ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ।

ਕਾਗਜ਼ ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚਕੇ ਉਸਨੂੰ ਕੱਟ ਲਉ। ਹੁਣ ਇਸਨੂੰ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਕੱਟ ਲਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.1)। ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ 8.1

ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ 'ਤੇ ਰੱਖੋ। ਜੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉ ਵੀ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ?

ਦੇਖੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ।

ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਬਣਾ ਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਆਉ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ।

ਥਿਊਰਮ 8.1 : *ਕਿਸੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ AC ਉਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.2)। ਦੇਖੋ ਕਿ ਵਿਕਰਣ AC ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ CDA ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ।

Δ ABC ਅਤੇ Δ CDA ਦੇ ਲਈ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ BC $\|$ AD ਹੈ ਅਤੇ AC ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ।

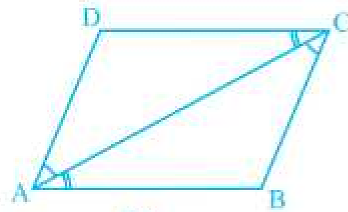
ਇਸ ਲਈ, $\angle BCA = \angle DAC$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ)

ਨਾਲ ਹੀ, $AB \parallel DC$ ਅਤੇ AC ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle BAC = \angle DCA$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ)

ਅਤੇ $AC = CA$ (ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ)

ਇਸ ਲਈ, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA ਨਿਯਮ)



ਚਿੱਤਰ 8.2

ਅਰਥਾਤ ਵਿਕਰਣ AC ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ CDA ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

ਤੁਸੀਂ ਪਾਉਗੇ ਕਿ $AB = DC$ ਅਤੇ $AD = BC$ ਹੈ।

ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਖ ਗੁਣ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 8.2 : *ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $AB = DC$ ਅਤੇ $AD = BC$ ਹੈ।

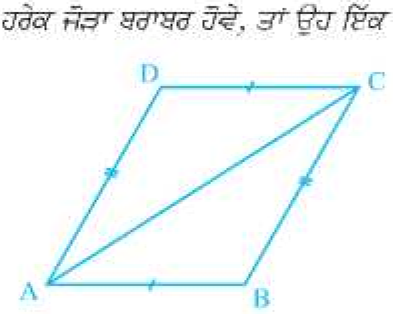
ਹੁਣ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੋ ਥਿਊਰਮ (ਕੋਈ ਕਥਨ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੋ ਥਿਊਰਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਸਨੂੰ ਉਲਟੇ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਥਿਊਰਮ 8.2 ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ :

ਥਿਊਰਮ 8.3 : *ਜੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਕਾਰਣ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਮੰਨ ਲਉ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $AD = BC$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.3)। ਵਿਕਰਣ AC ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ, $\angle BAC = \angle DCA$

ਅਤੇ $\angle BCA = \angle DAC$ (ਕਿਉਂ ?)

ਕੀ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ? (ਕਿਉਂ ?)

ਤੁਸੀਂ ਹੁਣੇ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਜੇ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹੀ ਪਰਿਣਾਮ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵੀ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਲੈ ਕੇ ਦੁਹਰਾਉ। ਇਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਰਿਣਾਮ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 8.4 : *ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਹੁਣ, ਕੀ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ? ਹਾਂ, ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਹੈ। ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਜੋੜ ਗੁਣ ਅਤੇ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਥਿਊਰਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

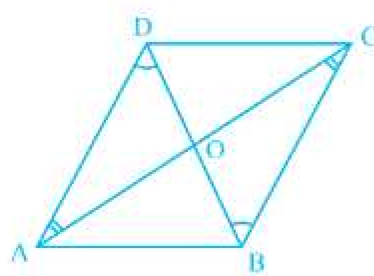
ਥਿਊਰਮ 8.5 : *ਜੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣ ਹੋਰ ਵੀ ਹੈ। ਆਉ ਇਸਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ। ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਦੋਵੇਂ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਖਿੱਚੋ, ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.4)।

OA, OB, OC ਅਤੇ OD ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਮਾਪੋ।

ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ

$$OA = OC \quad \text{ਅਤੇ} \quad OB = OD \text{ ਹੈ}$$



ਚਿੱਤਰ 8.4

ਅਰਥਾਤ O ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਲਈ

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ।

ਹਰੇਕ ਵਾਰ, ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ O ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਥਿਉਰਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਥਿਉਰਮ 8.6 : *ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।*

ਹੁਣ, ਜੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨ, ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋਵੇਗਾ ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਹ ਥਿਉਰਮ 8.6 ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਥਿਉਰਮ 8.7 : *ਜੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਤਰਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.5 ਵਿੱਚ, ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ OA = OC ਅਤੇ OB = OD ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ :, $\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD$ (ਕਿਉਂ?)

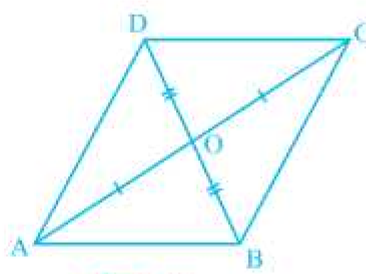
ਇਸ ਲਈ, $\angle ABO = \angle CDO$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $AB \parallel CD$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $BC \parallel AD$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।



ਚਿੱਤਰ 8.5

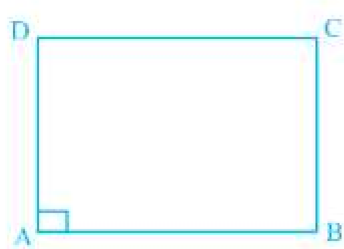
ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਆਇਤ ਕੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਕ ਆਇਤ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੋਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle A = 90^\circ$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 8.6

AD || BC ਅਤੇ AB ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ।

(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.6)।

ਇਸ ਲਈ, $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ)

ਪਰ, $\angle A = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ਹੁਣ $\angle C = \angle A$ ਅਤੇ $\angle D = \angle B$ (ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle C = 90^\circ$ ਅਤੇ $\angle D = 90^\circ$

ਇਸ ਲਈ, ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ 90° ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.13)।

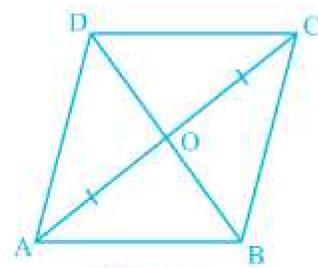
ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ AB = BC = CD = DA (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ, Δ AOD ਅਤੇ Δ COD ਵਿੱਚ,

OA = OC (ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।)

OD = OD (ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ)

AD = CD (ਦਿੱਤਾ ਹੈ।)



ਚਿੱਤਰ 8.7

ਇਸ ਲਈ, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

ਪਰੰਤੂ, $\angle AOD + \angle COD = 180^\circ$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ)

ਇਸ ਲਈ, $2\angle AOD = 180^\circ$

ਜਾਂ, $\angle AOD = 90^\circ$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = AC ਹੈ। AD ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ PAC ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।ਅਤੇ CD || BA ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.8)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ ਅਤੇ (ii) ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਹੱਲ: (i) ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = AC ਹੈ। (ਦਿੱਤਾ ਹੈ।)

ਇਸ ਲਈ, $\angle ABC = \angle ACB$ (ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਨਾਲ ਹੀ, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$

(ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ)

ਜਾਂ, $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

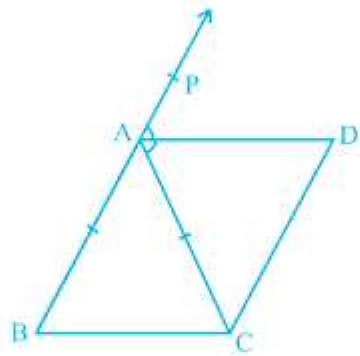
ਹੁਣ, AD ਕੋਣ PAC ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

ਹੁਣ

$2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ]

ਜਾਂ, $\angle DAC = \angle ACB$



ਚਿੱਤਰ 8.8

(ii) ਹੁਣ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਉਹ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਹਨ, ਜੋ ਰੇਖਾਖੰਡ BC ਅਤੇ AD ਨੂੰ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ AC ਦੁਆਰਾ ਕੱਟਣ ਨਾਲ ਬਣਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $BC \parallel AD$

ਨਾਲ ਹੀ, $BA \parallel CD$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਜੋੜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l ਅਤੇ m ਨੂੰ ਇੱਕ ਕਟਾਵੀਂ ਰੇਖਾ p ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.9)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $l \parallel m$ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਟਵੀਂ p ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

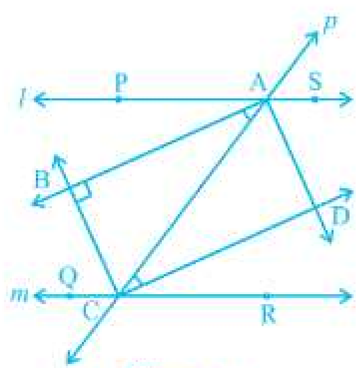
$\angle PAC$ ਅਤੇ $\angle ACQ$ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ B ਨੂੰ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $\angle ACR$ ਅਤੇ $\angle SAC$ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ D ਨੂੰ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\angle PAC = \angle ACR$

($l \parallel m$ ਅਤੇ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ p ਨਾਲ ਬਣੇ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$



ਚਿੱਤਰ 8.9

ਅਰਥਾਤ, $\angle BAC = \angle ACD$

ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ DC ਦੀ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ AC ਦੁਆਰਾ ਕੱਟਣ ਨਾਲ ਬਣਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $AB \parallel DC$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ ਅਤੇ $\angle CAD$ ਲੈਣ 'ਤੇ)

ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ)

ਇਸ ਲਈ, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

ਜਾਂ $\angle BAC + \angle CAD = 90°$

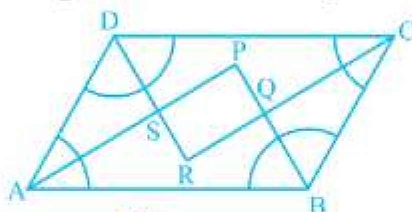
ਜਾਂ $\angle BAD = 90°$

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਇੱਕ ਆਇਤ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ P, Q, R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ $\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$, $\angle B$ ਅਤੇ $\angle C$, $\angle C$ ਅਤੇ $\angle D$ ਅਤੇ $\angle D$ ਅਤੇ $\angle A$ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.10)।



ਚਿੱਤਰ 8.10

ΔASD ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਕਿਉਂਕਿ DS ਕੋਣ D ਨੂੰ ਅਤੇ AS ਕੋਣ A ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180°$$

($\angle A$ ਅਤੇ $\angle D$ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ ਹਨ।)

$$= 90°$$

ਨਾਲ ਹੀ, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੋਣ ਜੋੜ ਗੁਣ)

ਜਾਂ, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

ਜਾਂ, $\angle DSA = 90^\circ$

ਇਸ ਲਈ, $\angle PSR = 90^\circ$ ($\angle DSA$ ਦਾ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\angle APB = 90^\circ$ ਜਾਂ $\angle SPQ = 90^\circ$ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ $\angle DSA$ ਲਈ ਕਿਹਾ ਸੀ)। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\angle PQR = 90^\circ$ ਅਤੇ $\angle SRQ = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ PQRS ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹਨ।

ਕੀ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ? ਆਉ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਦਰਸਾ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ ਅਤੇ $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

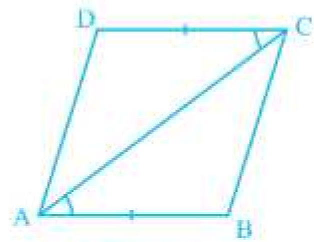
ਇਸ ਲਈ, PQRS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੋਣ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਕੋਣ) ਸਮਕੋਣ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, PQRS ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਜੇ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।
2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
3. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਵਿਕਰਣ AC ਕੋਣ A ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.11)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ

   (i) ਇਹ $\angle C$ ਨੂੰ ਵੀ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

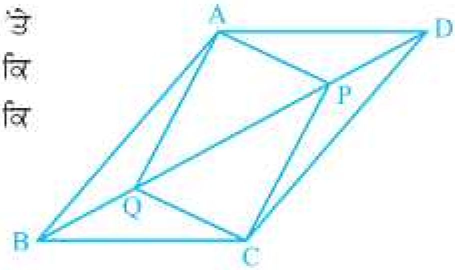
   (ii) ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.11

4. ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਣ AC ਦੋਵੇਂ ਕੋਣਾਂ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ (i) ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ। (ii) ਵਿਕਰਣ BD ਦੋਵੇਂ ਕੋਣ B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

5. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਵਿਕਰਣ BD 'ਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹਨ ਕਿ DP = BQ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਆਕ੍ਰਿਤੀ 8.12)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ



ਚਿੱਤਰ 8.12

(i) $\Delta\, APD \cong \Delta\, CQB$

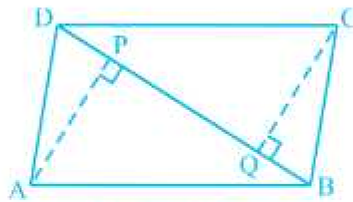
(ii) AP = CQ

(iii) $\Delta\, AQB \cong \Delta\, CPD$

(iv) AQ = CP

(v) APCQ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

6. ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ AP ਅਤੇ CQ ਸਿਖਰਾਂ A ਅਤੇ C ਤੋਂ ਵਿਰਕਣ BD 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੰਬ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.13)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ

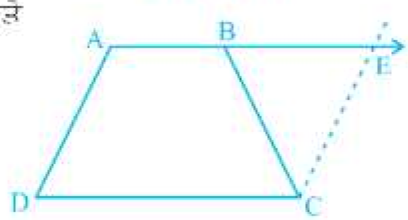


ਚਿੱਤਰ 8.13

(i) $\Delta\, APB \cong \Delta\, CQD$

(ii) AP = CQ

7. ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB || DC ਅਤੇ AD = BC ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.14)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ



ਚਿੱਤਰ 8.14

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta\, ABC \cong \Delta\, BAD$

(iv) ਵਿਕਰਣ AC = ਵਿਕਰਣ BD ਹੈ।

[ਸੰਕੇਤ : AB ਨੂੰ ਵਧਾਉ ਅਤੇ C ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ DA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਵਧੀ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AB ਨੂੰ E 'ਤੇ ਕੱਟੇ।]

8.2 ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਥਿਊਰਮ

ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅਨੇਕ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਆਉ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੁਣ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ, ਜੋ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ :

ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.15)।

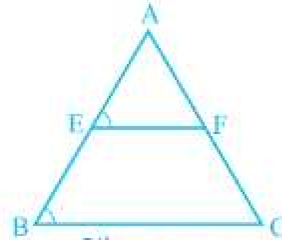
EF ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਨਾਲ ਹੀ, $\angle$ AEF ਅਤੇ $\angle$ ABC ਨੂੰ ਵੀ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖੋਦੇ ਹੋ ?

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ ਅਤੇ } \angle AEF = \angle ABC$$

ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $EF \parallel BC$ ਹੈ।

ਕੁਝ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲੈ ਕੇ, ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 8.15

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਥਿਊਰਮ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹੋ :

ਥਿਊਰਮ 8.8 : *ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

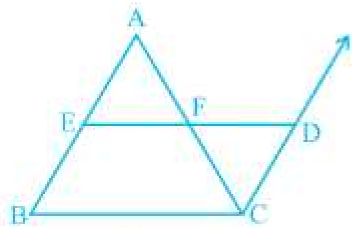
ਚਿੱਤਰ 8.16 ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ΔABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਅਤੇ $CD \parallel BA$ ਹੈ।

$$\Delta AEF \cong \Delta CDF \qquad \text{(ASA ਨਿਯਮ)}$$

ਇਸ ਲਈ, $EF = DF$ ਅਤੇ $BE = AE = DC$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ, BCDE ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਨਾਲ $EF \parallel BC$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.16

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$ ਹੈ।

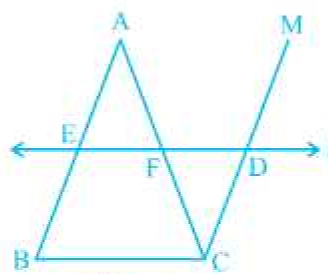
ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਥਿਊਰਮ 8.8 ਦਾ ਉਲਟ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ?

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

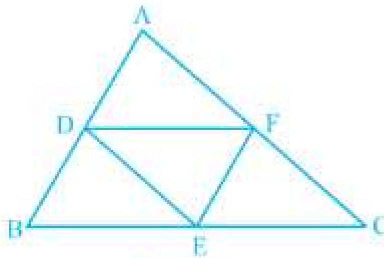
ਥਿਊਰਮ 8.9 : *ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ, ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।*

ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ ਕਿ ਭੁਜਾ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ E ਹੈ ਅਤੇ E ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ l ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, $CM \parallel BA$ ਹੈ।

ΔAEF ਅਤੇ ΔCDF ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, $AF = CF$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.17



ਚਿੱਤਰ 8.18

ਉਦਾਹਰਣ 6 : Δ ABC ਵਿੱਚ, D, E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ CA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.18)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ D, E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ Δ ABC ਚਾਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ D ਅਤੇ E ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ BC ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਥਿਊਰਮ 8.8 ਦੁਆਰਾ

$$DE \parallel AC$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $DF \parallel BC$ ਅਤੇ $EF \parallel AB$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ADEF, BDFE ਅਤੇ DFCE ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

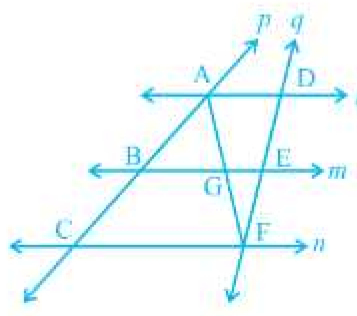
ਹੁਣ, DE ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ BDFE ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\Delta\, BDE \cong \Delta\, FED$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\Delta\, DAF \cong \Delta\, FED$

ਅਤੇ $\Delta\, EFC \cong \Delta\, FED$

ਇਸ ਲਈ, ਚਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 8.19

ਉਦਾਹਰਣ 7 : l, m ਅਤੇ n ਤਿੰਨ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ, ਜੋ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ p ਅਤੇ q ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ l, m ਅਤੇ n ਰੇਖਾ p 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅੰਦਰਲੇ ਖੰਡਾਂ AB ਅਤੇ BC ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.19)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ l, m ਅਤੇ n ਰੇਖਾ q 'ਤੇ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅੰਦਰਲੇ ਖੰਡਾਂ DE ਅਤੇ EF ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ AB = BC ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ DE = EF ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਆਉ A ਨੂੰ F ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ AF ਰੇਖਾ m ਨੂੰ G 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ACFD ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ACF ਅਤੇ AFD ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

Δ ACF ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ B, ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (AB = BC)

ਨਾਲ ਹੀ, $BG \parallel CF$ (ਕਿਉਂਕਿ $m \parallel n$ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ, G ਭੁਜਾ AF ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (ਥਿਊਰਮ 8.9 ਦੁਆਰਾ)

ਹੁਣ, Δ AFD ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਉਂਕਿ G ਭੁਜਾ AF ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ GE $\parallel$ AD ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਥਿਊਰਮ 8.9 ਨਾਲ E ਭੁਜਾ DF ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ DE = EF ਹੈ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, l, m ਅਤੇ n ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ q 'ਤੇ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਅੰਦਰਲੇ ਖੰਡਾਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

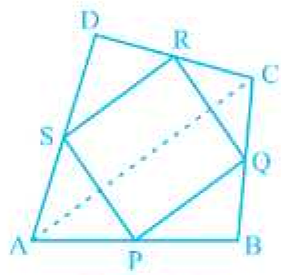
ਅਭਿਆਸ 8.2

1. ABCD ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P, Q, R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC, CD ਅਤੇ DA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ (ਦੇ ਚਿੱਤਰ 8.20)। AC ਉਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ

   (i) SR $\parallel$ AC ਅਤੇ SR = $\frac{1}{2}$ AC ਹੈ।

   (ii) PQ = SR ਹੈ।

   (iii) PQRS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

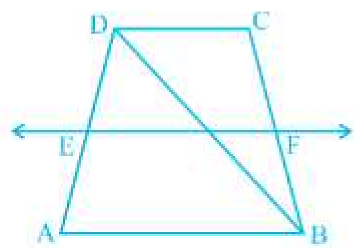


ਚਿੱਤਰ 8.20

2. ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ P, Q, R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC, CD ਅਤੇ DA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

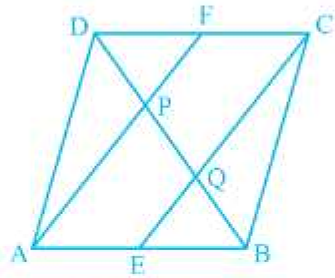
3. ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P, Q, R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC, CD ਅਤੇ DA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

4. ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB $\parallel$ DC ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, BD ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ E ਭੁਜਾ AD ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। E ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ AB ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ, ਜੋ BC ਨੂੰ F 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.21)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ F ਭੁਜਾ BC ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.21

5. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਵਿੱਚ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਦੇ ਮੱਧ – ਬਿੰਦੂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.22)। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਖੰਡ AF ਅਤੇ EC ਵਿਕਰਣ BD ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.22

6. ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਕਰਣ AB ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ M ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ AC ਨੂੰ D 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ
   (i) D ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ – ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (ii) $MD \perp AC$ ਹੈ।
   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ ਹੈ।

8.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

1. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ,
   (i) ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (ii) ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (iii) ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
3. ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
4. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
5. ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
6. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

F7R4I4

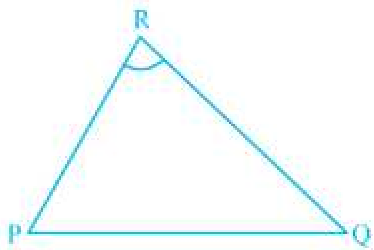
ਅਧਿਆਇ 9

ਚੱਕਰ

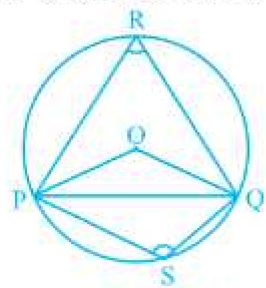
9.1 ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ

ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਭਾਗਾਂ ਬਾਰੇ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R, ਜਿਹੜਾ ਰੇਖਾ PQ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਲਓ। PR ਅਤੇ QR ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.1)। ਤਦ $\angle PRQ$, ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੁਆਰਾ ਬਿੰਦੂ R ਉੱਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 9.2 ਵਿੱਚ ਕੋਣ POQ, PRQ ਅਤੇ PSQ ਕੀ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ? $\angle POQ$ ਜੀਵਾ PQ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ O 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਹੈ, $\angle PRQ$ ਅਤੇ $\angle PSQ$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ PQ ਦੁਆਰਾ ਦੀਰਘ ਚਾਪ PQ ਅਤੇ ਲਘੂ ਚਾਪ PQ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ R ਅਤੇ S 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਹੈ।

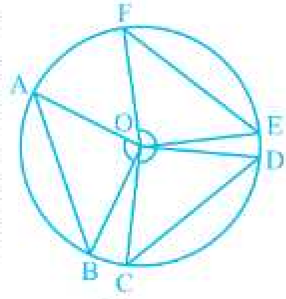


ਚਿੱਤਰ 9.1



ਚਿੱਤਰ 9.2

ਆਓ, ਅਸੀਂ ਜੀਵਾ ਦਾ ਮਾਪ ਅਤੇ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦੇ ਸਬੰਧ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਜੀਵਾ ਵੱਡੀ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਵੀ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

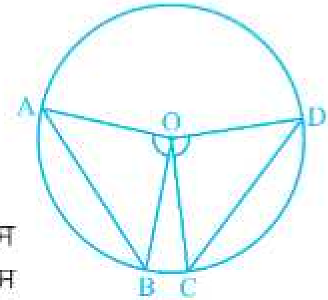


ਚਿੱਤਰ 9.3

ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.3)। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਆਓ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇਈਏ।

ਥਿਊਰਮ 9.1 : *ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ, ਦੀਆਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.4) ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle AOB = \angle COD$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.4

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ AOB ਅਤੇ COD ਵਿੱਚ,

OA = OC (ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ

OB = OD (ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ

AB = CD (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

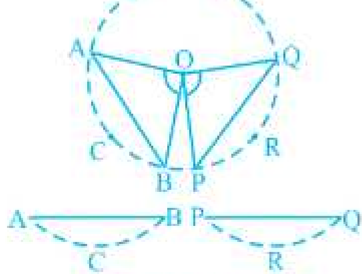
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS ਨਿਯਮ)

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle AOB = \angle COD$ (ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗ)

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੌਖ ਲਈ 'ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਥਾਂ 'ਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ CPCT ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਬਣਾਉਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ? ਆਓ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਿਆ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਅਕਸ ਕਾਗਜ਼ (tracing paper) ਲਓ ਅਤੇ ਇਸ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਡਿਸਕ (disc) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਕੇਂਦਰ O 'ਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ AOB ਬਣਾਓ, ਜਿੱਥੇ A, B ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਦੂਜਾ ਕੋਣ POQ ਕੋਣ AOB ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਬਣਾਓ। ਡਿਸਕ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਜੀਵਾਵਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.5)। ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਚੱਕਰੀਖੰਡ ACB ਅਤੇ PRQ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰੋਗੇ ? ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੇ-ਪੂਰੇ ਢੱਕ ਲੈਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB = PQ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.5

ਹਾਲਾਂਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਹੀ ਦੇਖਿਆ ਹੈ, ਇਸਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਬਾਕੀ ਸਮਾਨ ਕੋਣਾਂ ਲਈ ਦੁਹਰਾਓ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਕਾਰਣ ਸਾਰੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਥਿਊਰਮ 9.2 : *ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ ਉੱਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਉਪਰੋਕਤ ਥਿਊਰਮ, ਥਿਊਰਮ 9.1 ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 9.4 ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ $\angle AOB = \angle COD$ ਲਵੋ ਤਾਂ,

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (ਕਿਉਂ)}$$

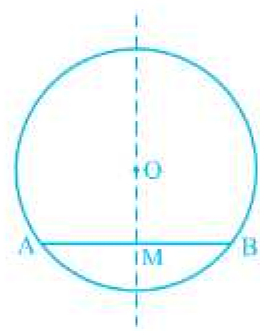
ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $AB = CD$ ਹੈ ?

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਚੱਕਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰਾਂ ਉੱਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, ਜੇਕਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰਾਂ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

9.2 ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜੀਵਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ

ਕਿਰਿਆ : ਇੱਕ ਅਕਸ ਕਾਗਜ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। ਇੱਕ ਜੀਵਾ AB ਖਿੱਚੋ। ਕਾਗਜ ਨੂੰ O ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੋੜੋ ਕਿ ਜੀਵਾ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਦੂਜੇ ਉੱਤੇ ਪਵੇ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੋੜ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ AB ਨੂੰ M ਉੱਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤਦ $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ ਜਾਂ OM, AB ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.6)। ਕੀ ਬਿੰਦੂ B, A ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 9.6

ਹਾਂ, ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $MA = MB$ ਹੈ।

OA ਅਤੇ OB ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ OMA ਅਤੇ OMB ਨੂੰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਖ਼ੁਦ ਦਿਓ। ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਮੂਨਾ ਹੈ।

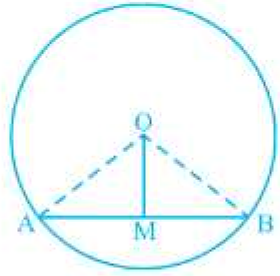
ਥਿਊਰਮ 9.3 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਜੀਵਾ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਲੰਬ, ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।*

ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਲਈ, ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਥਿਊਰਮ 9.3 ਵਿੱਚ ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੀ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜੀਵਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਲਟ ਵਿੱਚ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਹੈ 'ਇੱਕ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ 'ਰੇਖਾ ਜੀਵਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।' ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਲਟ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 9.4 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੀਵਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ? ਇਸ ਨੂੰ ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਕੇ ਦੇਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਅਭਿਆਸ ਕਰਕੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਕਥਨ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਦਿਓ।

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ, ਦੀ AB ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਅਤੇ O ਨੂੰ AB ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ M ਦੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $OM \perp AB$ ਹੈ। OA ਅਤੇ OB ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.7)। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ OAM ਅਤੇ OBM ਵਿੱਚ,



ਚਿੱਤਰ 9.7

$OA = OB$ (ਕਿਉਂ?)

$AM = BM$ (ਕਿਉਂ?)

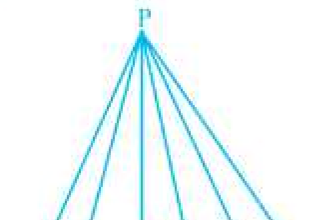
$OM = OM$ (ਸਾਂਝਾ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (ਕਿਉਂ?)

9.3 ਸਮਾਨ ਜੀਵਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ

ਮੰਨ ਲਓ AB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ P ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਅਣਗਿਣਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ P ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 ਆਦਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ AB ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਥੋੜ੍ਹਾ ਸੋਚ ਕੇ ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ P ਤੋਂ AB ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾਖੰਡ ਅਰਥਾਤ ਚਿੱਤਰ 9.8 ਵਿੱਚ PM ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੰਬਾਈ PM ਨੂੰ P ਤੋਂ AB ਦੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ :

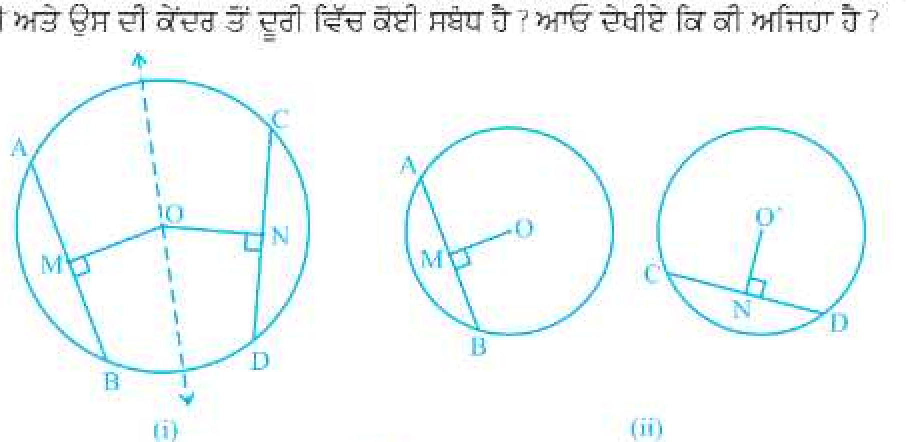


ਚਿੱਤਰ 9.8

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਇਸ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਜੀਵਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਲੰਬੀ ਜੀਵਾ, ਛੋਟੀ ਜੀਵਾ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਤੁਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਮਾਪ ਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਵਿਆਸ, ਜਿਹੜੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜੀਵਾ ਹੈ, ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ ਕੇਂਦਰ ਇਸ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੂਰੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਬੰਧ ਹੈ ? ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ?



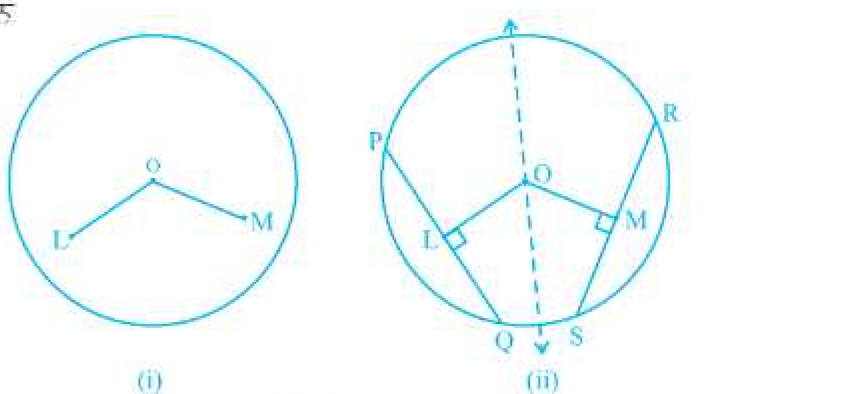
ਚਿੱਤਰ 9.9

ਕਿਰਿਆ : ਕਿਸੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਅਕਸ ਕਾਗਜ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਉੱਤੇ ਕੇਂਦਰ O ਤੋਂ ਲੰਬ OM ਅਤੇ ON ਖਿੱਚੋ। ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੋੜੋ ਕਿ D, B ਉੱਤੇ ਅਤੇ C, A ਉੱਤੇ ਪਵੇ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.9 (i)]। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ O ਮੋੜ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਉੱਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ N, M ਉੱਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, OM = ON ਹੈ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰਾਂ O ਅਤੇ O′ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਲੈ ਕੇ ਦੁਹਰਾਓ। ਉਹਨਾਂ 'ਤੇ ਲੰਬ OM ਅਤੇ O′N ਖਿੱਚੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.9(ii)]। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਡਿਸਕ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਦੂਜੇ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖੋ ਕਿ AB, CD ਨੂੰ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਢੱਕ ਲਵੇ। ਤਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ O, O′ ਉੱਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ M, N ਉੱਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕੀਤੀ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 9.5 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ) ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ (ਜਾਂ ਕੇਂਦਰਾਂ ਤੋਂ) ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਹੁਣ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ, ਕੀ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਕੇਂਦਰ O ਦੇ ਅੰਦਰ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਰੇਖਾਖੰਡ OL ਅਤੇ OM

ਖਿੱਚੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.10 (i)]। ਹੁਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ RS ਖਿੱਚੋ ਜਿਹੜੀਆਂ OL ਅਤੇ OM ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੋਣ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.10 (ii)]। PQ ਅਤੇ RS ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਮਾਪੋ। ਕੀ ਇਹ ਅਸਮਾਨ ਹਨ ? ਨਹੀਂ, ਦੋਨੋਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਜਿਆਦਾ ਬਰਾਬਰ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ 'ਤੇ ਲੰਬ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਕੇ ਦੁਹਰਾਓ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥਿਊਰਮ 9.5 ਦਾ ਉਲਟ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਦਾ ਕਥਨ



ਚਿੱਤਰ 9.10

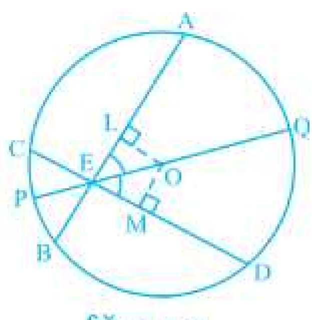
ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 9.6 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਜੀਵਾਵਾਂ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸਿੱਟਿਆਂ 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਾਟਵੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਿਆਸ ਨਾਲ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਏ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੀਵਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ, ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਬਿੰਦੂ E ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। E ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ PQ ਅਜਿਹਾ ਵਿਆਸ ਹੈ ਕਿ $\angle AEQ = \angle DEQ$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.11)। ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ AB = CD ਹੈ। ਜੀਵਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ OL ਅਤੇ OM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ,



ਚਿੱਤਰ 9.11

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$
(ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਗੁਣ)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

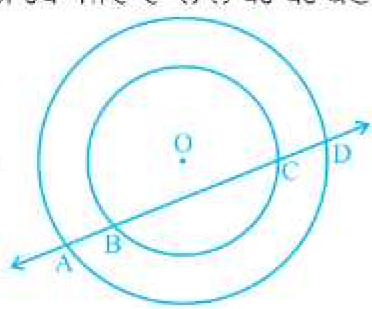
ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ OLE ਅਤੇ OME ਵਿੱਚ,

$\angle LEO = \angle MEO$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

	$\angle LOE = \angle MOE$	(ਉੱਪਰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ)
	$EO = EO$	(ਸਾਂਝਾ)
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ,	$\Delta\, OLE \cong \Delta\, OME$	(ਕਿਉਂ ?)
ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :	$OL = OM$	(CPCT)
ਇਸ ਲਈ,	$AB = CD$	(ਕਿਉਂ ?)

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 5 ਸਮ ਅਤੇ 3 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰਾਂ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ 4 ਸਮ ਹੈ। ਸਾਂਝੀ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਮਾਨ ਜੀਵਾਵਾਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਦੇ ਖੰਡ ਦੂਜੀ ਜੀਵਾ ਦੇ ਸੰਗਤ ਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਮਾਨ ਜੀਵਾਵਾਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਜੀਵਾਵਾਂ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
4. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੋ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ (ਇੱਕ ਹੀ ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ) ਨੂੰ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ, A, B, C ਅਤੇ D ਉੱਪਰ ਕੱਟੇ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB = CD ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.12)।



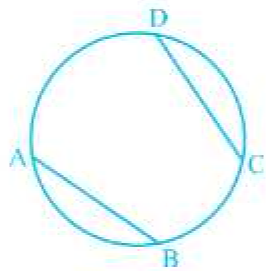
ਚਿੱਤਰ 9.12

5. ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਬਣੇ 5 ਮੀਟਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਖੜੀਆਂ ਤਿੰਨ ਲੜਕੀਆਂ ਰੇਸ਼ਮਾ, ਸਲਮਾ ਅਤੇ ਮਨਦੀਪ ਖੇਡ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। ਰੇਸ਼ਮਾ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਸਲਮਾਂ ਦੇ ਕੋਲ, ਸਲਮਾਂ ਮਨਦੀਪ ਦੇ ਕੋਲ ਅਤੇ ਮਨਦੀਪ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਕੋਲ ਸੁੱਟਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੇਸ਼ਮਾ ਤੇ ਸਲਮਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਸਲਮਾ ਤੇ ਮਨਦੀਪ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਹਰੇਕ ਦੂਰੀ 6 ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਰੇਸ਼ਮਾ ਅਤੇ ਮਨਦੀਪ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਕੀ ਹੈ ?
6. 20 ਮੀਟਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਗੋਲ ਪਾਰਕ (ਚੱਕਰਾਕਾਰ) ਇੱਕ ਕਲੋਨੀ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਲੜਕੇ ਅੰਕੁਰ, ਸਇਅਦ ਅਤੇ ਡੇਵਿਡ ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬੈਠੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਹੱਥ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ ਟੈਲੀਫੋਨ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਗੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਫੋਨ ਦੀ ਡੋਰੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੱਸੋ।

9.4 ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ (ਵਿਆਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ) ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਚਾਪਾਂ ਵਿੱਚ (ਇੱਕ ਦੀਰਘ ਤੇ ਦੂਜਾ ਲਘੂ) ਵੰਡਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਲਵੋ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਚਾਪਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਚਾਪ, ਦੂਜੀ ਜੀਵਾ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਬਣੇ ਚਾਪ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਹੋਣ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਹੋਰ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਾਪ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਚਾਪ ਉੱਤੇ ਰੱਖ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਬਿਨਾਂ ਮੋੜੇ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਣਗੀਆਂ।

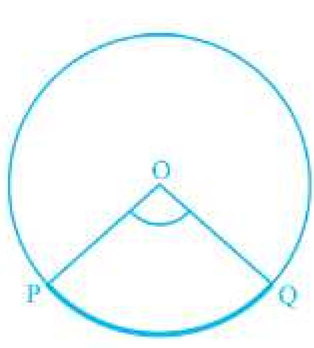
ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਜੀਵਾ CD ਦੀ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚੋਂ CD ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾ AB ਦੀ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਉੱਤੇ ਰੱਖ ਕੇ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਚਾਪ CD, ਚਾਪ AB ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.13)। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਾਪਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਾਪ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਥਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:



ਚਿੱਤਰ 9.13

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਚਾਪਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਚਾਪਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਵੀ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਤੋਂ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਲਘੂ ਚਾਪ ਕੋਣ ਨੂੰ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚਾਪ ਪ੍ਰਤਿਵਰਤੀ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਚਿੱਤਰ 9.14 ਵਿੱਚ, ਲਘੂ ਚਾਪ PQ ਦੁਆਰਾ O 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ POQ ਹੈ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ PQ ਦੁਆਰਾ O 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਤਿਵਰਤੀ ਕੋਣ POQ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.14

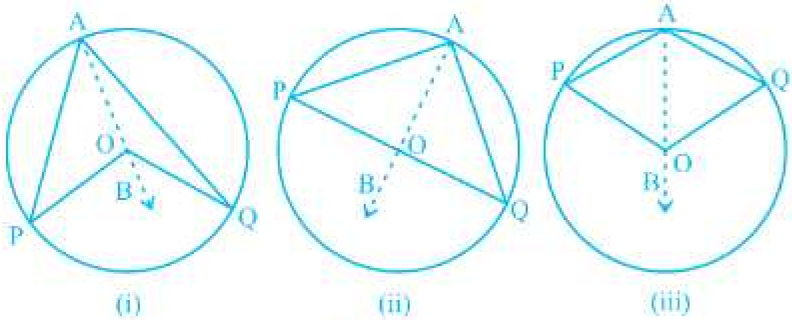
ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣ ਅਤੇ ਥਿਊਰਮ 9.1 ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪਰਿਣਾਮ ਸੱਚ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਾਪਾਂ (ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਚਾਪਾਂ) ਕੇਂਦਰ ਉੱਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਸੰਗਤ (ਲਘੂ) ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਥਿਊਰਮ ਇੱਕ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ ਉੱਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਵਿਚਕਾਰ ਸਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 9.7 : *ਇੱਕ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ ਉੱਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ (ਭਾਗ) ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਚਾਪ PQ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਜੋ ਕੇਂਦਰ O ਉੱਤੇ $\angle POQ$ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਉੱਤੇ $\angle PAQ$ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\angle POQ = 2\angle PAQ$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.15

ਚਿੱਤਰ 9.15 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਤਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

(i) ਵਿੱਚ ਚਾਪ PQ ਲਘੂ ਹੈ, (ii) ਵਿੱਚ ਚਾਪ PQ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਹੈ ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਚਾਪ PQ ਦੀਰਘ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ AO ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਵਧਾਈਏ।

ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(ਕਿਉਂਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਉਸ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।)

ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $\Delta\, OAQ$ ਵਿੱਚ,

$OA = OQ$ (ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle OAQ = \angle AQO$ (ਥਿਊਰਮ 7.5)

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ (1)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\angle BOP = 2\angle OAP$ (2)

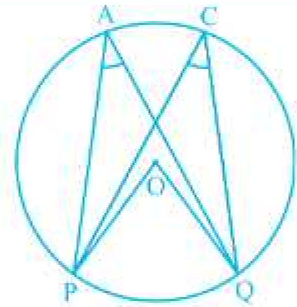
(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ਅਰਥਾਤ, $\angle POQ = 2\angle PAQ$ (3)

ਸਥਿਤੀ (iii) ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ PQ ਦੀਰਘ ਚਾਪ ਹੈ, (3) ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ

ਪ੍ਰਤਿਵਰਤੀ ਕੋਣ $POQ = 2\angle PAQ$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਮੰਨ ਲਉ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਜੀਵਾ PQ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ, $\angle PAQ$ *ਨੂੰ ਚੱਕਰਖੰਡ PAQP ਵਿੱਚ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।*



ਚਿੱਤਰ 9.16

ਥਿਊਰਮ 9.7 ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ C ਲਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.16) ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ:

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

ਇਸ ਲਈ, $\quad \angle PCQ = \angle PAQ$

ਇਹ ਅੱਗੇ ਲਿਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 9.8 : *ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਆਓ ਹੁਣ ਥਿਊਰਮ 9.7 ਦੀ ਸਥਿਤੀ (ii) ਦੀ ਅਲੱਗ ਤੋਂ ਵਿਵੇਚਨਾ ਕਰੀਏ ਜਿੱਥੇ $\angle PAQ$ ਉਸ ਚੱਕਰਖੰਡ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੋਣ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ C ਅਰਧ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਲਓ, ਤਾਂ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$\angle PCQ = 90°$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੁਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਜਿਹੜਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 9.8 ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਥਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

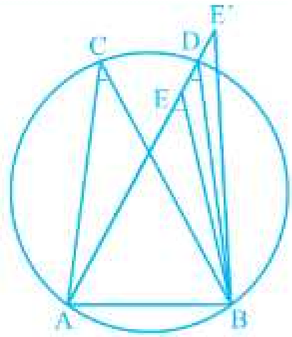
ਥਿਊਰਮ 9.9 : *ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾਖੰਡ, ਆਪਣੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਚੱਕਰੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ)।*

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਸੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ :

ਚਿੱਤਰ 9.17 ਵਿੱਚ, AB ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਜੋ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ C ਅਤੇ D 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ

$$\angle ACB = \angle ADB$$

ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ, ਬਿੰਦੂਆਂ A, C ਅਤੇ B ਵਿਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉਹ ਚੱਕਰ D ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦਾ। ਤਦ, ਉਹ AD (ਜਾਂ ਵਧੀ ਹੋਈ AD) ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ E (ਜਾਂ E′) ਉੱਤੇ ਕੱਟੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 9.17

ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A, C, E ਅਤੇ B ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ ਤਾਂ

$$\angle ACB = \angle AEB \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਪਰੰਤੂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\angle ACB = \angle ADB$

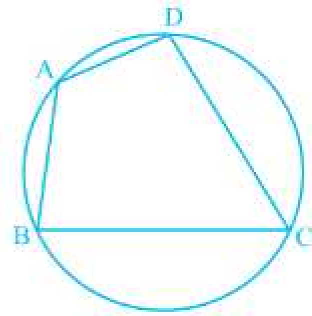
ਇਸ ਲਈ, $\qquad \angle AEB = \angle ADB$

ਇਹ ਤਦ ਤੱਕ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਜਦੋਂ ਤੱਕ E, D ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, E′ ਵੀ D ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

9.5 ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ

ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD *ਚੱਕਰੀ* ਚਤੁਰਭੁਜ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਚਾਰੋਂ ਸਿਖਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.18)। ਇਹਨਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਗੁਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ। ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਕਈ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦਾ ਨਾਮ ABCD ਰੱਖੋ। (ਇਸ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਦੇ ਕਈ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਉੱਤੇ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ ਲੈ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :



ਚਿੱਤਰ 9.18

ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਲੜੀ ਨੰ.	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਕਢਦੇ ਹੋ ?

ਜੇਕਰ ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਗਲਤੀ ਨਾ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ :

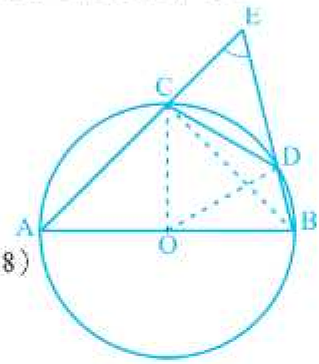
ਥਿਊਰਮ 9.10 : *ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ* 180° *ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਉਲਟ, ਜਿਸ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ, ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ :

ਥਿਊਰਮ 9.11 : *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ* 180° *ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਚੱਕਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਤੁਸੀਂ ਥਿਊਰਮ 9.9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਚਿੱਤਰ 9.19 ਵਿੱਚ, AB ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਅਤੇ CD ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਹੈ। AC ਅਤੇ BD ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ E ਉੱਤੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle AEB = 60^\circ$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.19

ਹੱਲ : OC, OD ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ODC ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ, $\angle COD = 60^\circ$

ਹੁਣ $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ਥਿਊਰਮ 10.8)

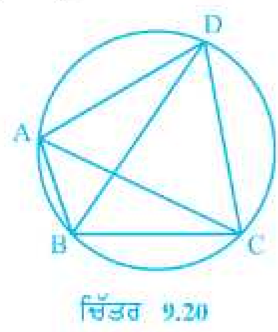
ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ: $\angle CBD = 30^\circ$

ਫਿਰ, $\angle ACB = 90^\circ$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ, $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, ਅਰਥਾਤ $\angle AEB = 60^\circ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 9.20 ਵਿੱਚ, ABCD ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AC ਅਤੇ BD ਵਿਕਰਣ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\angle DBC = 55^\circ$ ਅਤੇ $\angle BAC = 45^\circ$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\angle BCD$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.20

ਹੱਲ : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਦੇ ਕੋਣ)

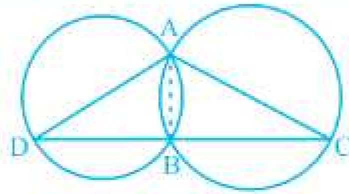
ਇਸ ਲਈ, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

ਪਰੰਤੂ, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਚੱਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। AD ਅਤੇ AC ਦੋਨੋਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.21)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ B ਰੇਖਾਖੰਡ DC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.21

ਹੱਲ : AB ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਹੁਣ,

$\angle ABD = 90°$ (ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੋਣ)

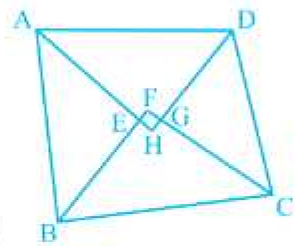
$\angle ABC = 90°$ (ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

ਇਸ ਲਈ, DBC ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ, B ਰੇਖਾਖੰਡ DC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕਾਂ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਚਤੁਰਭੁਜ (ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ) ਚੱਕਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.22 ਵਿੱਚ, ABCD ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਜਿਸ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ਅਤੇ $\angle D$ ਦੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ AH, BF, CF ਅਤੇ DH ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ EFGH ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 9.22

ਹੁਣ, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (ਕਿਉਂ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

ਅਤੇ $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (ਕਿਉਂ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

ਇਸ ਲਈ, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

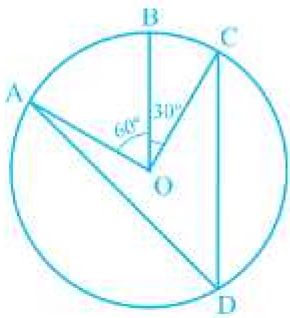
ਇਸ ਲਈ ਥਿਊਰਮ 9.11 ਰਾਹੀਂ ਚਤੁਰਭੁਜ EFGH ਚੱਕਰੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.3

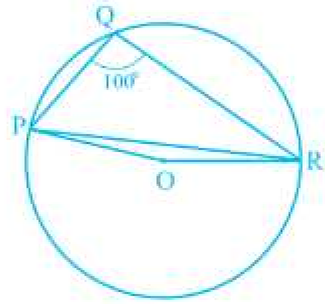
1. ਚਿੱਤਰ 9.12 ਵਿੱਚ, ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ A,B ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $\angle BOC = 30°$ ਅਤੇ $\angle AOB = 60°$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਚਾਪ ABC ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਚੱਕਰ 'ਤੇ D ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle ADC$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਲਘੂ ਚਾਪ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚਾਪ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਚਿੱਤਰ 9.24 ਵਿੱਚ, $\angle PQR = 100°$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ P, Q ਅਤੇ R, ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। $\angle OPR$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

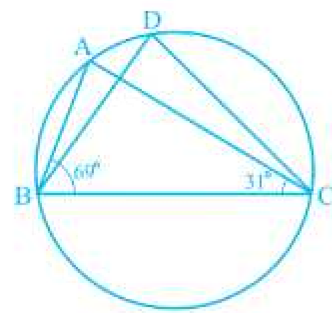


ਚਿੱਤਰ 9.23



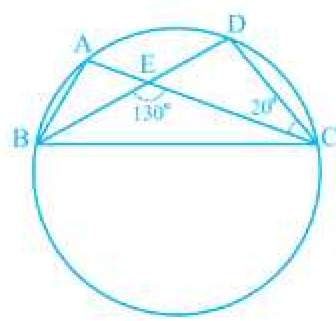
ਚਿੱਤਰ 9.24

4. ਚਿੱਤਰ 9.25 ਵਿੱਚ, $\angle ABC = 69°$ ਅਤੇ $\angle ACB = 31°$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, $\angle BDC$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



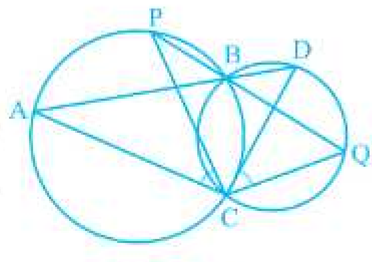
ਚਿੱਤਰ 9.25

5. ਚਿੱਤਰ 9.26 ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ A, B, C ਅਤੇ D ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ E ਉੱਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਕਿ $\angle BEC = 130°$ ਅਤੇ $\angle ECD = 20°$ ਹੈ। $\angle BAC$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.26

6. ABCD ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ E ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\angle DBC = 70°$ ਅਤੇ $\angle BAC = 30°$ ਹੋਣ ਤਾਂ, $\angle BCD$ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਫਿਰ ਜੇਕਰ AB = BC ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\angle ECD$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਉਸ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਚੱਕਰੀ ਹੈ।
9. ਦੋ ਚੱਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ C ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। B ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਰੇਖਾਖੰਡ ABD ਅਤੇ PBQ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ A, D ਅਤੇ P, Q 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕੱਟਦੇ ਹੋਏ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.27)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle ACP = \angle QCD$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.27

10. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੇ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।
11. ਸਾਂਝੇ ਕਰਣ AC ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ ADC ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle CAD = \angle CBD$ ਹੈ।
12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

9.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਕਿਸੇ ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿਸੀ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ (ਸਥਿਰ) ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਣ।
2. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ) ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਕੇਂਦਰਾਂ) ਉੱਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ) ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਕੇਂਦਰਾਂ 'ਤੇ) ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਤਾਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
4. ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਜੀਵਾ 'ਤੇ ਸੁੱਟਿਆ ਲੰਬ ਉਸਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।
5. ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਜੀਵਾ ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

6. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ) ਬਰਾਬਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ (ਜਾਂ ਸੰਗਤ ਕੇਂਦਰਾਂ ਤੋਂ) ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
7. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ (ਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰਾਂ) ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਜੀਵਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
8. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਦੋ ਚਾਪਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਚਾਪਾਂ (ਲਘੂ ਦੀਰਘ) ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
9. ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਾਪਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
10. ਕਿਸੇ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
11. ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
12. ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
13. ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾਖੰਡ, ਆਪਣੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਦੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚਾਰੋਂ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
14. ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
15. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਚੱਕਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

P4F3W3

ਅਧਿਆਇ 10

ਹੀਰੋ ਦਾ ਸੂਤਰ

10.1 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ

ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}$ × ਆਧਾਰ × ਉਚਾਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਪਤਾ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਵੀ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 40 ਮੀ. 32 ਮੀ. ਅਤੇ 24 ਮੀ. ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ? ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸੂਤਰ (I) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਸੁਰਾਗ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਰਿਹਾ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਪਾਉਂਦੇ ਤਾਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ 'ਤੇ ਚੱਲੋ।

ਹੀਰੋ ਦਾ ਜਨਮ ਸ਼ਾਇਦ ਮਿਸਰ ਵਿੱਚ ਅਲੈਕਜੈਂਡ੍ਰਿਆ ਨਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਹੋਇਆ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਵਿਹਾਰਕ ਗਣਿਤ (applied mathematics) 'ਤੇ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਸ਼ਿਆਂ 'ਤੇ ਕੰਮ ਇਨਾ ਜਿਆਦਾ ਅਤੇ ਵਿਵਿਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੀ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਵ ਕੋਸ਼ੀ (encyclopedic) ਲਿਖਾਰੀ ਸਮਝਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਕੰਮ ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਖੇਤਰਮਿਤੀ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਸੀ। ਇਹ ਕੰਮ ਤਿੰਨ ਕਿਤਾਬਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ 1 ਵਿੱਚ, ਵਰਗਾਂ, ਆਇਤਾਂ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਲੰਬਾਂ, ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ, ਸਮ ਬਹੁਭੁਜਾਂ, ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ, ਬੇਲਣਾਂ, ਸ਼ੰਕੂਆਂ, ਗੋਲਿਆਂ ਆਦਿ ਦੇ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸੀ ਪੁਤਸਕ ਵਿੱਚੋਂ ਹੀਰੋ ਨੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਸੂਤਰ ਵਿਉਤਪੰਨ ਕੀਤਾ।

ਹੀਰੋ (10 ਈ.ਪੂ.–75 ਈ.ਪੂ.)

ਚਿੱਤਰ 10.1

ਹੀਰੋ ਦੇ ਇਸ ਸੂਤਰ (*Hero's formula*) ਨੂੰ ਹੀਰੋ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

$$\boxed{\text{ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(II)}$$

ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ

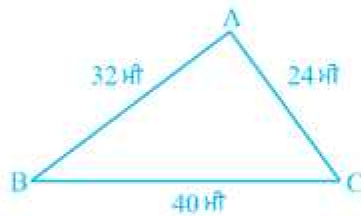
$$s = \text{ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਅਰਧ ਪਰਿਮਾਪ (\textit{semi-perimeter})} = \frac{a+b+c}{2} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਹ ਸੂਤਰ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ। ਉੱਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.2)।

ਆਉ $a = 40$ ਮੀ, $b = 24$ ਮੀ $c = 32$ ਮੀ ਲਓ ਤਾਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ

$$s = \frac{40+24+32}{2} \text{ ਮੀ.} = 48 \text{ ਮੀ.}$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਹੁਣ, $s - a = (48 - 40)$ ਮੀ $= 8$ ਮੀ,

$s - b = (48 - 24)$ ਮੀ $= 24$ ਮੀ,

ਅਤੇ $s - c = (48 - 32)$ ਮੀ $= 16$ ਮੀ

ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਪਾਰਕ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ ਮੀ}^2 = 384 \text{ ਮੀ}^2$$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਰਕ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਭੁਜਾ ਅਰਥਾਤ BC, ਜਿਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 40 ਮੀ ਹੈ, ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਵਿਚਲਾ ਕੋਣ 90° ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਸੂਤਰ I ਤੋਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24$ ਮੀ^{2}

$$= 384 \text{ ਮੀ}^2$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਖੇਤਰਫਲ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਸੀ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਦੂਜੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗੇ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ :

(i) 10 ਸਮ ਭੁਜਾ ਵਾਲੀ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ

ਅਤੇ (ii) ਅਸਮਾਨ ਭੁਜਾ 8 ਸਮ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 5 ਸਮ ਵਾਲੀ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ।

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ

(i) ਦੇ ਲਈ, $s = \dfrac{10+10+10}{2}$ ਸਮ = 15 ਸਮ

ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ ਸਮ^2

$= \sqrt{15\times5\times5\times5}$ ਸਮ^2 = $25\sqrt{3}$ ਸਮ^2

(ii) ਦੇ ਲਈ, $s = \dfrac{8+5+5}{2}$ ਸਮ = 9 ਸਮ

ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}$ ਸਮ^2

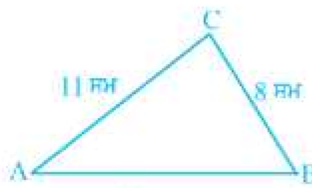
$= \sqrt{9\times1\times4\times4}\ \text{cm}^2 - 12$ ਸਮ^2

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਫਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ 8 ਸਮ ਅਤੇ 11 ਸਮ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 32 ਸਮ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.3)।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਪਰਿਮਾਪ = 32 ਸਮ, $a = 8$ ਸਮ ਅਤੇ $b = 11$ ਸਮ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ $c = 32$ ਸਮ – $(8 + 11)$ ਸਮ = 13 ਸਮ



ਚਿੱਤਰ 10.3

ਹੁਣ, $2s = 32$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $s = 16$ ਸਮ,

$s - a = (16 - 8)$ ਸਮ = 8 ਸਮ,

$s - b = (16 - 11)$ ਸਮ = 5 ਸਮ,

$s - c = (16 - 13)$ ਸਮ = 3 ਸਮ

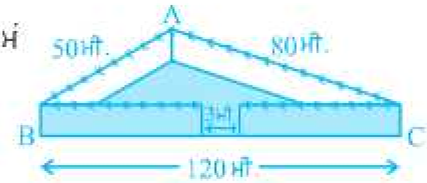
ਇਸ ਲਈ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16\times8\times5\times3}$ ਸਮ^2 = $8\sqrt{30}$ ਸਮ^2

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਪਾਰਕ ABC ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ 120 ਮੀ. 80 ਮੀ. ਅਤੇ 50 ਮੀ. ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.4)। ਇੱਕ ਮਾਲਣ ਧਨੀਆ ਨੇ ਇਸ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਘਾਹ ਲਗਾਉਣੀ ਹੈ। ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਘਾਹ ਲਗਾਉਣੀ ਹੈ ? ਇੱਕ ਪਾਸੇ 3 ਮੀ. ਚੌੜੇ ਫਾਟਕ ਦੇ ਲਈ ਥਾਂ ਛੱਡਕੇ ਇਸ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ₹20 ਪ੍ਰਤੀ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕੰਡੇਦਾਰ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $2s = 50$ ਮੀ. $+ 80$ ਮੀ. $+ 120$ ਮੀ. $= 250$ ਮੀ.

ਅਰਥਾਤ $s = 125$ ਮੀ.



ਚਿੱਤਰ 10.4

ਇਸ ਲਈ $s - a = (125 - 120)$ ਮੀ. $= 5$ ਮੀ.,

$s - b = (125 - 80)$ ਮੀ. $= 45$ ਮੀ.,

$s - c = (125 - 50)$ ਮੀ. $= 75$ ਮੀ.

ਘਾਹ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰਫਲ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ ਮੀ.^{2}

$= 375\sqrt{15}$ ਮੀ.^{2}

ਨਾਲ ਹੀ ਪਾਰਕ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $= AB + BC + CA = 250$ ਮੀ.

ਇਸ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= 250$ ਮੀ. $- 3$ ਮੀ. (ਫਾਟਕ ਦੇ ਲਈ)

$= 247$ ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਖਰਚ = ₹20 × ₹247 = ₹4940

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਭੂ-ਖੰਡ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 3 : 5 : 7 ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 300 ਮੀ. ਹੈ। ਇਸ ਭੂ-ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ) $3x$, $5x$ ਅਤੇ $7x$ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.5)।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3x + 5x + 7x = 300$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ)

ਇਸ ਲਈ, $15x = 300$ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $x = 20$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ 3×20 ਮੀ., 5×20 ਮੀ. ਅਤੇ 7×20 ਮੀ. ਹਨ।

ਭਾਵ ਇਹ ਭੁਜਾਵਾਂ 60 ਮੀ., 100 ਮੀ. ਅਤੇ 140 ਮੀ. ਹਨ।

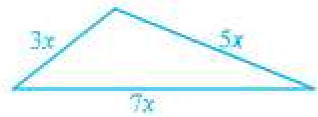
ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ (ਹੀਰੋ ਦਾ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ) ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ

ਹੁਣ, $s = \frac{60 + 100 + 140}{2}$ ਮੀ. = 150 ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰਫਲ = $\sqrt{150\,(150 - 60)\,(150 - 100)\,(150 - 140)}$ ਮੀ².

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ ਮੀ².

$= 1500\sqrt{3}$ ਮੀ²

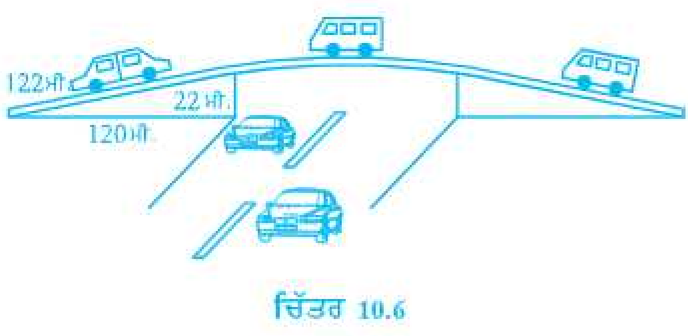


ਚਿੱਤਰ 10.5

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਇਕ ਆਵਾਜਾਈ ਸੰਕੇਤ ਬੋਰਡ ਉਤੇ 'ਅੱਗੇ ਸਕੂਲ ਹੈ' ਲਿਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ 'a' ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਸ ਬੋਰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਸੰਕੇਤ ਬੋਰਡ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 180 ਸਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

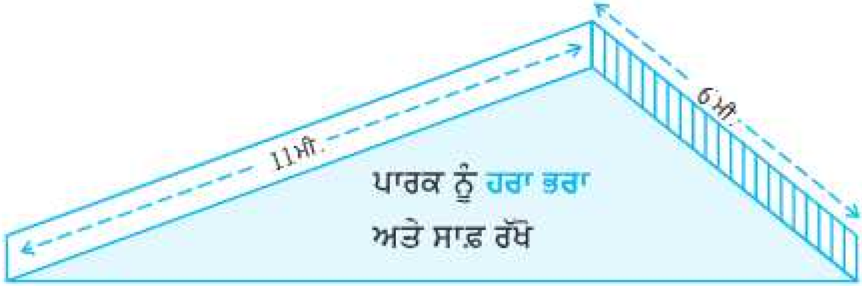
2. ਕਿਸੇ ਫਲਾਈ ਓਵਰ (flyover) ਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੀਵਾਰ ਨੂੰ ਇਸਤਿਹਾਰਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੀਵਾਰ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ 122 ਮੀ., 22 ਮੀ. ਅਤੇ 120 ਮੀ. ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6)। ਇਸ ਇਸ਼ਤਿਹਾਰਾਂ ਤੋਂ ਹਰ ਸਾਲ ₹5000 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਨੇ ਇਸ ਦੀਵਾਰ ਨੂੰ ਇਸ਼ਤਿਹਾਰ ਲਈ, 3 ਮਹੀਨੇ ਲਈ ਕਿਰਾਏ ਤੇ ਲਿਆ ਹੈ। ਉਸ ਨੇ ਕਿਨਾ ਕਿਰਾਇਆ ਦਿੱਤਾ ?



ਚਿੱਤਰ 10.6

3. ਕਿਸੇ ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਿਸਲਣ ਪੱਟੀ (slide) ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਪਾਸਵੀਂ ਦੀਵਾਰਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀਵਾਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਰੰਗ ਰੋਗਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ

ਤੇ "ਪਾਰਕ ਨੂੰ ਹਰਾ ਭਰਾ ਅਤੇ ਸਾਫ ਰੱਖੋ" ਲਿਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਆਕ੍ਰਿਤੀ 10.7)। ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀਵਾਰ ਦੇ ਪਸਾਰ 15 ਮੀ., 11 ਮੀ. ਅਤੇ 6 ਮੀ. ਹੈ, ਤਾਂ ਰੰਗ ਰੋਗਨ ਕੀਤੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.7

4. ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ 18 ਸਮ ਅਤੇ 10 ਸਮ ਹਨ, ਉਸ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 42 ਸਮ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 12 : 17 : 25 ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 540 ਸਮ ਹੈ। ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਫਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 30 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 12 ਸਮ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10.2 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਹੋਣ ਤਾਂ ਹੀਰੋ ਕੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ $s = \frac{a+b+c}{2}$ ਹੈ।

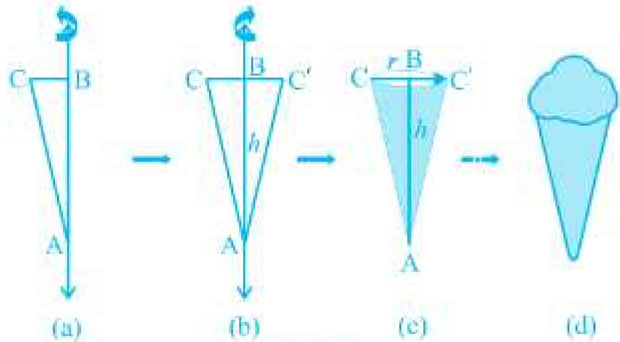
अधिआइ 11

ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ

11.1 ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

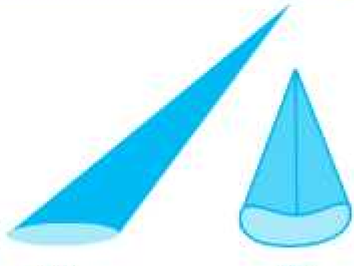
ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇ ਉਪਰ ਇੱਕ ਰੱਖ ਕੇ ਠੋਸ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸਿਰਜਣਾ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। ਸੰਯੋਗ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਿਜਮ (*prism*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਹੁਣ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜੇ ਪ੍ਰਿਜਮ ਨਹੀਂ ਹਨ (ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਪਿਰਾਮਿਡ (pyramids) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।) ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਸਿਰਜਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ : ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੋਵੇ, ਕੱਟ ਲਵੋ। ਦੋਨੋਂ ਲੰਬ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਓ AB. ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਮੋਟੀ ਡੋਰੀ ਚਿੱਪਕਾ ਦਿਓ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1(a)]। ਡੋਰੀ ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਹੱਥਾਂ ਨਾਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਪੱਕੜ ਕੇ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਡੋਰੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਈ ਵਾਰ ਘੁਮਾਓ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? ਜਦੋਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਡੋਰੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਘੁੰਮ ਰਹੀਂ ਸੀ, ਤਾਂ ਜੋ ਉਹ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਬਣ ਰਹੀ ਸੀ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੀ ਪਛਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1(b)] ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਯਾਦ ਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਅਕਾਰ ਦੇ ਛੋਟੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਭਰੀ ਤੁਸੀਂ ਕਦੇ ਆਇਸ ਕ੍ਰੀਮ ਖਾਦੀ ਸੀ ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1(c) ਅਤੇ (d)]



ਚਿੱਤਰ 11.1

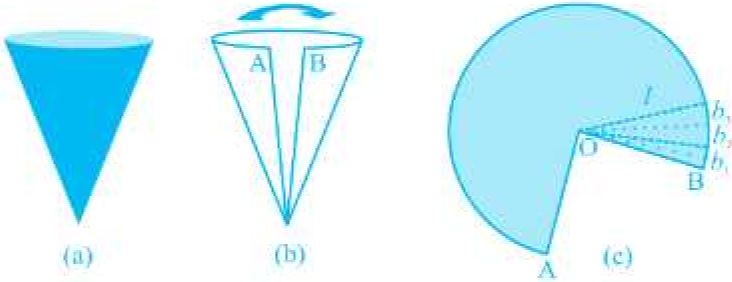
ਇਹ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ (*right circular cone*) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11.1(c) ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A ਇਸ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਸਿਖ਼ਰ (*vertex*) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। AB ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ BC ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ। AC ਇਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ (*slant height*) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ B ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ। ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਅਕਸਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ h, r ਅਤੇ l ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ। ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.2 ਇਸ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਜੋ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ ਉਹ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਨਹੀਂ ਹੈ (a) ਵਿੱਚ ਸਿਖ਼ਰ ਨੂੰ ਆਧਾਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ ਆਧਾਰ ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਆਧਾਰ ਚੱਕਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੇਲਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੀ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ ਸ਼ੰਕੂ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਹੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.2

ਕਿਰਿਆ : (i) ਇੱਕ ਸਾਫ਼ ਬਣੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਭੁਜਾ ਜਾਂ ਕਿਨਾਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟੋ ਜੋ ਕੋਈ ਅੰਸ਼ਿਕ ਚੜ੍ਹਾਉ ਨਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਖੋਲ ਕੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕਿਸ ਅਕਾਰ ਦੇ ਕਾਗਜ਼ ਤੋਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਬਣੀ ਸੀ (ਜਿਸ ਭੁਜਾ ਜਾਂ ਕਿਨਾਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਤੁਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਕੱਟੋਗੇ ਉਹ ਉਸ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨੂੰ l ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਖੋਲਿਆ ਗਿਆ ਕਾਗਜ਼ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕੇਕ ਦੇ ਗੋਲ ਭਾਗ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ A ਅਤੇ B ਅੰਕਿਤ ਹੈ, ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਮਿਲਾ ਲਓ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.3 (c) ਦਾ ਵਕਰੀ ਭਾਗ, ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.3

(iii) ਜੇਕਰ ਚਿੱਤਰ 11.3 (c) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ O ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸੈਂਕੜੇ ਛੋਟੇ ਛੋਟੇ ਟੁੱਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਕੱਟੇ ਹੋਏ ਭਾਗ ਲਗਭਗ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਉਚਾਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ l ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(iv) ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}$ × ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਆਧਾਰ × l

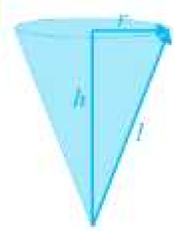
ਇਹ ਸਾਰੇ ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਜੋੜ

$$=\frac{1}{2}b_1l+\frac{1}{2}b_2l+\frac{1}{2}b_3l+\cdots=\frac{1}{2}l\,(b_1+b_2+b_3+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}\times l\times[\text{ਚਿੱਤਰ 11.3(c) ਦੀ ਪੂਰੀ ਵਕਰੀ ਪਰਿਸੀਮਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ}]$$

(ਕਿਉਂਕਿ $b_1+b_2+b_3+\ldots$ ਮਿਲਕੇ ਵਕਰੀ ਭਾਗ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ)
ਇਸੇ ਵਕਰੀ ਭਾਗ ਤੋਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਬਣਦਾ ਹੈ।
ਨਾਲ ਹੀ ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $=2\pi r$, ਜਿੱਥੇ r ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, **ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** $\boxed{=\frac{1}{2}\times l\times 2\pi r=\pi rl}$



ਚਿੱਤਰ 11.4

ਜਿਥੇ r ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ ਅਤੇ l ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $l^2=r^2+h^2$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 13.16 ਤੋਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ (ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਤੋਂ)। ਇੱਥੇ h ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $l=\sqrt{r^2+h^2}$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਬੰਦ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਢੱਕਣ ਲਈ, r ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁਕੜੇ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ πr^2 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, **ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** $\boxed{=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)}$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 10 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਸਮ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\pi rl$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times 10 \text{ ਸਮ}^2$$

$$=220 \text{ ਸਮ}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ 16 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 12 ਸਮ ਹੈ। ਇਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $h = 16$ ਸਮ ਅਤੇ $r = 12$ ਸਮ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $l^2 = h^2 + r^2$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ ਸਮ} = 20 \text{ ਸਮ}$$

ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ ਸਮ}^2$$

$$= 753.6 \text{ ਸਮ}^2$$

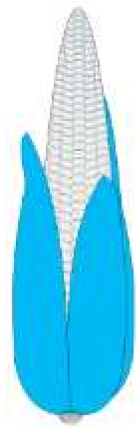
ਨਾਲ ਹੀ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ ਸਮ}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ ਸਮ}^2$$

$$= 1205.76 \text{ ਸਮ}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਛੱਲੀ ਦਾ ਗੁੱਲ ਕੁੱਝ-ਕੁੱਝ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਜਿਹੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.5)। ਇਸ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਚੋੜੇ ਸਿਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2.1 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ (ਉਚਾਈ) 20 ਸਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ ਦੀ ਹਰੇਕ 1 ਸਮ² ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਔਸਤਨ ਚਾਰ ਦਾਣੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪੂਰੇ ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ 'ਤੇ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਦਾਣੇ ਹਨ ?



ਚਿੱਤਰ 11.5

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ ਤੇ ਦਾਣੇ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਤੇ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਾਣਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਛੱਲੀ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ।

ਹੁਣ, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ ਸਮ

$$= \sqrt{404.41} \text{ ਸਮ} = 20.11 \text{ ਸਮ}$$

ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ ਸਮ}^2 = 132.726 \text{ ਸਮ}^2 = 132.73 \text{ ਸਮ}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਹੁਣ 1 ਸਮ² ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਦਾਣਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 4$

ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ 'ਤੇ ਦਾਣਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (ਲਗਭਗ)

ਇਸ ਲਈ, ਛੱਲੀ ਦੇ ਗੁੱਲ 'ਤੇ ਲਗਭਗ 531 ਦਾਣੇ ਹੋਣਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 11.1

[ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।]

1. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 10.5 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 10 ਸਮ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 21 ਮੀ. ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 24 ਮੀ. ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਰਕ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 308 ਸਮ^2 ਹੈ, ਇਸ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 14 ਸਮ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (ii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
4. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਤੰਬੂ 10 ਮੀ. ਉੱਚਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 24 ਮੀ. ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ

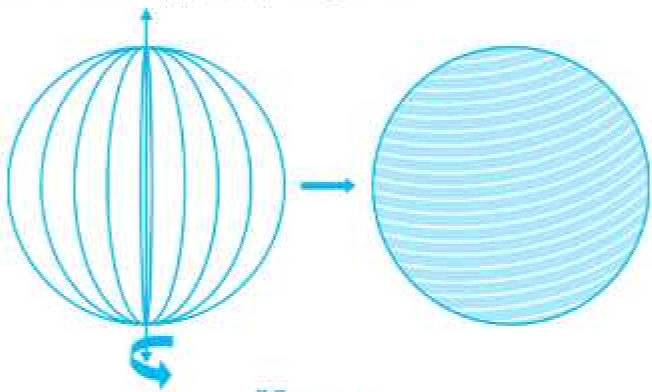
   (i) ਤੰਬੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ

   (ii) ਤੰਬੂ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਤਰਪਾਲ (canvas) ਦੀ ਲਾਗਤ, ਜੇਕਰ 1 ਮੀ.^{2} ਤਰਪਾਲ ਦੀ ਕੀਮਤ ₹70 ਹੈ।
5. 8 ਮੀ. ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 ਮੀ. ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਤੰਬੂ ਬਨਾਉਣ ਲਈ 3 ਮੀ. ਚੌੜੇ ਤਰਪਾਲ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਲੰਬਾਈ ਲੱਗੇਗੀ ? ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲੋ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਸਿਲਾਈ ਅਤੇ ਕਟਾਈ ਵਿੱਚ 20 ਸਮ ਤਰਪਾਲ ਫਾਲਤੂ ਲੱਗੇਗਾ। ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)
6. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਮਕਬਰੇ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 25 ਮੀ. ਅਤੇ 14ਮੀ. ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ₹210 ਪ੍ਰਤੀ 100 ਮੀ.^{2} ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਸਫੇਦੀ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਜੋਕਰ ਦੀ ਟੋਪੀ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੀ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਸਮ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 24 ਸਮ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 10 ਟੋਪੀਆਂ ਬਨਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੱਤੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਕਿਸੇ ਬੱਸ ਸਟਾਪ ਨੂੰ ਪੁਰਾਣੇ ਗੱਤੇ ਤੋਂ ਬਣੇ 50 ਖੋਖਲੇ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੜਕ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 40 ਸਮ ਹੈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 1 m ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਰੰਗ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ₹12 ਪ੍ਰਤੀ m^2 ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{1.04} = 1.02$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)

11.2 ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ

ਇੱਕ ਗੋਲਾ (sphere) ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਕਾਗਜ 'ਤੇ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਬੰਦ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਹੈ। ਜਿਸ

ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (ਜਿਸਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)। ਤੋਂ ਇੱਕ ਨਿਸਚਿਤ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਜਿਸਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਕਤੀ (disc) ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਡੋਰੀ ਚਿਪਕਾ ਦਿਓ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘੁਮਾਓ ਜਿਵੇਂ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਘੁਮਾਇਆ ਸੀ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਠੋਸ ਦੇਖੋਂਗੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.6)। ਇਹ ਕਿਸ ਵਸਤੂ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਜੁਲਦਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ? ਇੱਕ ਗੇਂਦ ? ਹਾਂ, ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਗੋਲਾ **(sphere)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.6

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਸ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਕੀ ਬਣਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਘੁਮਾਇਆ ਹੈ। ਬਿਨਾ ਸ਼ੱਕ, ਇਹ ਗੋਲੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੋਲਾ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ (*three dimensional figure*) ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਹੈ, ਜੋ ਖਲਾਅ (*space*) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (ਜੋ ਗੋਲੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ) ਤੋਂ ਇੱਕ ਅਚਲ ਜਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਜੋ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।)।

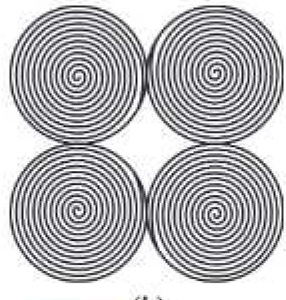
ਟਿੱਪਣੀ : ਗੋਲਾ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸ਼ਬਦ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਉਸ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਇੱਕ ਗੋਲਾ ਹੋਵੇ।

ਕਿਰਿਆ : ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਦੇ ਲਾਟੂ ਦੇ ਨਾਲ ਖੇਡੇ ਹੋ ? ਕਦੇ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਿਆਕਤੀ ਨੂੰ ਲਾਟੂ ਨਾਲ ਖੇਡਦੇ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ?ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹੋਵੋਂਗੇ ਕਿ ਉਸ ਉੱਤੇ ਡੋਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਪੇਟੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ, ਇੱਕ ਰਬੜ ਦੀ ਗੇਂਦ ਲਉ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਉਪਰ ਇੱਕ ਕਿੱਲ ਲਗਾਉ। ਕਿੱਲ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਗੇਂਦ ਉੱਤੇ ਡੋਰੀ ਨੂੰ ਲਪੇਟਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋ ਤਾਂ ਡੋਰੀ ਨੂੰ ਜਕੜੇ ਰਹਿਣ ਲਈ, ਪਿੰਨ ਵਿੱਚ-ਵਿੱਚ ਲਗਾਂਦੇ ਰਹੋ ਅਤੇ ਉਦੋਂ ਤਕ ਡੋਰੀ ਲਪੇਟਦੇ ਰਹੋ ਜਦੋਂ ਤਕ ਪੂਰੀ ਗੇਂਦ ਉੱਤੇ ਡੋਰੀ ਲਪੇਟੀ ਨਾ ਜਾਵੇ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.7(a)]। ਡੋਰੀ 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕਰ ਲਵੋ ਅਤੇ ਹੌਲੀ ਹੌਲੀ ਗੇਂਦ ਤੋਂ ਡੋਰੀ ਹਟਾ ਦਿਓ।

ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਅਧਿਆਪਕ ਨੂੰ ਗੇਂਦ ਦਾ ਵਿਆਸ ਮਾਪਣ ਲਈ ਸਹਾਇਤਾ ਦੇਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਇਸ ਤੋਂ ਗੇਂਦਾ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ, ਕਾਗਜ਼ ਉਪਰ ਗੇਂਦ ਦੇ ਅਰਧ

ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ ਜੋ ਡੋਰੀ ਤੁਸੀਂ ਗੇਂਦ ਉੱਤੇ ਲਪੇਟੀ ਸੀ ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਇੰਨ੍ਹਾ ਚੱਕਰਾਂ ਤੇ ਰੱਖ ਕੇ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.7(b)]।


(a)


(b)

ਚਿੱਤਰ 11.7

ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਉਹ ਡੋਰੀ ਜਿਸਨੇ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਢੱਕ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਹੁਣ ਉਸੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਭਰ ਰਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੋਇਆ? ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸੁਝਾਓ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

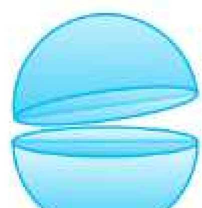
= ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4 \times (\pi r^2)$

ਇਸ ਲਈ, **ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4 \pi r^2$**

ਜਿੱਥੇ r ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਕਿੰਨੇ ਫਲਕ ਦੇਖਦੇ ਹੋ? ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਇਹ ਵਕਰੀ ਹੈ।

ਆਓ ਇੱਕ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹੋਏ ਤੱਲ ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟ ਲਵੋ। ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਇਹ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.8)। ਹਰੇਕ ਅੱਧਾ ਭਾਗ ਕੀ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ **(hemisphere)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਕਿਉਂਕਿ hemi ਦਾ ਅਰਥ 'ਅੱਧਾ' ਹੈ।)


ਚਿੱਤਰ 11.8

ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਦੇ ਕਿੰਨੇ ਫਲਕ ਹਨ?

ਦੋ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਕਰੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਫਲਕ ਹੈ (ਆਧਾਰ)।

ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਕਰੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਅੱਧਾ,

ਅਰਥਾਤ $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, **ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2\pi r^2$**

ਜਿੱਥੇ r ਉਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੈ। ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2\pi r^2 + \pi r^2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, **ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $3\pi r^2$**

ਉਦਾਹਰਣ 4 : 7 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 7 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ ਸਮ}^2 = 616 \text{ ਸਮ}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21 ਸਮ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (ii) ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੱਲ : (i) ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21 ਸਮ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ ਸਮ}^2 = 2772 \text{ ਸਮ}^2$$

(ii) ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ ਸਮ}^2 = 4158 \text{ ਸਮ}^2$$

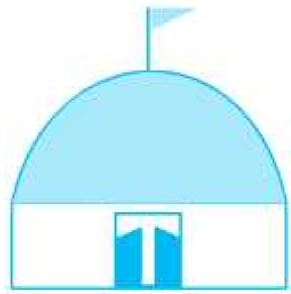
ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸਰਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੋਟਰ ਸਾਇਕਲ ਸਵਾਰ ਜਿਸ ਖੋਖਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਅਪਣੇ ਕਰਤਬ (ਖੇਡ) ਦਿਖਾਉਂਦਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਵਿਆਸ 7 ਮੀ. ਹੈ। ਮੋਟਰ ਸਾਇਕਲ ਸਵਾਰ ਦੇ ਕੋਲ ਇਹ ਕਰਤਬ ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਪਲੱਬਧ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ = 7 ਮੀ. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 ਮੀ. ਹੋਇਆ। ਹੁਣ ਕਰਤਬ ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਮੋਟਰ ਸਾਇਕਲ ਸਵਾਰ ਕੋਲ ਉਪਲਬੱਧ ਥਾਂ ਇਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

$$\text{ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ ਮੀ.}^2 = 154 \text{ ਮੀ.}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਕਿਸੇ ਭਵਨ ਦਾ ਉਪਰੀ ਭਾਗ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਰੰਗ ਰੋਗਨ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.9)। ਜੇਕਰ ਇਸ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 17.6 ਮੀ. ਹੈ, ਤਾਂ ₹ 5 ਪ੍ਰਤੀ 100 ਸਮ² ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ ਗੋਲਾਕਾਰ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਹੀ ਰੰਗ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.9

ਹੁਣ, ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = 17.6 ਮੀ. ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $2\pi r = 17.6$

ਅਰਥਾਤ, $r = \frac{17.6\times7}{2\times22}$ ਮੀ. = 2.8 ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਭਵਨ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ ਮੀ².

= 49.28 ਮੀ².

ਹੁਣ, 100 ਸਮ² ਰੰਗ ਕਰਨ ਦਾ ਖਰਚ = ₹5

ਇਸ ਲਈ, 1ਮੀ². ਰੰਗ ਕਰਨ ਦਾ ਖਰਚ = ₹500

ਇਸ ਲਈ 49.28 ਮੀ². ਰੰਗ ਕਰਨ ਦੀ ਲਾਗਤ = ₹500 × ₹49.28 = ₹24640

ਅਭਿਆਸ 11.2

[ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਵੋ।]

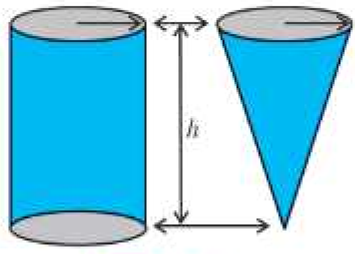
1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 10.5 ਸਮ (ii) 5.6 ਸਮ (iii) 14 ਸਮ
2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦਾ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : :
   (i) 14 ਸਮ (ii) 21 ਸਮ (iii) 3.5 ਮੀ.
3. 10 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$।)
4. ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਗੁਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਭਰਨ 'ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਸਮ ਤੋਂ 14 ਸਮ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਗੁਬਾਰੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਪਿੱਤਲ ਦੇ ਬਣੇ ਇਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕਟੋਰੇ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ 10.5 ਸਮ ਹੈ। ₹16 ਪ੍ਰਤੀ 100 ਸਮ² ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਕਲੱਈ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਉਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 154 ਸਮ^2 ਹੈ।
7. ਚੰਦ ਦਾ ਵਿਆਸ ਧਰਤੀ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕਟੋਰਾ 0.25 ਸਮ ਮੋਟੀ ਸਟੀਲ ਦਾ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਟੋਰੇ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 ਸਮ ਹੈ। ਕਟੋਰੇ ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਬੇਲਨ ਨੇ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘੇਰਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.10)। ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ
   (ii) ਬੇਲਨ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
   (iii) ਉਪਰ (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ


ਚਿੱਤਰ 11.10

11.3 ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਚਿੱਤਰ 11.11 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਆਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਬੇਲਨ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 11.11

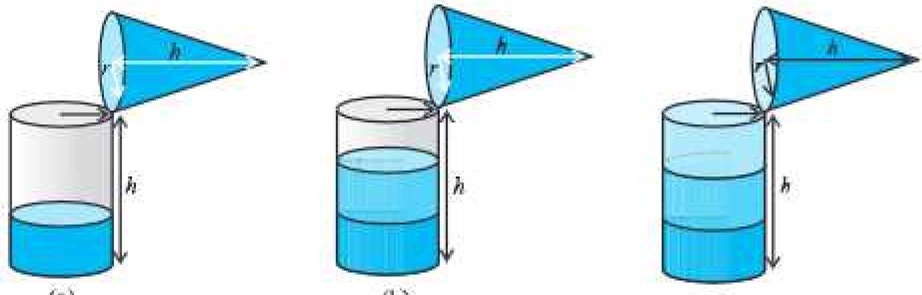
ਕਿਰਿਆ : ਉਪਰੋਕਤ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੀ ਤਰਾਂ ਹੀ, ਇੱਕ ਹੀ ਆਧਾਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਉਚਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਖੋਖਲਾ ਬੇਲਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਖੋਖਲਾ ਸ਼ੰਕੂ ਬਨਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.11)। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕੀ ਹੈ ?

ਆਓ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਰੇਤ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਉਪਰ ਤੱਕ ਭਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਰੇਤ ਨੂੰ ਬੇਲਨ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿਉ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਨਾਲ ਬੇਲਨ ਦਾ ਕੁੱਝ ਹਿੱਸਾ ਭਰ ਗਿਆ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਆਕ੍ਰਿਤੀ 11.12 (a)]।

ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਰੇਤ ਨਾਲ ਭਰ ਕੇ ਬੇਲਨ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੇਲਨ ਅਜੇ ਤੱਕ ਪੂਰਾ ਨਹੀਂ ਭਰਿਆ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 11.12(b)]।

ਹੁਣ ਸ਼ੰਕੂ ਤੀਜੀ ਵਾਰ ਰੇਤ ਨਾਲ ਭਰ ਕੇ ਬੇਲਨ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿਉ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੇਲਨ ਪੂਰਾ ਰੇਤ ਨਾਲ ਭਰ ਗਿਆ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.12(c)]।



ਚਿੱਤਰ 11.12

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਬੇਲਨ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਬੇਲਨ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਣ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਵੀ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਬੇਲਨ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,

$$\boxed{\textbf{ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

ਜਿੱਥੇ r ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ h ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਕਿਸੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 21 ਸਮ ਅਤੇ 28 ਸਮ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $l^2 = r^2 + h^2$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ ਸਮ} = 7\sqrt{7} \text{ ਸਮ}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ ਸਮ^3

$= 7546$ ਸਮ^3

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਮੋਨਿਕਾ ਕੋਲ ਇੱਕ ਤਰਪਾਲ ਦਾ ਇੱਕ ਟੁਕੜਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 551 ਮੀ^{2}. ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਤੋਂ 7 ਮੀ. ਆਧਾਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਤੰਬੂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਿਲਾਈ ਅਤੇ ਕਟਾਈ ਵਿੱਚ 1 ਮੀ^{2}. ਤਰਪਾਲ ਨਸ਼ਟ ਹੋ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਤੰਬੂ (ਸ਼ੰਕੂ) ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤਰਪਾਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 551 ਮੀ^{2}. ਹੈ ਅਤੇ 1 ਮੀ^{2}. ਤਰਪਾਲ ਸਿਲਾਈ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਨਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਤੰਬੂ ਲਈ ਉਪਲੱਬਧ ਤਰਪਾਲ = (551 – 1) ਮੀ². = 550 ਮੀ².

ਇਸ ਲਈ, ਤੰਬੂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 550 ਮੀ².

ਤੰਬੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = 7 ਮੀ.

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੰਬੂ ਦੀ ਸਿਰਫ਼ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਹੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਤੰਬੂ ਦੇ ਫਰਸ਼ ਨੂੰ ਢੱਕਿਆ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦਾ)।

ਇਸ ਲਈ, ਤੰਬੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 550 ਮੀ².

ਅਰਥਾਤ, $\pi r l = 550$

ਜਾਂ, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

ਜਾਂ, $l = \frac{550}{22}$ ਮੀ. = 25 ਮੀ.

ਹੁਣ, $l^2 = r^2 + h^2$

ਇਸ ਲਈ, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}\text{ m} = \sqrt{625 - 49}\text{ m} = \sqrt{576}\text{ m}$

= 24 ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਤੰਬੂ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$ = 1232 ਮੀ³

ਅਭਿਆਸ 11.3

[ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।]

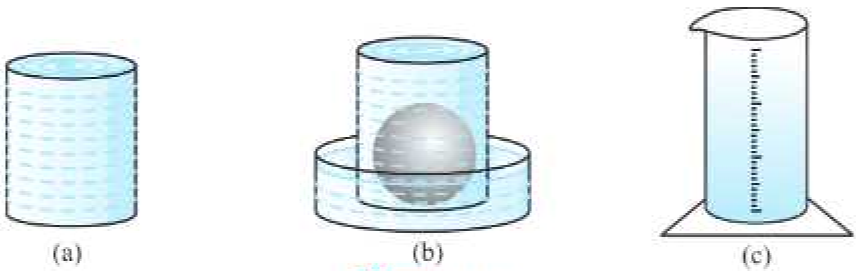
1. ਉਸ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦਾ
   (i) ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 ਸਮ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 7 ਸਮ ਹੈ।
   (ii) ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 ਸਮ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 12 ਸਮ ਹੈ।
2. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਉਸ ਬਰਤਨ ਦੀ ਲਿਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮਰਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ/ਦੀ
   (i) ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਸਮ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 25 ਸਮ ਹੈ।
   (ii) ਉਚਾਈ 12 ਸਮ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ 13 ਸਮ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ 15 ਸਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਆਇਤਨ 1570 ਸਮ³ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਲਵੋ)।
4. ਜੇਕਰ 9 ਸਮ ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਇਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ 48π ਸਮ³ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਉੱਪਰੀ ਵਿਆਸ 3.5 m ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਖੱਡਾ 12 ਮੀ. ਡੂੰਘਾ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਸਮਰਥਾ ਕਿਲੋਲਿਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਹੈ।

6. ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ 9856 ਸਮ^3 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 28 ਸਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ (ii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ
   (iii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
7. ਭੁਜਾਵਾਂ 5 ਸਮ, 12 ਸਮ ਅਤੇ 13 ਸਮ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਨੂੰ ਭੁਜਾ 12 ਸਮ ਭੁਜਾ ਦੁਆਲੇ ਘੁਮਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਨੂੰ ਭੁਜਾ 5 ਸਮ ਦੇ ਦੁਆਲੇ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਏ ਤਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਕਣਕ ਦੀ ਇੱਕ ਢੇਰੀ 10.5 ਮੀ. ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 3 ਮੀ. ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਢੇਰੀ ਨੂੰ ਮੀਂਹ ਤੋਂ ਬਚਾਉਣ ਲਈ ਤਰਪਾਲ ਨਾਲ ਢੱਕਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਲੋੜੀਂਦੀ ਤਰਪਾਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11.4 ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਵੇਂ ਮਾਪਿਆ ਜਾਵੇ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਗੋਲੇ ਲਵੋ। ਫੇਰ ਇੱਕ ਬਰਤਨ ਲਵੋ, ਜਿਸਦੇ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਗੋਲਿਆਂ ਨੂੰ (ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਵਿੱਚ) ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਟੱਬ ਲਵੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਹੁਣ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਉੱਪਰ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.13(a)]।

ਹੁਣ ਲਏ ਗਏ ਗੋਲਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਪਾ ਦਿਓ। ਬਰਤਨ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਪਾਣੀ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਕੇ ਟੱਬ ਵਿੱਚ ਚਲਾ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਬਰਤਨ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.3(b)]। ਹੁਣ ਟੱਬ ਵਿੱਚ ਆਏ ਇਸ ਪਾਣੀ ਨੂੰ ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮਾਪਣ ਵਾਲੇ ਬੇਲਣ [ਅਰਥਾਤ ਅੰਸ਼ ਅੰਕਿਤ ਬੇਲਣਕਾਰ ਗਿਲਾਸ (graduated cylindrical jar)] ਵਿੱਚ ਪਾਓ। ਮੰਨ ਲਉ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਡਬੋਏ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ (ਤੁਸੀਂ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ ਮਾਪ ਕੇ ਉਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ)। ਹੁਣ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਮੁੱਲ ਬਰਤਨ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 11.13

ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਇਸੇ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦਾ ਗੋਲਾ ਲੈ ਕੇ ਦੁਹਰਾਓ। ਇਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਪਤਾ ਕਰਕੇ $\frac{4}{3}\pi R^3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫੇਰ ਇਹ ਮੁੱਲ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚੋਂ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ? ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਹਟਾਏ ਗਏ ਪਾਣੀ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਗੋਲੇ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਘਣ ਦਾ $\frac{4}{3}\pi$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਸੁਝਾਅ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

ਜਿੱਥੇ r ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਅਗਲੀਆਂ ਉੱਚ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਹਾਂ, ਇਹ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ਦਾ $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$ ਹੈ ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

ਜਿੱਥੇ r ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਆਓ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ

ਉਦਾਹਰਣ 10 : 11.2 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2 \text{ ਸਮ}^3 = 5887.32 \text{ ਸਮ}^3$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਸ਼ਾਟ-ਪੁੱਟ (shot-putt) 4.9 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਧਾਤੂ ਦਾ ਗੋਲਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਧਾਤੂ ਦੀ ਘਣਤਾ (density) 7.8 ਗਰਾਮ ਪ੍ਰਤੀ ਸਮ^3 ਹੈ, ਤਾਂ ਸ਼ਾਟ ਪੁੱਟ ਦੀ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸ਼ਾਟ-ਪੁੱਟ (shot-putt) ਧਾਤੂ ਦਾ ਇੱਕ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਘਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸ਼ਾਟ-ਪੁੱਟ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$= 493$ ਸਮ^3 (ਲਗਭਗ)

ਨਾਲ ਹੀ, 1 ਸਮ^3 ਧਾਤੂ ਦਾ ਪੁੰਜ = 7.8 ਗ੍ਰਾਮ

ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਾਟ-ਪੁੱਟ ਦਾ ਪੁੰਜ = 7.8 × 493 ਗ੍ਰਾਮ

= 3845.44 ਗ੍ਰਾਮ = 3.85 ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ (ਲਗਭਗ)

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕਟੋਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 ਸਮ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਟੋਰੇ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ ਸਮ}^3 = 89.8 \text{ ਸਮ}^3$$

ਅਭਿਆਸ 11.4

[ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਉ।]

1. ਉਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

   (i) 7 ਸਮ (ii) 0.63 ਮੀ.

2. ਉਸ ਠੋਸ ਗੋਲਾਕਾਰ ਗੇਂਦ ਦੁਆਰਾ ਹਟਾਏ ਗਏ (ਵਿਸਥਾਪਿਤ) ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਆਸ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

   (i) 28 ਸਮ (ii) 0.21 ਮੀ.

3. ਧਾਤੂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦਾ ਵਿਆਸ 4.2 ਸਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਧਾਤੂ ਦੀ ਘਣਤਾ 8.9 ਗ੍ਰਾਮ ਪ੍ਰਤੀ ਸਮ^3 ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਗੇਂਦ ਦਾ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਚੰਨ ਦਾ ਵਿਆਸ, ਧਰਤੀ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦਾ ਲੱਗਭਗ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਹੈ। ਚੰਨ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਧਰਤੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਦੀ ਕਿਹੜੀ ਭਿੰਨ ਹੈ।

5. ਵਿਆਸ 10.5 ਸਮ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕਟੋਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

6. ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ 1 ਸਮ ਮੋਟੀ ਇੱਕ ਲੋਹੇ ਦੀ ਚਾਦਰ (sheet) ਤੋਂ ਬਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ

ਇਸ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਮੀ. ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਬਨਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੇ ਲੋਹੇ ਦਾ ਘਣਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਉਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਘਣਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ 154 ਸਮ^2 ਹੈ।

8. ਕਿਸੇ ਭਵਨ ਦਾ ਗੁੰਬਦ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਅੰਦਰ ਤੋਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਫੇਦੀ ਕਰਵਾਉਣ ਲਈ ₹498.96 ਖਰਚ ਹੋਏ। ਜੇਕਰ ਸਫੇਦੀ ਕਰਵਾਉਣ ਦੀ ਦਰ ₹ 2 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਗੁੰਬਦ ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

(ii) ਗੁੰਬਦ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ

9. ਲੋਹੇ ਦੇ 27 ਠੋਸ ਗੋਲਿਆਂ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾ ਕੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ। ਅਤੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ, ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਗੋਲਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ S' ਹੈ? ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਨਵੇਂ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r' (ii) S ਅਤੇ S' ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ

10. ਦਵਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਕੈਪਸੂਲ (capsule) 3.5 ਮਿ.ਮੀ. ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਗੋਲਾ (ਗੋਲੀ) ਹੈ। ਇਸ ਕੈਪਸੂਲ ਨੂੰ ਭਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਦਵਾਈ (ਮਿ.ਮੀ.^{3} ਵਿੱਚ)ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ ?

11.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πrl
2. ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\pi rl + \pi r^2$, ਜਾਂ $\pi r\,(l + r)$
3. ਗੋਲੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $4\,\pi\, r^2$
4. ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2\pi r^2$
5. ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $3\pi r^2$
6. ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ/ਘਣਫਲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$
8. ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

[ਇੱਥੇ ਅਖਰਾਂ l, h, r ਆਦਿ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਆਪਣੇ ਸੰਦਰਭ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਸਧਾਰਣ ਅਰਥਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।]

B9D2H5

ਅਧਿਆਇ 12

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ

12.1 ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ

ਸਾਰਣੀਆਂ ਨਾਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਹੁਣ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਹੋਰ ਨਿਰੂਪਣ ਅਰਥਾਤ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ (graphical representation) ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਆਪਣਾ ਧਿਆਨ ਕੇਂਦਰਿਤ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਖੌਤ ਵੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਹਜਾਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨਾਲੋਂ ਉੱਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਅਕਸਰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਾਂ ਦੀ (graphs) ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਵਾਤਸਵਿਕ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਨਿਰੂਪਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਅਧਿਕ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

(A) ਛੜ ਚਾਰਟ / ਗ੍ਰਾਫ (Bar Graph)

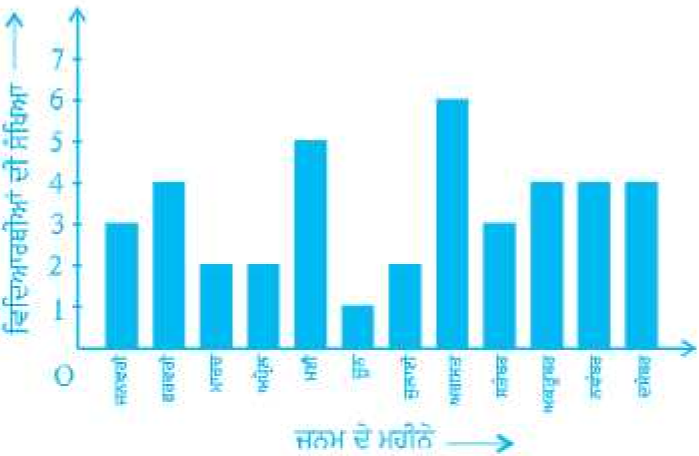
(B) ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਪਰਿਵਰਤੀ ਚੌੜਾਈਆਂ ਵਾਲੇ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (Histograms)

(C) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ (Frequency Polygons)

(A) ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾ ਵੀ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਪਚਾਰਿਕ ਪਹੁੰਚ ਰਾਹੀਂ ਇਹਨਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਚਿੱਤਰ ਨਿਰੂਪਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਧੁਰੇ (ਮੰਨ ਲਓ x-ਧੁਰਾ) 'ਤੇ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਛੜ ਖਿੱਚੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਬਰਾਬਰ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਛੱਡੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੂਜੇ ਧੁਰੇ (ਮੰਨ ਲਓ y-ਧੁਰੇ) 'ਤੇ ਦਰਸਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਛੜਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈਆਂ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦਾ ਮਹੀਨਾ ਦੱਸਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਆਲੇਖ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.1

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

(i) ਨਵੰਬਰ ਮਹੀਨੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਹੋਇਆ ?

(ii) ਕਿਸ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਹੋਇਆ ?

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਚਲ 'ਜਨਮ ਦਿਨ ਦਾ ਮਹੀਨਾ' ਹੈ ਅਤੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਨਮ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ" ਹੈ।

(i) ਨਵੰਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ 4 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਹੋਇਆ।

(ii) ਅਗਸਤ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਹੋਇਆ।

ਆਓ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੁੜ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਕਿ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਵੇਂ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੇ ਜਿਸ ਦੀ ਮਹੀਨੇਵਾਰ ਆਮਦਨ 20000 ਰੁਪਏ ਹੈ, ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮੱਦਾਂ 'ਤੇ ਹਰ ਮਹੀਨੇ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਖਰਚ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਈ ਸੀ :

ਸਾਰਣੀ 12.1

ਮੱਦ	ਖਰਚ (ਹਜਾਰ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)
ਗ੍ਰਾਸਰੀ (ਪਰਚੂਨ ਦਾ ਸਮਾਨ)	4
ਕਿਰਾਇਆ	5
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸਿੱਖਿਆ	5
ਦਵਾਈਆਂ	2
ਬਾਲਣ	2
ਮਨੋਰੰਜਨ	1
ਫੁੱਟਕਲ	1

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਬਣਾਓ।

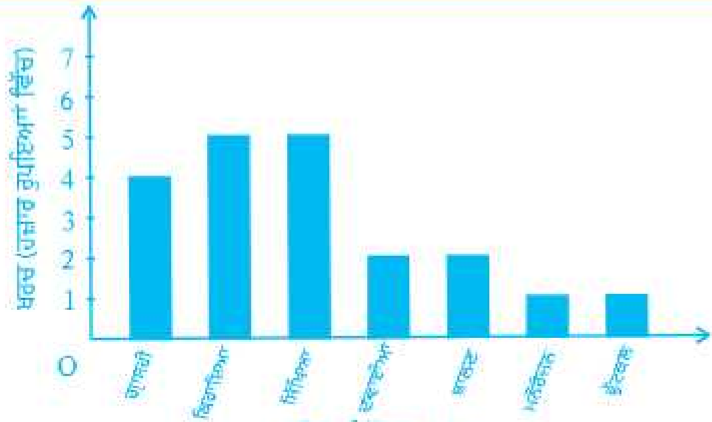
ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੂਜੇ ਕੱਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਇਕਾਈ (unit) 'ਹਜਾਰ ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ' ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਚੂਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਖਿਆ ਅੰਕ 4 ਦਾ ਅਰਥ ₹4000 ਹੈ।

1. ਕੋਈ ਵੀ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ (scale) ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮੱਦਾਂ (ਚਲ) ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਛੜ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦਾ ਕੋਈ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਪਰੰਤੂ ਸਪਸ਼ਟਤਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਛੜ ਸਮਾਨ ਚੋੜਾਈ ਦੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਬਣਾਈ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇੱਕ ਮਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

2. ਅਸੀਂ ਖਰਚ (ਮੁੱਲ) ਨੂੰ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਖਰਚ ₹5000 ਰੁ: ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪੈਮਾਨਾ 1 ਇਕਾਈ = ₹1000 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

3. ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਮੱਦ ਅਰਥਾਤ ਪਰਚੂਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀ 1 ਇਕਾਈ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ 4 ਇਕਾਈ ਉਚਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਛੜ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

4. ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਛੜਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ 1 ਇਕਾਈ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਮੱਦਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.2)।



ਮੱਦ (ਚਿੱਤਰ 12.2)

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਨਜ਼ਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਲੱਛਣਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਚੂਨ ਦੇ ਸਮਾਨ 'ਤੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਖਰਚ ਦਵਾਈਆਂ ਤੇ ਕੀਤੇ ਖਰਚ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਅਰਥਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰਣੀ ਰੂਪ ਦੀ ਬਜਾਏ ਇਹ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਉੱਤਮ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ 3 : ਕਿਰਿਆ 1 ਦੇ ਚਾਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫਾਂ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਲਗਾਤਾਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(B) ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ

ਇਹ ਲਗਾਤਾਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੂਪਣ ਦਾ ਇੱਕ ਰੂਪ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ 12.2 ਲਵੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 36 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਭਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 12.2

ਭਾਰ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਵਿੱਚ)	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
ਕੁਲ ਜੋੜ	36

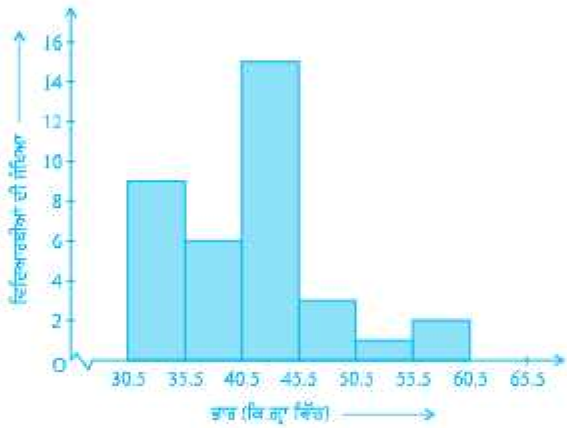
ਆਓ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੀਏ

(i) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ ਭਾਰ ਨੂੰ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ ਤੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪੈਮਾਨਾ 1 ਸਮ - 5 ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਨਾਲ ਹੀ, ਪਹਿਲਾ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 30.5 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਸਿਫਰ ਤੋਂ, ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਵਲਦਾਰ (kink) ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਣਾ ਕੇ ਜਾਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਪਾੜ ਦਿਖਾਕੇ, ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਲੋੜੀਦੇ ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ) ਨੂੰ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 15 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਪੈਮਾਨੇ ਨੂੰ ਚੁਣਨਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਿ ਉਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਆ ਸਕੇ।

(iii) ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬਾਈਆਂ ਮੰਨ ਕੇ ਆਇਤ (ਜਾਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਛੜ) ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 30.5–35.5 ਦਾ ਆਇਤ 1 ਸਮ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ 4.5 ਸਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲਾ ਆਇਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਜੋ ਗ੍ਰਾਫ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.3 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.3

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ, ਕਿਉਂਕਿ ਲਗਾਤਾਰ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮੀ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ। ਇਸ ਆਲੇਖ ਨੂੰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (histogram) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਨਿਰੰਤਰ ਵਰਗਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਨਾਲ ਹੀ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਉਲਟ ਇਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਵਿੱਚ ਛੜ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਭੂਮਿਕਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਥੇ ਖੜੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਦੀਆਂ ਚੌੜਾਈਆਂ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸੇ ਕਾਰਣ ਅਸੀਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਉੱਪਰ (iii) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

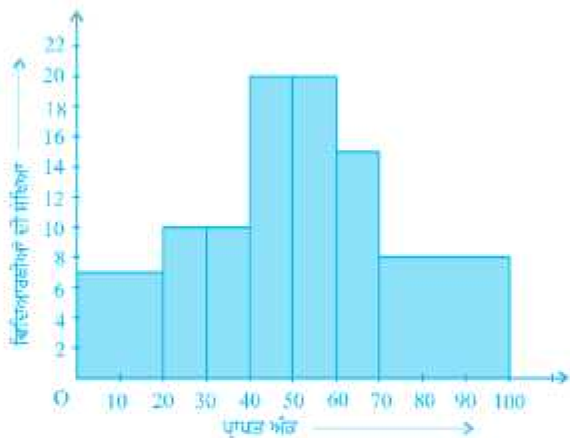
ਹੁਣ ਪਿੱਛੇ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਅਧਿਆਪਕ ਦੋ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ 100 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਲੈ ਕੇ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਵੇਖਕੇ ਉਹ ਦੇਖਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਹੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅੰਕ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ 70 ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਉਸ ਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ 0 - 20. 20 - 30. . . .. 60 - 70. 70 - 100 ਵਰਗੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਫੈਸਲਾ ਲਿਆ। ਤਦ ਉਸਨੇ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈ

ਸਾਰਣੀ 12.3

ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਅਧਿਕ	8
ਕੁੱਲ ਜੋੜ	90

ਕਿਸੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਇਆ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.4

ਇਸ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਅਲੇਖ ਅੰਕੜਿਆ ਦਾ ਸਹੀ ਸਹੀ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਹੈ : ਨਹੀ। ਇਹ ਆਲੇਖ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਗਲਤ ਚਿੱਤਰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਪੈਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋਏ ਸਨ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਸਮਾਨ ਸੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਬਦਲ ਰਹੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤਾ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਹੀ-ਸਹੀ ਚਿੱਤਰ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 60–70 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 70–100 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਧਿਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਖੇਤਰਫਲ ਫਿਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਵੇ

ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਗ ਲਾਗੂ ਕਰਨੇ ਪੈਣਗੇ।

1. ਨਿਊਨਤਮ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਵੋ। ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਵਰਗ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 10 ਹੈ।
2. ਤਦ ਆਇਤਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਵਰਗ ਚੌੜਾਈ 10 ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਚੌੜਾਈ 20 ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 7 ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 10 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ ਹੋਵੇਗੀ।

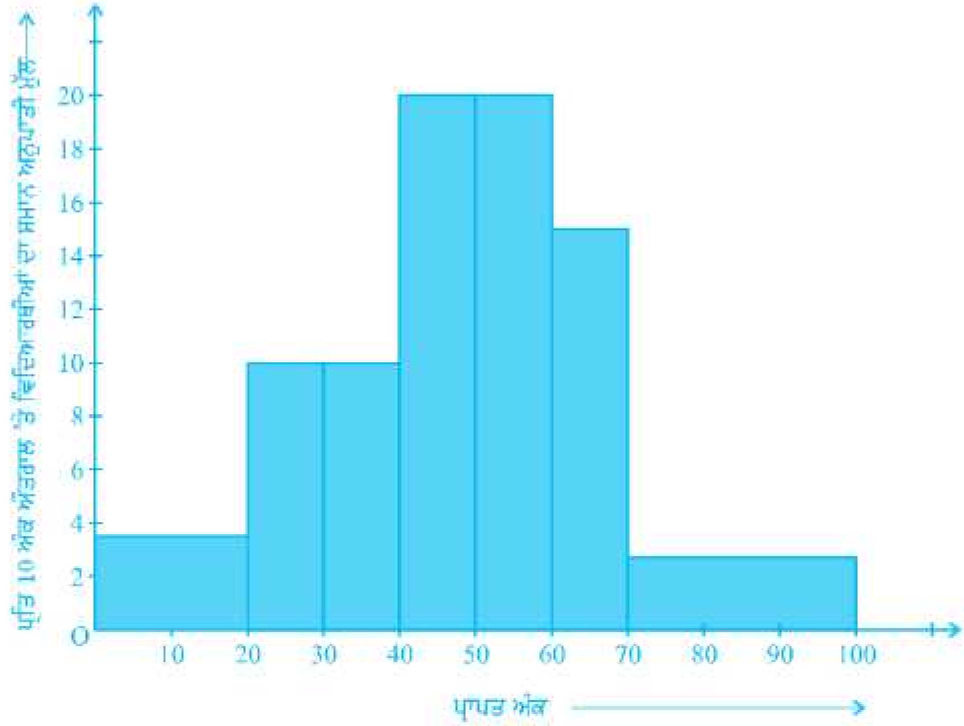
ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 12.4

ਅੰਕ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਵਰਗ ਦੀ ਚੌੜਾਈ	ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 -100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 10 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਨੂੰ 'ਪ੍ਰਤੀ 10 ਅੰਕ ਅੰਤਰਾਲ 'ਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤੀ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਵਰਤੀ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲਾ ਸਮਾਨ ਸਹੀ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ।

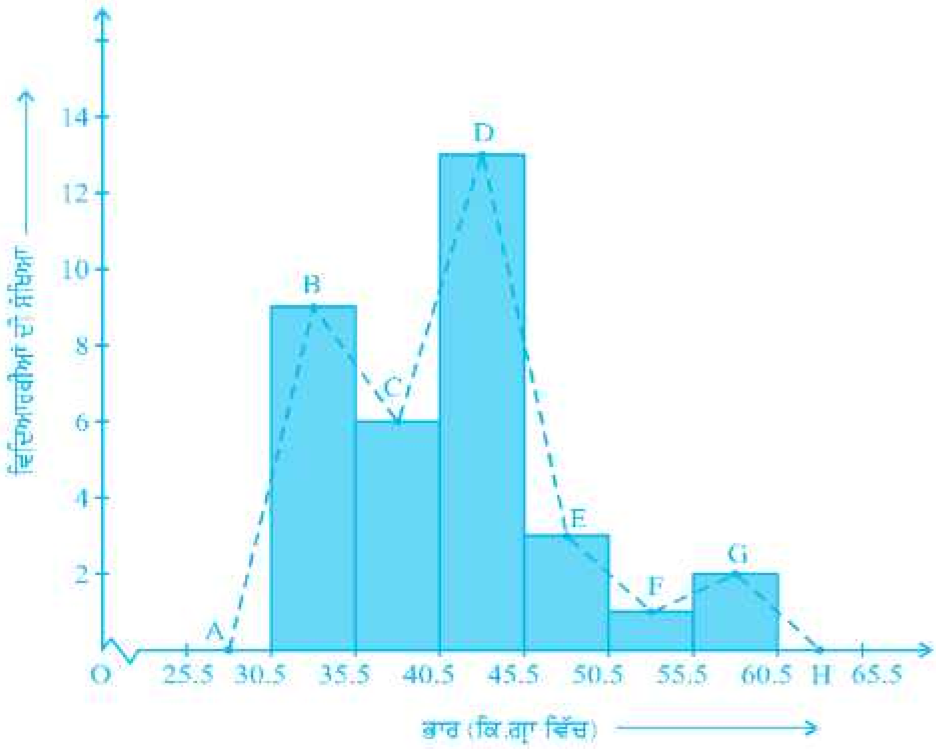


ਚਿੱਤਰ 12.5

(C) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ

ਗਿਣਨਾਤਮਕ ਅੰਕੜਿਆਂ (quantitative data) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੈ। ਉਹ ਹੈ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ (polygon)। ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਅਰਥ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 12.3 ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਲਵੋ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਸ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਉੱਪਰੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦੇਈਏ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ B, C, D, E, F ਅਤੇ G ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰੀਏ। ਜਦੋਂ ਇਹਨਾਂ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾ ਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਜੋੜ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਆਕ੍ਰਿਤੀ BCDEFG (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.6) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 30.5–35.5 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ 55.5–60.5 ਦੇ ਬਾਅਦ ਸਿਫ਼ਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ

ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ H ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ABCDEFGH (frequency polygon) ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 12.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਵਰਗ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਵਰਗ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੋਈ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲੇ ਦੋ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਵਧਾ ਦੇਣ ਨਾਲ ਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਉਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ ? (**ਸੰਕੇਤ** : ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਾਲੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।)

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੋਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਪੂਰਾ ਕਰੀਏ ? ਆਓ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਲਈਏ ਅਤੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

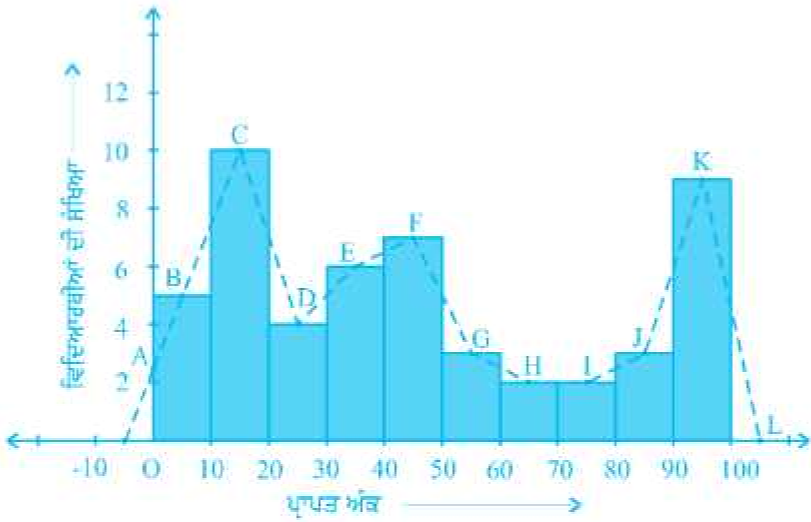
ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 51 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ 100 ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕ ਸਾਰਣੀ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਸਾਰਣੀ 12.5

ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
ਕੁਲ ਜੋੜ	51

ਇਸ ਬਾਰੰਬਾਤਰਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ : ਆਓ, ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਈਏ ਅਤੇ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਉੱਪਰੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰੀਏ। ਇੱਥੇ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 0–10 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 0–10 ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ, ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ (0–10) ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ (end point), ਭਾਵ B ਨੂੰ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲੇ ਇਸ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜਿੱਥੇ ਇਹ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ A ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ L ਹੈ। ਤਦ OABCDEFGHIJKL ਲੋੜੀਂਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.7

ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਏ ਬਿਨਾਂ ਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਸੁਤੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗ-ਚਿੰਨ੍ਹ **(class-marks)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਸੀਮਾ (upper limit) ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ (lower limit) ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਜੋੜ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\textbf{ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ} = \frac{\text{ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ + ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ}}{2}$$

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਇੱਕ ਨਗਰ ਵਿੱਚ ਨਿਰਵਾਹ ਖਰਚ ਸੂਚਕ ਅੰਕ (cost of living index) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਫਤੇ ਵਾਰ ਅੰਕੜੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 12.6

ਨਿਰਵਾਹ ਖਰਚ ਸੂਚਕ ਅੰਕ	ਹਫ਼ਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
ਕੁਲ ਜੋੜ	52

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭਜ (ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਏ ਬਿਨਾਂ) ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਏ ਬਿਨਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਖਿੱਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ ਆਓ, ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਅਰਥਾਤ 140 - 150, 150 - 160,.... ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 - 150 ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਸੀਮਾ = 150 ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ = 140 ਹੈ।

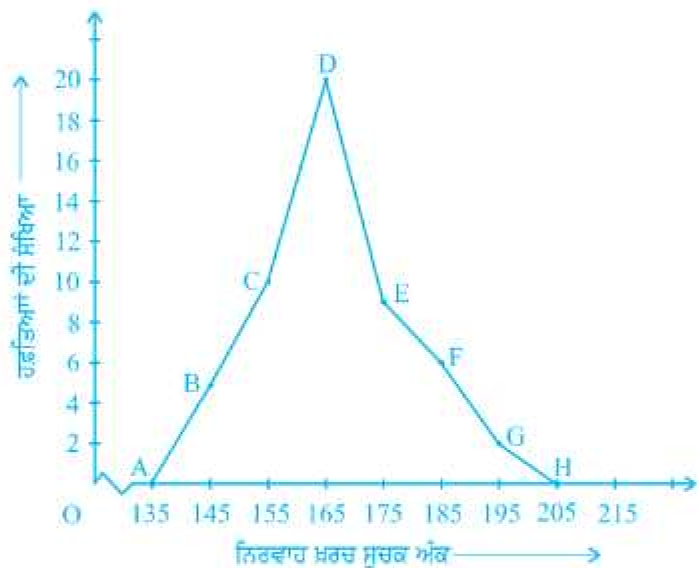
ਇਸ ਲਈ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ $= \frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 12.7

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
ਕੁਲ ਜੋੜ		52

ਹੁਣ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ; ਲੰਬਾਤਮਕ-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) ਅਤੇ G(195, 2) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾ ਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਅਸੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਵਰਗ 130–140 (ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਵਰਗ 140–150 ਦੇ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਹੈ) ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ A (135, 0) ਨੂੰ G (195, 2) ਦੇ ਤੁਰੰਤ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ H (205, 0) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਨਾ ਨਹੀਂ ਭੁੱਲਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ABCDEFGH ਹੋਵੇਗਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.8)।



ਚਿੱਤਰ 12.8

ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਦੋਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅੰਕੜੇ ਨਿਰੰਤਰ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਅਧਿਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸਮਾਨ ਪ੍ਰਕਿਤੀ ਦੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਹੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਨੇ ਪੂਰੇ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ 15–44 (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਦੀਆਂ ਉਮਰ ਵਾਲੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਮਾਰੀ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਕਾਰਣਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਰਵੇਖਣ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ (% ਵਿੱਚ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ।

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਾਰਣ	ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਦਰ (%)
1.	ਪ੍ਰਜਨਨ ਸਿਹਤ ਅਵਸਥਾ	31.8
2.	ਤੰਤੂ ਮਨੋਵਿਕਾਰੀ ਅਵਸਥਾ	25.4
3.	ਸੱਟ	12.4
4.	ਹਿਰਦਾ ਵਾਹਿਕਾ ਅਵਸਥਾ	4.3
5.	ਸਾਹ ਕਿਰਿਆ ਅਵਸਥਾ	4.1
6.	ਹੋਰ ਕਾਰਣ	22.0

(i) ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

(ii) ਕਿਹੜੀ ਹਾਲਤ ਪੂਰੇ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਖਰਾਬ ਸਿਹਤ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦਾ ਵੱਡਾ ਕਾਰਣ ਹੈ?

(iii) ਆਪਣੀ ਅਧਿਆਪਕਾ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਜਿਹੇ ਦੋ ਕਾਰਣਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਉਪਰ (ii) ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਭੂਮਿਕਾ ਰਹੀ ਹੋਵੇ।

2. ਭਾਰਤੀ ਸਮਾਜ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ ਹਜ਼ਾਰ ਲੜਕਿਆਂ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ (ਨਿਕਟਤਮ 10 ਤੱਕ ਦੀ) ਸਿੱਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਖੇਤਰ	ਪ੍ਰਤੀ ਹਜਾਰ ਲੜਕਿਆਂ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸਿੱਖਿਆ
ਅਨੁਸੂਚਿਤ ਜਾਤੀ	940
ਅਨੁਸੂਚਿਤ ਜਨਜਾਤੀ	970
ਗੈਰ ਅਨੁਸੂਚਿਤ ਜਾਤੀ/ਜਨਜਾਤੀ	920
ਪਿਛੜੇ ਜਿਲ੍ਹੇ	950
ਗੈਰ ਪਿਛੜੇ ਜਿਲ੍ਹੇ	920
ਪੇਂਡੂ	930
ਸ਼ਹਿਰੀ	910

(i) ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

(ii) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰਕੇ, ਦੱਸੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਸਿੱਟੇ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਨ?

3. ਇੱਕ ਰਾਜ ਦੀ ਵਿਧਾਨ ਸਭਾ ਦੀਆਂ ਚੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਪਾਰਟੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਜਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੀਟਾਂ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮ / ਨਤੀਜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਪਾਰਟੀ	A	B	C	D	E	F
ਜਿੱਤੀਆਂ ਸੀਟਾਂ	75	55	37	29	10	37

(i) ਮਤਦਾਨ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੋ।

(ii) ਕਿਸ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਪਾਰਟੀ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀਟਾਂ ਜਿੱਤੀਆਂ ?

4. ਇੱਕ ਪੌਦੇ ਦੀਆਂ 40 ਪੱਤੀਆਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਇੱਕ ਮਿਲੀਮੀਟਰ ਤੱਕ ਸਹੀ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਲੰਬਾਈ (ਮਿਲੀਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ)	ਪੱਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

(ii) ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਉਚਿਤ ਆਲੇਖ ਹੈ ?

(iii) ਕੀ ਇਹ ਸਹੀ ਸਿੱਟਾ ਹੈ ਕਿ 153 ਮਿਲੀਮੀਟਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਪੱਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਭ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੈ ? ਕਿਉਂ ?

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ 400 ਨਿਆੱਨ ਲੈਂਪਾਂ ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਜੀਵਨ ਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੈਂਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ਼ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

(ii) ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਲੈਂਪਾਂ ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ 700 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹਨ ?

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਸੈਕਸ਼ਨਾ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਸੈਕਸ਼ਨ A		ਸੈਕਸ਼ਨ B	
ਅੰਕ	**ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ**	**ਅੰਕ**	**ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ**
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

ਦੋ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੀ ਗ੍ਰਾਫ ’ਤੇ ਦੋਨੋਂ ਸੈਕਸ਼ਨ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ। ਦੋਨੋਂ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਕੇ ਦੋਨੋਂ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

7. ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਦੋ ਟੀਮਾਂ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੀਆਂ 60 ਗੇਂਦਾਂ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਟੀਮ A	ਟੀਮ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੀ ਗਰਾਫ਼ ’ਤੇ ਦੋਨੋਂ ਟੀਮਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰੋ।

(**ਸੰਕੇਤ** : ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੰਤਰ ਬਣਾਓ)

8. ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਖੇਡ ਰਹੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਉਮਰ ਵਰਗ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਅਚਾਨਕ/ਅਚਨਚੇਤ ਸਰਵੇਖਣ (random survey) ਕਰਨ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ :

ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)	ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

9. ਇੱਕ ਲੋਕਲ ਟੈਲੀਫੋਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਕਾ ਵਿੱਚ 100 ਉਪਨਾਮ (surname) ਅਚਨਚੇਤ ਲਏ ਗਏ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ :

ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਉਪਨਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1 -4	6
4 -6	30
6 -8	44
8 -12	16
12 -20	4

(i) ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉ।

(ii) ਉਹ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਉਪਨਾਮ ਹਨ।

12.2 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

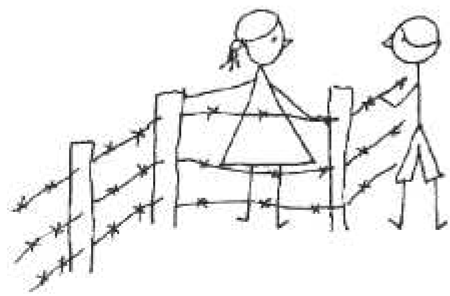
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

1. ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਾਂ, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਰਾਹੀਂ ਅਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਿਕਾ 1

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣ

A1.1 ਭੂਮਿਕਾ



ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਹਾਡੇ ਪਰਿਵਾਰ ਕੋਲ ਇੱਕ ਜਮੀਨ ਦਾ ਟੁੱਕੜਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਉਸ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਕੋਈ ਵਾੜ (fence) ਨਹੀਂ ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਤੁਹਾਡੇ ਪੜੋਸੀ ਨੇ ਆਪਣੇ ਭੋਂ- ਖੰਡ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਫੈਸਲਾ ਕੀਤਾ। ਜਦੋਂ ਗੁਆਂਢੀ ਨੇ ਵਾੜ ਲਗਾ ਲਈ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਚੱਲਿਆ ਕਿ ਵਾੜ ਦੇ ਅੰਦਰ ਤੁਹਾਡੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਜਮੀਨ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦਾ ਕੁਝ ਹਿੱਸਾ ਚਲਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਗੁਆਂਢੀ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹੋਗੇ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਤੁਹਾਡੇ ਜਮੀਨ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੇ ਕੁਝ ਹਿੱਸੇ 'ਤੇ ਕਬਜਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡਾ ਪਹਿਲਾ ਕੰਮ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਵਿਵਾਦ ਨੂੰ ਸੁਲਝਾਉਣ ਲਈ ਪਿੰਡ ਦੇ ਬਜੁਰਗਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲੈਣਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਮੰਨ ਲਉ ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਬਜ਼ੁਰਗਾਂ ਦੀ ਰਾਇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਬਜੁਰਗ ਤੁਹਾਡੇ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਸਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਤੁਹਾਡੇ ਗੁਆਂਢੀ ਦੇ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਸਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਨ। ਤਦ, ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਰੋਗੇ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਆਪਣੇ ਜਮੀਨ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੇ ਆਪਣੇ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਕ ਅਜਿਹੀ ਵਿਧੀ ਲੱਭੋ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਮਨਜ਼ੂਰ ਹੋਵੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਪਣੇ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਸਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਗੁਆਂਢੀ ਦੇ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਗਲਤ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਜੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਦਾਲਤ ਵਿੱਚ, ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ/ ਮਨਜ਼ੂਰ ਸ਼ੁਦਾ ਆਪਣੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੀ ਮਾਤਾ ਜੀ ਨੇ ਅਗਸਤ ਮਹੀਨੇ 2005 ਦਾ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਬਿੱਲ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸਤੰਬਰ, 2005 ਦੇ ਬਿੱਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਗਸਤ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਬਿਲ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਿਜਲੀ ਵਿਭਾਗ ਦੇ ਇਸ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਲਤ ਸਿੱਧ ਕਰੋਗੇ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਭੁਗਤਾਨ ਬਿਲ ਰਸੀਦ ਪੇਸ਼ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ, ਜਿਹੜੀ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦੇਵੇਗੀ ਕਿ ਅਗਸਤ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਬਿਲ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਕਸਰ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਾਂ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਗਲਤ। ਫਿਰ ਵੀ, ਕਈ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਅਸੀਂ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਹੀ ਜਾਂ ਗਲਤ ਕੇਵਲ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਕੁੱਝ ਸਵੈ ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਕੇ) ਜਦੋਂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਤਰਕ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹਜਾਰਾਂ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗਣਿਤ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸ਼ਾਖਾ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਜਿਹਾ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣ (proof) ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਥੇਲਜ਼ ਨੇ ਦਰਸਾਇਆ ਸੀ। ਇੰਝ ਤਾਂ, ਮੇਸੋਪੋਟਾਮਿਆ, ਮਿਸਰ, ਚੀਨ ਅਤੇ ਭਾਰਤ ਜਿਹੀਆਂ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਸੱਭਿਆਤਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਕੇਂਦਰੀ ਬਿੰਦੂ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਸਬੂਤ ਨਹੀਂ ਮਿਲਦਾ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪ੍ਰਮਾਣ , ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਸੀ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਅੱਜ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਥਨ ਕੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਗਣਿਤ ਵਿਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਕ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤੇ ਇਕ ਗਣਿਤਕ ਪ੍ਰਮਾਣ ਵਿਚ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਸੰਘਟਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

A1.2 ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਕਥਨ

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਕਥਨ (mathematical acceptable statement) ਦੇ ਅਰਥ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਥਨ ਉਹ ਵਾਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਨਾ ਤਾਂ ਆਦੇਸ਼ ਸੂਚਕ ਵਾਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਵਿਸਮੇ ਸੂਚਕ (exclamatry) ਵਾਕ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਕਥਨ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ,

1. "ਤੁਹਾਡੇ ਵਾਲਾਂ ਦਾ ਰੰਗ ਕੀ ਹੈ" ? ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ।
2. "ਕਿਰਪਾ ਕਰਕੇ ਜਾਓ ਅਤੇ ਮੇਰੇ ਲਈ ਪਾਣੀ ਲੈ ਕੇ ਆਉ," ਇਹ ਬੇਨਤੀ ਜਾਂ ਆਦੇਸ਼ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।
3. ਕਿੰਨਾ ਅਦਭੁਤ ਆੱਥਣ ਵੇਲਾ ਹੈ। ਇਹ ਇਕ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਟਿੱਪਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਫਿਰ ਵੀ "ਤੁਹਾਡੇ ਵਾਲਾਂ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਹੈ।" ਇਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਥਨ ਨਿਮਨ ਲਿਖਿਤ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ :

- *ਸਦਾ ਸੱਚ (always true)*
- *ਸਦਾ ਗਲਤ/ਝੂਠ (always false)*
- *ਅਸਪਸ਼ਟ (ambiguous)*

ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ "ਅਸਪਸ਼ਟ" ਦੀ ਕੁਝ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕਥਨ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਉਹ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਪਾਉਂਦੇ ਕਿ ਕਥਨ ਸਦਾ ਸੱਚ ਜਾਂ ਸਦਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, "ਕੱਲ ਵੀਰਵਾਰ ਹੈ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੁੱਝ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਫੈਸਲਾ ਲੈ ਸਕੀਏ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ।"

ਅਸਪਸ਼ਟਤਾ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸਥਿਤੀ ਤਦੋਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਥਨ ਵਿਅਕਤੀ ਪੂਰਕ (subjective) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਕੁਝ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਝੂਠ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੁੱਤੇ ਸਮਝਦਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ," ਅਸਪਸ਼ਟ ਕਥਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਝ ਲੋਕ ਇਸ ਨੂੰ ਸੱਚ ਮੰਨਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਇਸ ਨੂੰ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਮੰਨਦੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਕਥਨ ਸਦਾ ਸੱਚ, ਸਦਾ ਝੂਠ ਜਾਂ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

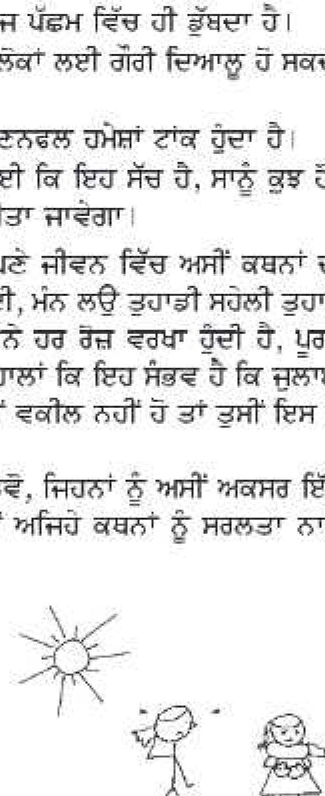
(i) ਇਕ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਅੱਠ ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
(ii) ਇੱਥੇ ਵਰਖਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ।
(iii) ਸੂਰਜ ਪੱਛਮ ਵਿੱਚ ਡੁੱਬਦਾ ਹੈ।
(iv) ਗੌਰੀ ਇੱਕ ਦਿਆਲੂ ਕੁੜੀ ਹੈ।
(v) ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
(vi) ਦੋ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਕਥਨ ਸਦਾ ਗਲਤ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ 7 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
(ii) ਕਥਨ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ, ਕਿੱਥੇ ਹੈ।
(iii) ਕਥਨ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਥਾਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਈਏ, ਸੂਰਜ ਪੱਛਮ ਵਿੱਚ ਹੀ ਡੁੱਬਦਾ ਹੈ।
(iv) ਕਥਨ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਵਿਅਕਤੀ ਪਰਕ ਹੈ ਕੁਝ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਗੌਰੀ ਦਿਆਲੂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਨਹੀਂ।
(v) ਕਥਨ ਸਦਾ ਗਲਤ ਹੈ। ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
(vi) ਕਥਨ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ ਇਸ ਨੂੰ *ਭਾਗ A1.4* ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ ਕਿ ਆਪਣੇ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਮਾਨਤਾ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਅਧਿਕ ਸਾਵਧਾਨ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹੇਲੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਦਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੇਰਲ ਦੇ ਮੰਨਤਾਵਡੀ ਵਿੱਚ ਜੁਲਾਈ ਦੇ ਮਹੀਨੇ ਹਰ ਰੋਜ਼ ਵਰਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਪੂਰਨ ਵਿਸਵਾਸ਼ ਦੇ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲਵੋਗੇ, ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਜੁਲਾਈ ਦੇ ਮਹੀਨੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਦਿਨ ਵਰਖਾ ਨਾ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਵਕੀਲ ਨਹੀਂ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤੇ ਬਹਿਸ ਨਹੀਂ ਕਰੋਗੇ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਲਵੋ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ "ਅੱਜ ਬਹੁਤ ਗਰਮੀ ਹੈ।" ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸੰਗ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ, ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹੈ।, "ਅੱਜ ਬਹੁਤ ਗਰਮੀ ਹੈ" ਦਾ ਅਰਥ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ, ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 'ਕੁਮਾਊਂ' ਦੇ ਵਿਅਕਤੀ ਲਈ ਜਿਹੜਾ ਮੌਸਮ ਬਹੁਤ ਗਰਮ ਹੋਵੇਗਾ ਉਹ ਚੇਨੱਈ ਦੇ ਵਿਅਕਤੀ ਲਈ ਗਰਮ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਪਰੰਤੂ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਅਸਪਸ਼ਪਟ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨ ਸਿਰਫ਼ *ਸਵੀਕਾਰਯੋਗ ਜਾਂ ਮੰਨਣਯੋਗ (valid) ਲੈਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਹ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇਗਾ।*

ਜਦੋਂ ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ (true statement) ਜਾਂ ਫਿਰ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $5 + 2 = 7$ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ '$5 + 2 = 7$' ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਹੈ। $5 + 3 = 7$ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ '$5 + 3 = 7$' ਇੱਕ ਝੂਠ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ :

(i) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) 1 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰੇਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $4x + x = 5x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $2x > x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(v) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $x^2 \geq x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(vi) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

(ii) ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 9 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2 \times (-1) = -2$, ਅਤੇ -2, -1 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, ਅਤੇ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vi) ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਤਰਫ਼ ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਉਦਾਹਰਣ ਜਾਂ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ ਇਹ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਲਈ (ii) ਵਿੱਚ ਕਿਉਂਕਿ 9 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "1 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰੇਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।", ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਜਿਹੜਾ ਕਥਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਵਿੱਚ ਕਿਉਂਕਿ 9 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "1 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰੇਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।", ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਜਿਹੜਾ ਕਥਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਾ ਹੋਵੇ, *ਪ੍ਰਤਿ ਉਦਾਹਰਣ (counter example)* ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅਨੁਛੇਦ A1.5 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਤਰਫ਼ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਕਥਨ (iv), (v) ਅਤੇ (vi) ਝੂਠ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਕੁਝ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਲਗਾਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੱਚ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਲੋੜੀਂਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਲਗਾ ਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਕਥਨ ਹੋ ਜਾਣ।

(i) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $2x > x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $x^2 \geq x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੇ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਹੀ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਉਸਦੀ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ 90° ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਜੇਕਰ $x > 0$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $2x > x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜੇਕਰ $x \leq 0$ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ $x \geq 1$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $x^2 \geq x$ ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ 90° ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ A 1.1

1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹਨ, ਸਦਾ ਝੂਠ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸਪਸ਼ਟ ਹਨ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
   (i) ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ 13 ਮਹੀਨੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (ii) ਦੀਵਾਲੀ ਸ਼ੁੱਕਰਵਾਰ ਨੂੰ ਹੈ।
   (iii) ਮਗਾਦੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ 26°C ਹੈ।
   (iv) ਧਰਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਦਰਮਾ ਹੈ।
   (v) ਕੁੱਤੇ ਉੱਡ ਸਕਦੇ ਹਨ।
   (vi) ਫਰਵਰੀ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ 28 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
2. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।
   (i) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 350° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $x^2 \geq 0$ ਹੈ।
   (iii) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iv) ਦੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (v) ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3. ਲੋੜੀਂਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਲਗਾ ਕੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੋ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ:
   (i) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (ii) ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   (iii) ਕਿਸੇ ਵੀ x ਦੇ ਲਈ, $3x + 1 > 4$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iv) ਕਿਸੇ ਵੀ x ਦੇ ਲਈ, $x^3 \geq 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (v) ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਵੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

A1.3 ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕ

ਇੱਕ **ਸਪੱਸ਼ਟ (unambiguous)** ਕਥਨ ਦੀ ਵਾਸਤਵਿਕਤਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਮੁੱਖ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਸਾਧਨ *ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕ (deductive reasoning)* ਹੈ।

ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੁਝਾਰਤ (Puzzle) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਨੂੰ ਚਾਰ ਕਾਰਡ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕਾਰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਛਪੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਛਪਿਆ ਹੈ।

A	V	6	5

ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਾਰਡ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਨ ਕਰਦੇ ਹਨ:

"ਜੇਕਰ ਕਾਰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਸੁਰ (Vowel) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਨਿਯਮ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਲਈ, ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹਾਂ, ਇਹ ਵਿਕਲਪ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਹੀ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟ ਸਕਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਪਰੰਤੂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਘੱਟ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟ ਕੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਾਰਡ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਸੁਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਜਿਸ ਕਾਰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਸੁਰ ਹੈ ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਿਯਮ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਉਹ ਕਾਰਡ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੀ ਸਾਨੂੰ 'A' ਨੂੰ ਪਲਟਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ? ਉੱਤਰ ਹੈ: ਨਹੀਂ। ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਚਾਹੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ, ਨਿਯਮ ਤਦ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

"5" ਦੇ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹੋਗੇ ? ਇੱਥੇ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਕਾਰਡ ਪਲਟਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਸੁਰ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਵਿਅੰਜਨ, ਨਿਯਮ ਤਦ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ V ਅਤੇ 6 ਵਾਲੇ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ V ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਯਮ ਭੰਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ 6 ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਵੀ ਨਿਯਮ ਭੰਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਤਰਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ **ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ** (**dedeuctive reasoning**) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਗਮਨੀ ਇਸ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਤਰਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਹਿਲਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਜਾਂ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ (ਅਰਥਾਤ ਨਿਗਮਿਤ) ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦੀ ਬੁਝਾਰਤ ਤੋਂ ਨਿਗਮਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅਨੇਕ ਤਰਕਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਿਰਫ V ਅਤੇ 6 ਨੂੰ ਹੀ ਪਲਟਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਮੁੱਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਿਆਪਕ ਕਥਨ ਦੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸੱਚ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਵਾਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ (ਬਿਨਾਂ ਹੱਲ ਕੀਤੇ) ਅਸੀਂ ਜਲਦੀ ਹੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 70001×134563 ਟਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ 70001 ਅਤੇ 134563 ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਸਦੀਆਂ ਤੋਂ ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ ਮਨੁੱਖ ਚਿੰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਗ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਾਡੇ ਜੀਵਨ ਵਿਚ ਸਦਾ ਹੁੰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ ਕਥਨ ਕਿ ਫੁੱਲ ਸੋਲਾਰਿਸ ਕੇਵਲ ਤਦੋਂ ਹੀ ਖਿਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਪਿਛਲੇ ਦਿਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਤਾਪਮਾਨ 28°C ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ "ਅਤੇ" 15 ਸਤੰਬਰ 2005 ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਘਾਟੀ (imaginary valley) ਵਿਚ ਸੋਲਾਰਿਸ ਖਿੜਿਆ ਸੀ, ਸੱਚ ਹੈ। ਤਦ ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਾਲਪਨਿਕ ਘਾਟੀ ਵਿੱਚ 14 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਤਾਪਮਾਨ 28° C ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਸੀ।

ਸਾਡੀ ਇਹ ਬਦਕਿਸਮਤੀ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਤਰਕਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਗਲਤ ਤਰਕਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਨੇਕ ਸਿੱਟੇ ਕੱਢ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹੇਲੀ ਇੱਕ ਦਿਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੇਖਕੇ ਮੁਸਕਰਾਉਂਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਸਾਡੇ ਨਾਲ ਨਾਰਾਜ ਹੈ। ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਹ ਮੇਰੇ ਨਾਲ ਨਾਰਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਦੇਖਕੇ ਉਹ ਨਹੀਂ ਮੁਸਕਰਾਏਗੀ"; ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੇ ਸਿਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਦਰਦ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਮੈਨੂੰ ਦੇਖਕੇ ਮੁਸਕਰਾਏਗੀ ਨਹੀਂ।" ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹਰ ਦਿਨ ਕੱਢਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਸਹੀ ਤਰਕਣ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਾਂ ਗਲਤ ਤਰਕਣ 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੈ?

ਅਭਿਆਸ A 1.2

1. ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ :

    (i) ਮਨੁੱਖ ਥਣਧਾਰੀ ਜੀਵ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਥਣਧਾਰੀ ਰੀੜ੍ਹਧਾਰੀ (vertebrates) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਮਨੁੱਖ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

    (ii) ਐਂਥਨੀ ਇੱਕ ਨਾਈ ਹੈ। ਦਿਨੇਸ਼ ਨੇ ਆਪਣੇ ਵਾਲ ਕੱਟਵਾਏ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਐਂਥਨੀ ਨੇ ਦਿਨੇਸ਼ ਦੇ ਵਾਲ ਕੱਟੇ ਹਨ ?

    (iii) ਮਾਰਟਿਅਨ (Martians) ਦੀ ਜੀਭ ਲਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਗੁਲਗ ਇੱਕ ਮਾਰਟਿਅਨ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਗੁਲਗ ਬਾਰੇ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

    (iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਚਾਰ ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਵਰਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਗਲੇ ਦਿਨ ਗਟਰਾਂ ਦੀ ਸਫਾਈ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਅੱਜ 6 ਘੰਟੇ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਹੈ। ਕੱਲ ਗਟਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

    (v) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਾਰਟੂਨ ਵਿੱਚ ਗਾਂ ਦੇ ਤਰਕ ਵਿੱਚ ਕੀ ਦੋਸ਼ (fallacy) ਹੈ।

2. ਤੁਹਾਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਚਾਰ ਕਾਰਡ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕਾਰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਛਪਿਆ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਿਯਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਕਾਰਡ ਹੋਣਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ ?

    "ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।"

B	3	U	8

A1.4 ਥਿਊਰਮ, ਕਿਆਸ ਅਤੇ ਸਵੈ- ਸਿੱਧ ਕਥਨ

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਕਥਨਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਭੇਦ/ਅੰਤਰ ਸਮਝਣ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ ਜਿਨਾਂ ਤੋਂ ਗਣਿਤ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹ ਹਨ ਥਿਊਰਮ, ਕਿਆਸ (conjecture) ਅਤੇ ਸਵੈ- ਸਿੱਧ ਕਥਨ।

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵੀ ਅਨੇਕਾਂ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਸ ਲਈ ਥਿਊਰਮ ਕੀ ਹੈ? ਉਸ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਜਿਸ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ (ਸਿੱਧ) ਕੀਤੀ ਜਾ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, *ਥਿਊਰਮ (Theorem)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਥਿਊਰਮ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਭਾਗ A1.5 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋਗੇ।

ਥਿਊਰਮ A 1.1 : *ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਥਿਊਰਮ A 1.2 : *ਦੋ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਥਿਊਰਮ A 1.3 : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਆਸ (conjecture) ਉਹ ਕਥਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਗਣਿਤਿਕ *ਗਿਆਨ (intuition)* ਅਤੇ ਅਨੁਭਵ ਅਰਥਾਤ ਗਣਿਤਿਕ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰੇਰਣਾਂ (intuition) ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਸੱਚ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਆਸ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਵੀ ਕਰ ਸਕੀਏ, ਤਾਂ ਇਹ ਥਿਊਰਮ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਨਮੂਨਿਆਂ (Pattern) ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਅਤੇ ਬੁੱਧੀ ਮਾਨੀ ਨਾਲ ਗਣਿਤਿਕ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਲਈ, ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਕਸਰ ਕਿਆਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਉ, ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਮੂਨੇ ਲਈਏ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬੁੱਧੀਮਾਨੀ ਨਾਲ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਕੋਈ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਵੋ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ –

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$

ਆਦਿ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਫਲਾਂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਨਮੂਨੇ (Pattern) ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕੋਈ ਕਿਆਸ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਕਿਆਸ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ:

(i) ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦੂਜਾ ਕਿਆਸ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ:

(ii) ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 6 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ (ਨਮੂਨਾ) ਲਵੋ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ- ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਪੰਗਤੀ												ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ
1						1						1
2					1		1					2
3				1		2		1				4
4			1		3		3		1			8
5		1		4		6		4		1		16
6	1		5		10		10		5		1	32
7			⋮						⋮			⋮
8			⋮						⋮			⋮

ਪੰਗਤੀਆਂ 7 ਅਤੇ 8 ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਿਆਸ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਪੰਗਤੀ 21 ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹੋਗੇ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਪੈਟਰਨ (ਨਮੂਨਾ) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਪੰਗਤੀ n ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਬਾਰੇ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਓ।

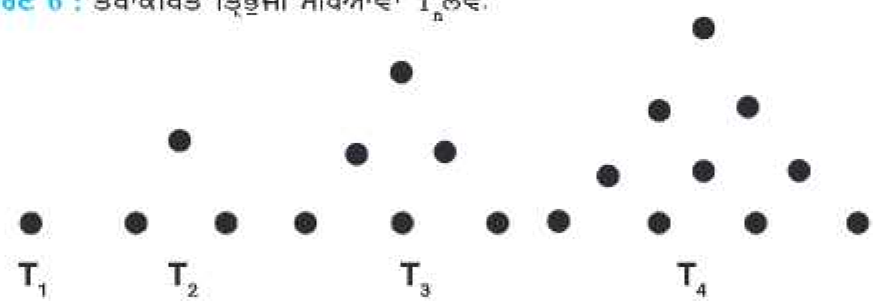
ਹੱਲ : ਪੰਗਤੀ 7 ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ ਹੈ।

ਪੰਗਤੀ 8 ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ ਹੈ।

ਪੰਗਤੀ 21 ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 2^{20}$ ਹੈ।

ਪੰਗਤੀ n ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 2^{n-1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਤਥਾਕਥਿਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ T_n ਲਵੋ:

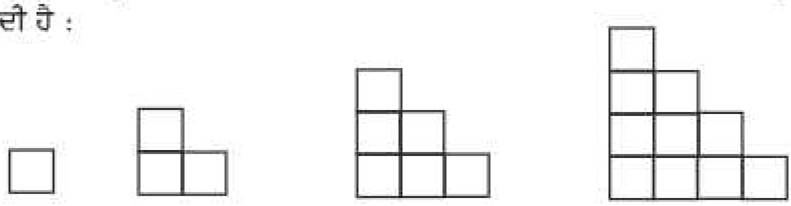


ਚਿੱਤਰ A 1.1

ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਤੀਬ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, ਆਦਿ-ਆਦਿ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ T_5 ਕੀ ਹੈ? T_6 ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? T_n ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

T_n ਦਾ ਇੱਕ ਕਿਆਸ ਦਿਉ।

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਅਨੁਸਾਰ ਫਿਰ ਖਿੱਚੋ ਤਾਂ ਇਸ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲ ਸਕਦੀ ਹੈ :



T_1 T_2 T_3 T_4

ਚਿੱਤਰ A1.2

ਹੱਲ :

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ਕਿਆਸ ਦਾ ਮਨਪਸੰਦ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਜਿਹੜਾ ਅਜੇ ਵੀ ਖੁਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਅਰਥਾਤ ਹੁਣ ਤੱਕ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ) ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਕ੍ਰਿਸ਼ਚਿਅਨ ਗੋਲਡਬਾਕ (1690–1764) ਦੇ ਨਾਂ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਗੋਲਡਬਾਕ ਕੰਜੈਕਚਰ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਆਸ ਦਾ ਕਥਨ ਇਹ ਹੈ :*"4 ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਹਰੇਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਟਾਂਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।"* ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿਧ ਕਰ ਲਵੋ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਵੋਗੇ।

ਇਹ ਦੇਖਕੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਹੈਰਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਜੋ ਕੁਝ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਕੀ ਉਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?

ਅਸਲੀਅਤ ਤਾਂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਖੇਤਰ ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਹ "ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਸੱਚ ਹਨ" ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਨ੍ਹਾ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ *ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ (axioms)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ

ਤੁਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਸਵੈ-ਸਿਧ ਕਥਨਾਂ ਅਤੇ *ਅਭਿਧਾਰਨਾਵਾਂ (Postulates)* ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ (ਅੱਜਕਲ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ ਅਤੇ ਅਭਿਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਭੇਦ ਨਹੀਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।)

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਹੈ:

ਕਿਸੇ ਇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤਕ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਹੈ:

ਕੋਈ ਵੀ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਕਥਨ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲਿਆ ਸੀ। ਕਿਉਂ? ਉਸਨੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸੱਚ ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਿਆ ਸੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਤੱਥ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਿਤੇ ਨਾ ਕਿਤੇ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਤਾਂ ਕਰਨੀ ਹੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕੇ ਹੈਰਾਨੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ ਤਦ ਅਸੀਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਜਿਹੜੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਅਕਸਰ ਸਾਡੀ ਅੰਦਰ ਪ੍ਰੇਰਣਾਂ ਗਲਤ ਸਿੱਧ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਚਿੱਤਰ ਜਾਂ ਨਮੂਨੇ ਸਾਨੂੰ ਧੋਖਾ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਕ ਹੀ ਵਿਕਲਪ ਬਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਥ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਅਕਤੀ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਦੋਹਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $5 \times 0.2 = 1$ ਹੈ; ਜੋ ਕਿ 5 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕਿਹੜਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਅਧਿਕ ਲੰਬਾ ਹੈ, AB ਜਾਂ CD ?

ਚਿੱਤਰ A 1.3

ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹਨ, ਹਾਲਾਂਕਿ AB ਛੋਟਾ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਆਪਣੇ ਅੰਤਰ-ਪ੍ਰੇਰਣਾ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਲਏ ਗਏ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਚਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਮੁੱਕ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਤੋਂ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਚਾਓ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪਗ (steps) ਅਪਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਸਵੈ-ਸਿਧ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰੱਖੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ ਅਤੇ 5 ਅਭਿਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸੈਂਕੜੇ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋ ਜਾਓ ਕਿ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਸੰਗਤ (consistent) ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਸਿਧ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਨੂੰ *ਅਸੰਗਤ* (inconsistent) ਤਦੋਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਲਈਏ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਸਿਧ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਕਥਨ ਲਵੋ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾਵਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਅਸੰਗਤ ਹਨ।

ਕਥਨ 1 : ਕੋਈ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਆਪਣੀ ਅਗੇਤਰ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਕਥਨ 2 : ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸ਼ਿਫਰ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ **ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਭਾਗ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ**) ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਪਲ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਦੇਖੋ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਥਨ 2 ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ $\frac{1}{0} = a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ a ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $1 = 0$ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕਥਨ 1 ਤੋਂ, ਜੋ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਪਣੀ ਅਗੇਤਰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ, ਇਹ ਝੂਠ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਇੱਕ ਗਲਤ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਦੇ ਕਾਰਣ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋਵੇਗਾ। *ਅਸੀਂ ਅੰਤਰ-ਵਿਰੋਧ ਤਦ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਥਨ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਨਕਾਰਨ (negation) ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ।* ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ 1 ਅਤੇ ਕਥਨ 2 ਨੂੰ ਫਿਰ ਲਵੋ।

ਕਥਨ 1 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2 \neq 1$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ $x^2 - x^2$ ਲਵੋ। ਇਸ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ ਅਤੇ

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

ਇਸ ਲਈ, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$ ਹੋਇਆ।

ਕਥਨ 2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ $(x - x)$ ਕੱਟ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਤਦ ਸਾਨੂੰ $x = 2x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $2 = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਥਨ $2 \neq 1$ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਕਾਰਨ $2 = 1$ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸੱਚ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਹ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਹੈ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ, ਉਸ ਦੇ ਲਈ ਬਹੁਤ ਸੋਚ-ਵਿਚਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਕੋਈ ਅਸੰਗਤਤਾ ਜਾਂ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧ ਪੈਦਾ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਫਿਰ ਵੀ ਕਦੇ ਕਦੇ ਸਵੈ ਸਿੱਧ-ਕਥਨਾਂ ਜਾਂ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਤੋਂ ਕੁਝ ਨਵੇਂ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਅਧਿਆਇ 5 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਯੁਕਲਿਫ ਦੀ ਪੰਜਵੀਂ ਅਭਿਧਾਰਣਾਂ ਅਤੇ ਗੈਰ ਯੁਕਲਿੱਡਿਅਨ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੀ ਖੋਜ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹੋ। ਉੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਕਿ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦਾ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਸੀ ਕਿ ਪੰਜਵੀਂ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿਚ ਇਹ ਇੱਕ ਥਿਊਰਮ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਚਾਰ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੈਰਾਨੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਕਾਰਜਾਂ (ਕੋਸ਼ਿਸ਼ਾਂ) ਤੋਂ ਗੈਰ ਯੁਕਲਿਡਿਅਨ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੀ ਖੋਜ ਹੋ ਗਈ।

ਸਵੈ-ਸਿੱਥ ਕਥਨ, ਥਿਊਰਮ ਅਤੇ ਕਿਆਸ (conjecture) ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਅੰਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਹੀ ਸਮਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤੇ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਆਸ (conjecture) ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਜਾ ਝੂਠ (ਗਲਤ) ਨੂੰ ਅਜੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਬਾਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਥਿਊਰਮ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਤਰਕ ਨਾਲ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਗਈ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ A 1.3

1. ਕੋਈ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਵੋਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$, ਆਦਿ। ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਕਿਆਸ (ਕੰਜੈਕਚਰ) ਬਣਾਉ।
2. ਪਾਸਕੱਲ – ਤ੍ਰਿਭੁਜ 'ਤੇ ਆ ਜਾਉ।
   ਪੰਗਤੀ 1 : $1 = 11^0$
   ਪੰਗਤੀ 2 : $1 \ 1 = 11^1$
   ਪੰਗਤੀ 3 : $1 \ 2 \ 1 = 11^2$
   ਪੰਗਤੀ 4 ਅਤੇ ਪੰਗਤੀ 5 ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਿਆਸ ਬਣਾਉ। ਕੀ ਤੁਹਾਡਾ ਕਿਆਸ ਸੱਚ ਹੈ? ਕੀ ਤੁਹਾਡਾ ਕਿਆਸ ਪੰਗਤੀ 6 'ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?
3. ਆਉ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਦੇਖੀਏ (ਚਿੱਤਰ 11.2)। ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$ ਹੈ।
   $T_4 + T_5$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਕਹਿਣਾ ਹੈ? $T_{n-1} + T_n$ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਕਿਆਸ ਬਣਾਉ।
4. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ (ਨਮੂਨਾ) ਦੇਖੋ।
   $1^2 = 1$
   $11^2 = 121$
   $111^2 = 12321$
   $1111^2 = 1234321$
   $11111^2 = 123454321$
   ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲਈ ਇਕੋ ਕਿਆਸ ਬਣਾਉ।
   $111111^2 =$
   $1111111^2 =$
   ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਹਾਡਾ ਕਿਆਸ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।
5. ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀਆਂ ਪੰਜ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ (ਅਭਿਧਾਰਣਾਂ) ਦੱਸੋ।

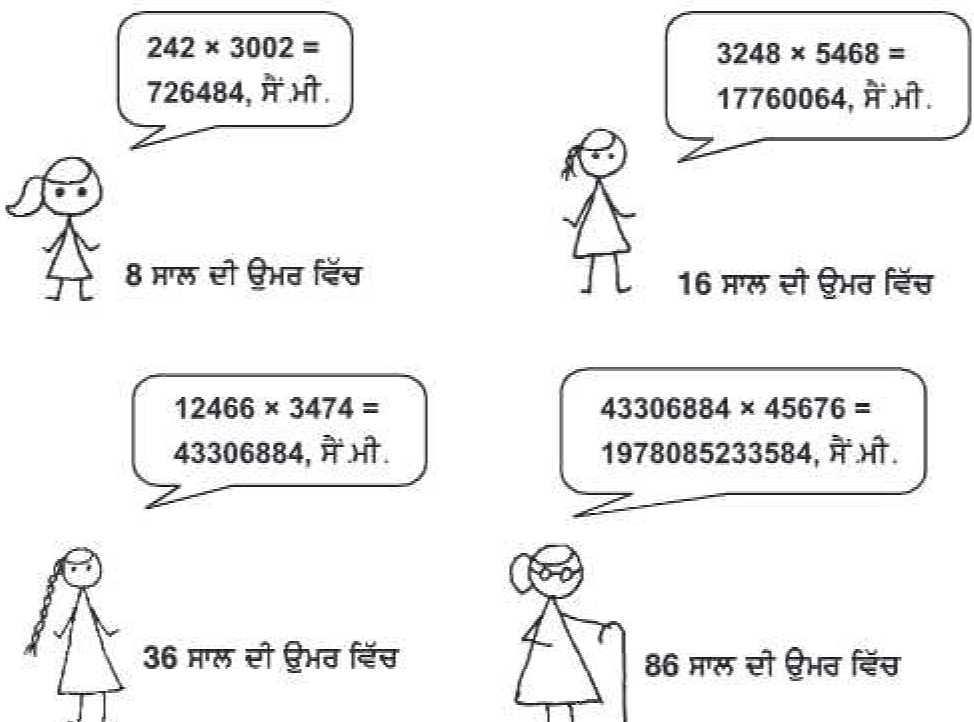
A1.5 ਗਣਿਤਿਕ ਸਬੂਤ ਕੀ ਹੈ?

ਆਉ ਅਸੀਂ ਸਬੂਤਾਂ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਪਹਲੂਆਂ ਅਤੇ ਪੱਖਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਜਾਂਚ ਜਾਂ ਪੜਤਾਲ (verification) ਅਤੇ ਪ੍ਰਮਾਣ (proof) ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਸਮਝਾਂਗੇ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਇਹ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਦੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ"। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਅਚਾਨਕ (ਕੋਈ ਵੀ) ਦੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 24 ਅਤੇ 2006 ਲਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ $24 \times 2006 = 48144$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚੋਂ ਅਨੇਕਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਖਿੱਚਣ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਨੁਕਸ (flaw) ਕੀ ਹੈ? ਪੜਤਾਲ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਕਈ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਿਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹੋ ਉਹ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਪਾਉਂਦੇ ਕਿ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਤਾਂ ਕਾਰਟੂਨ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਲੜਕੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਪਣੇ ਬਾਕੀ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕਰਦੇ ਰਹਿੰਦੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੋ



ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਜੇ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਨਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਮਾਪ ਸਕਦੇ।

ਅਕਸਰ ਜਾਂਚ ਵੀ ਗੁਮਰਾਹ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਪੜਤਾਲ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਪੱਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ (ਅਭਿਆਸ A1.3 ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸੱਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $11^5 = 15101051$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ $11^5 = 161051$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਸੋਚਣਾ ਪਵੇਗਾ ਜਿਹੜੀ ਸਿਰਫ ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ 'ਤੇ ਹੀ ਨਿਰਭਰ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਜਿਹੜੀ ਸਿਰਫ ਤਰਕਸੰਗਤ ਤਰਕਾਂ 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ *ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਮਾਣ* (*mathematical proof*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਭਾਗ A1.2 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ (*counter examplex*) ਲੈਣਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਹੈ। ਹਾਲਾਂ ਕਿ ਹਜ਼ਾਰਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰਕੇ ਇਸ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਣਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ (ਗਲਤ) ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ (ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣਾ ਕਿ ਕੁਝ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਣਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $7 + 5 = 12$ ਕਥਨ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਇਕ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮਾਣ ਦੇ ਮੂਲ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦੇਖੀਏ :

(i) ਇੱਕ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ (rough idea) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(ii) ਥਿਊਰਮ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ (ਅਰਥਾਤ ਪਰਿਕਲਪਨਾ) ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਥਿਊਰਮ A1.2 ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। (ਅਧਿਆਇ 2 ਦੇ) ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $p(a) = 0$ ਤੇ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $(x - a)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਉੱਲਟ (converse) ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $(x - a)$, $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਪਰਿਕਲਪਨਾ (hypothesis) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $p(a) = 0$ ਹੈ।

ਇੱਕ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $180°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ, ਉਸ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਕ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਉਪਰੰਥਲੀ (successive) ਅਨੁਕ੍ਰਮ (ਲੜੀ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਸਬੂਤ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ, ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਥਿਊਰਮ ਤੋਂ, ਇੱਕ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਤੋਂ ਜਾਂ ਆਪਣੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਤਰਕਣੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iv) ਇੱਕ ਤਰਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਲੜੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਿੱਟਾ ਉਹੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਉਹੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਥਿਊਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਅਵਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

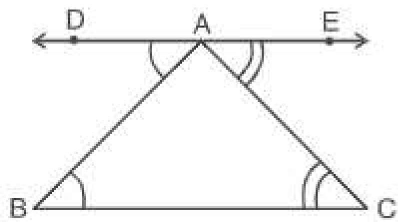
ਇਹਨਾਂ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਥਿਊਰਮ A1.1 ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ ਇਸ ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਪਰੰਤੂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦੇ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਟਿੱਪਣੀਆਂ ਦਿਆਂਗੇ। ਅਕਸਰ ਥਿਊਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਗੱਲ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਸਬੂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿਰਫ ਤਰਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਸੁਣਿਆ ਹੈ ਕਿ "ਇਹ ਦੋ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੇ ਹਨ" ਜਾਂ "ਉਹ ਕੋਣ $90°$ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਣ।" ਇਸ ਲਈ ਜੋ ਕੁਝ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ, ਉਸ ਤੋਂ ਧੋਖਾ ਨਾ ਖਾਉ। ਚਿੱਤਰ A1.4 ਨੂੰ ਫਿਰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ।

ਆਓ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਥਿਊਰਮ A1.1 ਲਈਏ।

ਥਿਉਰਮ A1.1 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਵੋ। (ਚਿੱਤਰ A1.4 ਦੇਖੋ)

ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (1)



ਚਿੱਤਰ A1.4

BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ DE ਖਿੱਚੋ ਜਿਹੜੀ A ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। (2)

DE, BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ AB ਇੱਕ ਕਾਟਵੀ ਰੇਖਾ (transversal) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle DAB$ ਅਤੇ $\angle ABC$ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਧਿਆਇ 6 ਦੇ ਥਿਉਰਮ 6.2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇਹ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਅਰਥਾਤ $\angle DAB = \angle ABC$ ਹੈ। (3)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

ਇਸ ਲਈ, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

ਪਰੰਤੂ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਕੋਣ (straight angle) ਬਣਦਾ ਹੈ। (6)

ਇਸ ਲਈ, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ (7)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਹਰੇਕ ਪਗ ਤੇ ਟਿੱਪਣੀ ਦਿਆਂਗੇ।

ਪਗ 1 : ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਡੇ ਥਿਉਰਮ ਦਾ ਸਬੰਧ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣ ਨਾਲ ਹੈ, ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਲਵਾਂਗੇ।

ਪਗ 2 : ਇਹ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਵਿਚਾਰ ਹੈ – ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਕਦਮ ਜਾਂ ਇਹ ਸਮਝ ਲੈਣਾ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਅਪਣਾਈ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਥਿਉਰਮ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕੀਏ। ਅਕਸਰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਸਬੂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 3 ਅਤੇ 4 : ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿ DE, BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ (ਆਪਣੀ ਰਚਨਾ ਤੋਂ) ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਥਿਉਰਮ 6.2 ਤੋਂ, ਜਿਹੜੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕਾਟਵੀ ਰੇਖਾ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle DAB = \angle ABC$ ਅਤੇ $\angle CAE = \angle ACB$ ਹੈ।

ਪਗ 5 : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੁਕੱਲਿਡ ਦੀ ਅਭਿਧਾਰਣਾ (ਦੇਖੋ ਅਧਿਆਇ 5) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪੂਰੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।"

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$

ਭਾਵ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 6 : ਇਹ ਦਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 6 ਦੇ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (ਅਭਿਧਾਰਣਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਦਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 7 : ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਿ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (ਅਭਿਧਾਰਣਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ "ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਸਮਾਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।" ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪਗ 7 ਉਸ ਥਿਊਰਮ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਦਾਅਵਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਥਿਊਰਮ A1.2 ਅਤੇ A1.3 ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਥਿਊਰਮ A1.2 : ਦੋ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ x ਅਤੇ y ਦੋ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ xy ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ x ਅਤੇ y ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ 2 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, $x = 2m$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ m ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $y = 2n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਤਦ $xy = 4\,mn$ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ $4\,mn$, 2 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੈ, ਇਸਲਈ xy ਵੀ 2 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, xy ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ A1.3 : *ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਕੋਈ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $2n$, $2n + 2$ ਅਤੇ $2n + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ, ਜਿੱਥੇ n ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੈ।

ਹੁਣ, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਤਾਂ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ. ਆਉ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਉ n ਜਿਸਤ ਹੈ। ਤਦ ਅਸੀਂ $n = 2m$ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਥੇ m ਕੋਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਤਦ $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

ਇਸ ਲਈ, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਉ n ਟਾਂਕ ਹੈ। ਤਦ $n + 1$ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $n + 1 = 2r$ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ r ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਦ
$$2n(2n+2)(2n+4) = 8n(n+1)(n+2)$$
$$= 8(2r-1) \times 2r \times (2r+1)$$
$$= 16r(2r-1)(2r+1)$$

ਇਸ ਲਈ, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦੋਨੋਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 16 ਨਾਲ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਨੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਚਾਰਕ, ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਬੂਤ ਲਿਖੇ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ 'ਤੇ ਕੁੱਝ ਟਿੱਪਣੀਆਂ ਦਿੰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਨੂੰ ਇਥੇ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਬੂਤ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਵਿਚਾਰ (ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਅਧਿਕ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਚਿੰਤਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਕਸਰ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਆਪ ਆਉਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਸਹੀ ਹੱਲ ਜਾਂ ਸਬੂਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਵਿਭਿੰਨ ਚਿੰਤਨ ਵਿਧੀਆਂ ਅਤੇ ਤਰਕ ਅਤੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਕਸਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਸਿਰਜਣਾਤਮਕ ਪੱਖ ਦੱਬ ਜਾਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹੀ ਸਾਰੇ ਤਰਕਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਲੈ ਕੇ ਉਚਿੱਤ ਪ੍ਰਮਾਣ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਜਿਕਰ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਆਪਣੇ ਕਥਨਾਂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ, ਭਾਰਤ ਦੇ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਸ਼੍ਰੀਨਿਵਾਸ ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੇ ਉੱਚ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਾਅਵਾ ਸੀ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਨੇਕਾਂ ਜੋ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਹੋ ਗਏ ਉਹ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਥਿਊਰਮ ਹੋ ਗਏ ਹਨ। ਜਿਹੜੇ ਅਜੇ ਤੱਕ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦਾਅਵਿਆਂ (ਕਿਆਸ) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ (ਜਾਂ ਝੂਠਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ) ਵਿੱਚ ਅੱਜ ਵੀ ਪੂਰੇ ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਸ਼੍ਰੀਨਿਵਾਸ ਰਾਮਾਨੁਜਨ
(1887–1920)
ਚਿੱਤਰ A1.5

ਅਭਿਆਸ A 1.4

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਝੂਠ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।

(i) ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਉਹ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਉਹ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ ਹੈ।

(v) $2n^2 + 11$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(vi) ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਦੇ ਲਈ, $n^2 - n + 41$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

2. ਤੁਸੀਂ ਅਪਣੇ ਪਸੰਦ ਦਾ ਸਬੂਤ ਲਵੋਂ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਪਰ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ, (ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ, ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਕਦਮ ਕੀ ਹੈ, ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਕੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਕਿਹੜੀਆਂ ਥਿਊਰਮਾਂ ਅਤੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨਾਂ (ਅਭਿਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਆਦਿ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰੋ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 6 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅਸੀਮਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y = 2x$ ਹੈ।

   (*ਸੰਕੇਤ :* ਬਿੰਦੂ $(n, 2n)$ ਲਵੋ, ਜਿਥੇ n ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।)
7. ਤੁਹਾਡੇ ਮਿੱਤਰ ਨੇ ਕਦੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਹਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਅਪਣੇ ਮਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚ ਲਵੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਨਾਲ ਵਿਭਿੰਨ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤਦ ਤੁਹਾਡੀ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਜਾਣੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਉਸਨੇ ਦੱਸ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਉਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹੜੀ ਸੀ। ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਬਚੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਦੋ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਉਦਾਹਰਣ ਸੱਚ ਕਿਉਂ ਹਨ?

   (i) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਲਵੋ, ਉਸਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਕਰੋ, ਉਸ ਵਿੱਚ 9 ਜੋੜੋ, ਅਪਣੀ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੋ। ਇਸ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ। ਆਪਣੀ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉ। ਤੁਹਾਡਾ ਪਰਿਣਾਮ 7 ਹੈ।

   (ii) ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਲਵੋ। (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 425 ਲਵੋ) ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿੱਖ ਕੇ ਇੱਕ ਛੇ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਉ (425425)। ਤੁਹਾਡੀ ਨਵੀਂ ਸੰਖਿਆ 7,11 ਅਤੇ 13 ਨਾਲ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੈ।

A1.6 ਸਾਰ ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਕਥਨ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸਵੀਕਾਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇਹ ਕਥਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ।
2. ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕਿ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧੀ ਉਦਾਹਰਣ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਣਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (ਅਭਿਧਾਰਣਾ) ਉਹ ਕਥਨ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸਬੂਤ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਕਿਆਸ (ਕੰਜੈਕਚਰ) ਉਹ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਗਣਿਤਿਕ ਅੰਤਰ-ਗਿਆਨ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਜਿਸਨੂੰ ਅਜੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਉਸ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨ ਨੂੰ, ਜਿਸਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ (ਜਾਂ ਸਿੱਧ) ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਥਿਊਰਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਤਰਕ ਸਾਧਨ ਨਿਗਮਨੀ ਤਰਕਣ ਹੈ।
7. ਸਬੂਤ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਰੋਥਲੀ ਲੜੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਥਨ ਤੋਂ, ਜਾਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਥਿਊਰਮ ਤੋਂ, ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ ਕਥਨ (ਅਭਿਧਾਰਣਾ) ਤੋਂ ਜਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਤਰਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਿਕਾ 2

ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ (ਮਾੱਡਲਿੰਗ) ਦੀ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ

A2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਹੀ, ਆਪਣੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਸਾਰ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਆਏ ਹੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ਼ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, ਸਬੰਧਿਤ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਇਹ ਸੂਤਰ (ਜਾਂ ਸਮੀਕਰਣ) ਵਿਆਜ਼ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਹੋਰ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਅਰਥਾਤ ਮੂਲਧਨ, ਵਿਆਜ਼ ਦਰ ਅਤੇ ਸਮਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਬੰਧ ਹੈ। ਇਹ ਸੂਤਰ **ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ (mathematical model)** ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। **ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ** (ਮਾੱਡਲ) ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਸਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਕਿਸੇ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ,

- ਉਪਗ੍ਰਹਿ ਛੱਡਣਾ।
- ਮਾਨਸੂਨ ਆਉਣ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨਾ।
- ਵਾਹਨਾਂ ਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਨ ਨੂੰ ਕਾਬੂ ਕਰਨਾ।
- ਵੱਡੇ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਟ੍ਰੈਫਿਕ ਭੀੜ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨਾ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਬਨਾਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ **(mathematical modelling)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਵਾਂਗੇ। ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸੱਮਸਿਆ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਤੁਲ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸੱਮਸਿਆ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ, ਕਿਸ ਹੱਦ ਤੱਕ ਵੈਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ: ਸੂਤਰੀਕਰਨ (*formulation*), ਹੱਲ (*solution*), ਵਿਆਖਿਆ (*interpretation*) ਅਤੇ ਵੈਧਤਾ (*validation*)।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲਵਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਸੀਂ ਭਾਗ A2.2 ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ

ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰੋਗੇ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹੜੀਆਂ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਬਾਦ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਸੀਂ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਅਰਥਾਤ A2.3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸਰਲ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਾਂ (models) 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਭਾਗ A 2.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦੀ ਸਮੁੱਚੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (overall process) ਉਸ ਦੇ ਲਾਭ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਸੀਮਾਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

A2.2 ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਖਿਆ

ਇਸ ਅਨੁਛੇਦ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹੜੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਜਾਂ ਸਿੱਧੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਮੈਂ ਆਪਣੀ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ 432 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ 48 ਲੀਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਲੱਗਿਆ। ਮੈਂ ਆਪਣੀ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਜਾਣਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ 180 km ਦੂਰ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਮੈਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਪਗਾਂ ਦਾ ਜਿਕਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਗ 1 : ਸੂਤਰੀਕਰਨ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਿੰਨੀ ਅਧਿਕ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਾਂਗੇ ਉਨਾਂ ਹੀ ਜਿਆਦਾ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ। ਅਰਥਾਤ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

432 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ = 48 ਲੀਟਰ

180 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ = ?

ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ : ਮੰਨ ਲਉ

x = ਮੇਰੇ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ

y = ਮੇਰੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ

y, x ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ (ਪਰਿਵਰਤਨ) ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ:, $y = kx$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਮੈਂ, 48 ਲੀਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਵਿੱਚ 432 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਦਾ ਹਾਂ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ:, $y = 48, x = 432$

ਇਸ ਲਈ, $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

ਕਿਉਂਕਿ $y = kx$ ਹੈ.

ਇਸ ਲਈ $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (ਜਾਂ ਸੂਤਰ) (1) ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸਬੰਧ ਦੱਸਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 2 : **ਹੱਲ :** ਸਾਨੂੰ 180 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 180$ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $x = 180$ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

ਪਗ 3 : **ਵਿਆਖਿਆ :** ਕਿਉਂਕਿ $y = 20$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 180 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ 20 ਲੀਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਕੀ ਇਹ ਗੱਲ ਤੁਹਾਡੀ ਸਮਝ ਵਿੱਚ ਆਈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ (1) ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 432 km ਵਾਲਾ ਰਸਤਾ ਪਹਾੜੀ ਹੈ ਅਤੇ 180 km ਵਾਲਾ ਸਮਤਲ ਮੈਦਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਪਹਾੜੀ ਮਾਰਗ ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਕਾਰ ਵਿੱਚ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਕੁਝ ਤੇਜ਼ ਦਰ ਨਾਲ ਹੋਵੇਗੀ, ਪਰੰਤੂ 180 km ਵਾਲੇ ਮਾਰਗ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਵਿੱਚ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਇਸ ਦਰ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ ਪਰੰਤੂ ਧੀਮੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੂਤਰ ਤਦੋਂ ਹੀ ਲਾਗੂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ, ਜੋ ਉਸ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਦੋਹਾਂ ਯਾਤਰਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਜੇਕਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕਾਰ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 'ਤੇ ਇਸ ਅੰਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਸਿਰਫ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ, ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ। ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲਦੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ ਇਸ ਦੀ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਮੰਨ ਲਉ ਸੁਧੀਰ ਨੇ 8% ਦੀ ਸਧਾਰਣ ਸਾਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦਰ ਨਾਲ ₹ 15000 ਨਿਵੇਸ਼ ਕੀਤੇ। ਨਿਵੇਸ਼ ਤੋਂ ਜਿਹੜੀ ਧੰਨ ਰਾਸ਼ੀ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਉਸ ਨਾਲ ਉਹ ਇੱਕ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਕੀਮਤ ₹19000 ਹੈ। ਦੱਸੋਂ ਉਹ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਲਈ ₹15000 ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰੇ ਤਾਂ ਜੋ ਉਸਨੂੰ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਧੰਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1 : **ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਨ :** ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਮੂਲਧਨ ਅਤੇ ਵਿਆਜ ਦਰ ਪਤਾ ਹੈ। ਵਿਆਜ ਉਹ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ₹ 15000 ਤੋਂ ਵਾਧੂ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ : ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਦਾ ਸੂਤਰ $I = \frac{Pnr}{100}$ ਹੈ,

ਜਿੱਥੇ P = ਮੂਲਧਨ

n = ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

$r\,\%$ = ਵਿਆਜ਼ ਦਰ

I = ਕਮਾਇਆ ਵਿਆਜ਼

ਇੱਥੇ ਮੂਲਧਨ = ₹ 15000

ਸੁਧੀਰ ਦੁਆਰਾ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਜਰੂਰੀ ਧਨ = ₹19000

ਇਸ ਲਈ, (ਕਮਾਇਆ ਗਿਆ) ਵਿਆਜ਼ = 19000 – 15000

= ₹4000

ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15000 ਰੁਪਏ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜਮਾਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ = n

8% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ n ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ 15000 ਰੁਪਏ ਤੇ ਵਿਆਜ਼ = I

ਤਦ,
$$\mathrm{I} = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

ਇਸਲਈ,
$$\mathrm{I} = 1200\,n \tag{1}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਵਿਆਜ਼ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ 8% ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ 15000 ਰੁਪਏ ਨਿਵੇਸ਼ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਉਹ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਿਆ ਵਿਆਜ਼ 4000 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ I = 4000 ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$4000 = 1200\,n \tag{2}$$

ਪਗ 2 : ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

ਪਗ 3 : ਵਿਆਖਿਆ : ਕਿਉਂਕਿ $n = 3\frac{1}{3}$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਤਿਹਾਈ 4 ਮਹੀਨੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 3 ਸਾਲ ਅਤੇ 4 ਮਹੀਨੇ ਬਾਦ ਸੁਧੀਰ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਮੇਂ ਵਿਆਜ਼ ਦੀ ਦਰ ਉਹੀ ਬਣੀ ਰਹੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸੂਤਰ $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{P}nr}{100}$ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਾਧਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸੁਧੀਰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਇੱਕਠੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਲੈਂਦਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਇੱਕ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਵਹਾਅ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ (upstream) ਜਾ ਕੇ, ਨਦੀ ਕਿਨਾਰੇ ਵੱਸੇ ਦੋ ਨਗਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਛੇ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇੰਨੀ ਹੀ ਦੂਰੀ ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ (downstream) ਵਿੱਚ ਪੰਜ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਹਾਅ ਦੀ ਚਾਲ 2 km/h ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1 : ਸੂਤਰੀਕਰਨ : ਸਾਨੂੰ ਨਦੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਦੋ ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਦਾ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ : ਮੰਨ ਲਉ ਮੋਟਰ- ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ x km/h ਹੈ, ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ t ਘੰਟੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ y km/h ਹੈ। ਤਾਂ

$$y = tx \tag{1}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ d km ਹੈ।

ਵਹਾਅ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਅਸਲ ਚਾਲ = ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ – ਵਹਾਅ ਦੀ ਚਾਲ,

ਕਿਉਂਕਿ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਨਦੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਵਹਾਅ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ = $(x - 2)$ km/h

ਜੇਕਰ, ਵਹਾਅ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੋ ਨਗਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 6 ਘੰਟੇ ਲੈਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$d = 6(x - 2) \tag{2}$$

ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਜੋੜਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ

ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ = $(x + 2)$ km/h

ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਉਨੀਂ ਹੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ- ਬੋਟ 5 ਘੰਟੇ ਲੈਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,
$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \tag{4}$$

ਪਗ 2 : ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ x ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 22$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3 : ਵਿਆਖਿਆ

ਕਿਉਂਕਿ $x = 22$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਾਂਤ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ- ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ 22 km/h ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਥਾਂ 'ਤੇ ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਕਿਨਾਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਇਹ ਧੀਮੀ ਵਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿੱਚ ਧਾਰਾ ਦੇ ਤੇਜ਼ ਵਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਚਲਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਦੀ ਦੀ ਵਿਚਲੀ ਧਾਰਾ ਵੱਲ ਨੂੰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਹ ਮੰਜਿਲ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀ ਚਾਲ ਕਿਨਾਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦੇ ਹੀ ਧੀਮੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਚਲੀ ਧਾਰਾ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੇ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਥੋੜਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਿਨਾਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਦਾ ਇਹ ਅੰਤਰ ਸਿਰਫ ਥੋੜੇ ਸਮੇਂ ਲਈ ਹੀ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਅਣਗੌਲਿਆਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਥੋੜੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਅਣਗੌਲਿਆਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਪਾਣੀ ਅਤੇ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਇਆ ਰਗੜ ਬਲ ਵੀ ਅਸਲ ਚਾਲ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਭਾਵ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

1. ਨਦੀ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਮੋਟਰ ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਪੂਰੇ ਸਮੇਂ ਅਚਲ ਬਣੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।
2. ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਵਿਚਕਾਰ ਰਗੜ ਅਤੇ ਹਵਾ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੋ ਰਿਹਾ ਰਗੜ ਬਲ ਅਣਗੌਲਿਆ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸ਼ਾਂਤ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਮੋਟਰ-ਬੋਟ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਣ ਲਈ ਤਿੰਨ ਪਗ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਪਗ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਹਨ :

1. **ਸੂਤਰੀਕਰਨ :** ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕ ਪ੍ਰਭਾਵ ਹੈ। ਇਹ **ਸੁਸੰਗਤ ਕਾਰਕ (relevant factors)** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਡੇ ਪਹਿਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਸੁਸੰਗਤ ਕਾਰਕ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਖਪਤ ਹੋਇਆ ਪੈਟਰੋਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਰਸਤੇ ਦੀ ਅਵਸਥਾ, ਕਾਰ ਚਲਾਉਣ ਦੀ ਚਾਲ ਜਿਹੇ ਹੋਰ ਕਾਰਕਾਂ ਦੀ ਉਪੇਕਸ਼ਾ ਕਰ ਲਈ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਇੰਨੀ ਔਖੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਣਗੌਲਿਆਂ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ **ਅਸੰਗਤ ਕਾਰਕ (irrelevant factors)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   ਤਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

2. **ਹੱਲ :** ਕੁਝ ਉਚਿਤ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

3. **ਵਿਆਖਿਆ :** ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਦਾ ਅਰਥ ਮੂਲ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੈ?

ਇੱਥੇ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਿੱਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਉਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਤਿੰਨ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਅਭਿਆਸ A 2.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹਰੇਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ, ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪਗਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸੁਸੰਗਤ ਅਤੇ ਅਸੰਗਤ ਕਾਰਕ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਹਨ।

1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਲਈ ਇੱਕ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ₹2000 ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕੰਪਿਊਟਰ ਕਿਰਾਏ ਤੇ ਲੈ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ₹25000 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੰਪਿਊਟਰ ਖਰੀਦ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਲੰਬੇ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ

ਕਰਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਇੰਨਾਂ ਕਿਰਾਇਆ ਦੇਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਇਸ ਤੋਂ ਸਸਤਾ ਤਾਂ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਉਹ ਕੰਪਿਊਟਰ ਖਰੀਦ ਲਵੇ। ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ, ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਥੋੜੇ ਸਮੇਂ, ਅਰਥਾਤ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਲਈ ਹੀ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿਰਾਏ 'ਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਲੈਣਾ ਅਧਿਕ ਸਸਤਾ ਪਵੇਗਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੰਪਿਊਟਰ ਖਰੀਦਣਾ ਅਧਿਕ ਸਸਤਾ ਪਵੇਗਾ।

2. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਕਾਰ ਸਥਾਨ A ਤੋਂ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਥਾਨ B ਦੇ ਵੱਲ 40 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਸੀ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਾਰ ਸਥਾਨ B ਤੋਂ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ A ਦੇ ਵੱਲ 30 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 100 km ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿਨੇਂ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕਾਰ ਦੂਜੀ ਕਾਰ ਨੂੰ ਮਿਲੇਗੀ ?
3. ਧਰਤੀ ਤੋਂ ਚੰਦਰਮਾ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦੂਰੀ 384000 km ਹੈ ਅਤੇ ਧਰਤੀ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਪਰਿਕਰਮਾ ਕਰਣ ਦਾ ਰਸਤਾ ਲਗਭਗ ਚੱਕਰੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਕਿ ਚੰਦਰਮਾਂ ਧਰਤੀ ਦੀ ਪਰਿਕਰਮਾ 24 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਪੂਰੀ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੰਦਰਮਾ ਧਰਤੀ ਦੀ ਪਰਿਕਰਮਾ ਕਰੇਗਾ ($\pi = 3.14$ ਲਵੋ)।
4. ਇਕ ਪਰਿਵਾਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਮਹੀਨਿਆਂ ਵਿੱਚ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵਾਟਰ ਹੀਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ, ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਲਈ ਔਸਤਨ ₹1000 ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਮਹੀਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵਾਟਰ ਹੀਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਮਹੀਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਔਸਤ ਬਿਲ ₹1240 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਵਾਟਰ ਹੀਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੀ ਲਾਗਤ ₹8 ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਵਾਟਰ ਹੀਟਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿੰਨੇ ਔਸਤ ਘੰਟਿਆਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

A2.3 ਕੁਝ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ

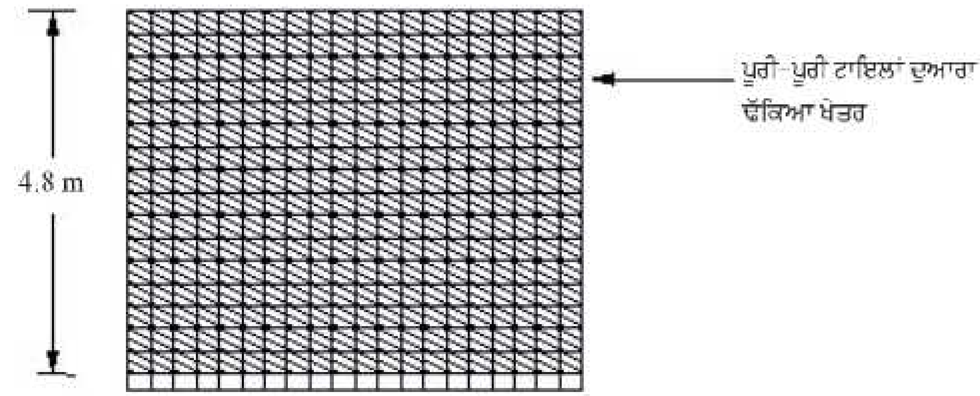
ਹੁਣ ਤੱਕ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਨਵੀ ਗੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸੇ ਗਏ ਪਗਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕ ਹੋਰ ਪਗ ਵਧਾ ਦਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਪਗ ਨੂੰ **ਵੈਧਤਾ (validation)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੈਧਤਾ ਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਉੱਤਰ ਵਾਸਵਿਕਤਾ ਨਾਲ ਮੇਲ ਨਾ ਖਾਂਦਾ ਹੋਵੇ। ਵਾਸਤਵਿਕਤਾ ਦੇ ਉਲਟ ਉਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਜਰੂਰੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਵੈਧਤਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦਾ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਪਗ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਪਗ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਾਵਾਂਗੇ।

ਇਸ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ, ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੈਧਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਸੁਧਾਰ (modification) ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ 6 ਮੀਟਰ ਲੰਬਾ ਅਤੇ 5 ਮੀਟਰ ਚੌੜਾ ਇੱਕ ਕਮਰਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਮਰੇ ਦੇ ਫਰਸ਼ 'ਤੇ 30 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਟਾਇਲਾਂ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ? ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਬਣਾ ਕੇ ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸੂਤਰੀਕਰਨ : ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਕਮਰੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਟਾਇਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਲੈਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਟਾਈਲ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 0.3 ਮੀਟਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 ਮੀਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ $\frac{6}{0.3} = 20$ ਟਾਇਲਾਂ ਲਗਾਇਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ A2.1)।



ਚਿੱਤਰ A 2.1

ਕਿਉਂਕਿ ਕਮਰੇ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 5 ਮੀਟਰ ਹੈ, ਅਤੇ $\frac{5}{0.3} = 16.67$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ 16 ਟਾਇਲਾਂ ਹੀ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ $16 \times 0.3 = 4.8$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਚੌੜਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $5 - 4.8 = 0.2$ ਮੀਟਰ ਸਥਾਨ ਤੇ ਟਾਇਲਾਂ ਨਹੀਂ ਲੱਗਣਗੀਆਂ, ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ (ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਵਿੱਚ) ਸਾਈਜ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਟਾਇਲਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਲਗਾਉਣਾ ਪਵੇਗਾ। ਟਾਇਲ ਤੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਢੱਕੇ ਫਰਸ਼ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 0.2 ਮੀਟਰ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਟਾਇਲ ਲੰਬਾਈ 0.3 m ਦੇ ਅੱਧੇ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਟਾਇਲ ਨੂੰ ਦੋ ਬਰਾਬਰ-ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਨੂੰ ਢੱਕਣ ਦੇ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਅੱਧੇ ਭਾਗਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ :

ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ = (ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ × ਚੌੜਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ) + ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਢੱਕੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (1)

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਪਰ ਕਹਿ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 20 ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 16 ਹੈ। ਆਖਰੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ 20 ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਹੋਰ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$$

ਵਿਆਖਿਆ : ਫਰਸ਼ 'ਤੇ ਲਗਾਉਣ ਲਈ 340 ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ।

ਵੈਧਤਾ : ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡਾ ਮਿਸਤਰੀ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲੋਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਟਾਇਲਾਂ ਮੰਗ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਈਜ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟਦੇ ਸਮੇਂ ਕੁਝ ਟਾਇਲਾਂ ਟੁੱਟ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਹਾਡਾ ਮਿਸਤਰੀ ਇਸ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾਂ ਕੁਸ਼ਲ ਹੈ ਉਸ ਤੇ ਹੀ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗੀ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਜਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮੋਟੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਨੁਮਾਨ (rough estimate) ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿੰਨੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਰੁੱਕ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਾਲ 2000 ਵਿੱਚ ਸੰਯੁਕਤ ਰਾਸ਼ਟਰ ਦੇ 191 ਮੈਂਬਰ ਦੇਸ਼ਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਘੋਸ਼ਣਾ-ਪੱਤਰ ਉੱਤੇ ਹਸਤਾਖਰ ਕੀਤੇ। ਆਪਣੀ ਘੋਸ਼ਣਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਾਰੇ ਦੇਸ਼ਾਂ ਨਾਲ 2015 ਤੱਕ ਕੁਝ ਵਿਕਾਸ ਉਦੇਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਹਿਮਤ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਉਦੇਸ਼ਾਂ ਨੂੰ *ਮਿਲੇਨਿਅਮ ਵਿਕਾਸ ਉਦੇਸ਼* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਲਿੰਗ ਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਉਤਸ਼ਾਹਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਦੇਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸੂਚਕ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ, ਮਾਧਮਿਕ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਪੱਧਰ (tertiary) ਦੀ ਸਿੱਖਿਆ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਘੋਸ਼ਣਾ ਪੱਤਰ ਤੇ ਹਸਤਾਖਰ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਦੇਸ਼ ਹੈ, ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅੰਕੜੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲਿਆ ਹੈ, ਸਾਰਣੀ A 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ A 2.1

ਸਾਲ	ਦਾਖਿਲਾ (% ਵਿੱਚ)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

ਸ੍ਰੋਤ : ਵਿਦਿਅਕ ਅੰਕੜੇ, ਵੈਬ ਪੇਜ, ਸਿੱਖਿਆ ਵਿਭਾਗ ਭਾਰਤ ਸਰਕਾਰ

* *ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜੇ ਆਰਜੀ ਹਨ।*

ਇਹਨਾਂ ਆਂਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹ ਦਰ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਕੀਤੀ ਗਈਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ। ਉਸ ਸਾਲ ਦਾ ਵੀ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉ ਜਦੋਂ ਭਰਤੀ ਕੀਤੀ ਗਈ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 50% ਤੱਕ ਪਹੁੰਚ ਜਾਵੇਗੀ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਈਏ।

ਪਗ 1 : ਸੂਤਰੀਕਰਨ : *ਸਾਰਣੀ* A2.1 ਵਿੱਚ ਸਾਲ 1991–92, 1992–93 ਆਦਿ ਦੇ ਦਾਖਿਲੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵਿਦਿਅਕ ਸਾਲ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਸਾਲਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ 1991, 1992 ਆਦਿ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈਣ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਉਸੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸਾਰਣੀ A2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ ਸਾਲ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਹੈ (ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੱਦ ਵੀ ਸੀ ਜਦੋਂ 8% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਸਾਲਾਂ ਲਈ 15000 ਰੁਪਏ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਕੋਈ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਤਿੰਨ ਸਾਲ ਦਾ ਸਮਾਂ 1999 ਤੋਂ 2003 ਤੱਕ ਹੈ ਜਾਂ 2001 ਤੋਂ 2004 ਹੈ। (ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦਰ ਦਾ ਹੋਣਾ)। ਇੱਥੇ ਹੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ 1991 ਤੋਂ ਬਾਦ ਦਾਖਿਲੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ। ਅਜਿਹਾ ਅਸੀਂ 1992 ਦੇ ਬਾਦ ਲੰਘ ਚੁੱਕੇ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਦਾਖਿਲੇ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਅਸੀਂ 1991 ਨੂੰ 0ਵਾਂ ਸਾਲ ਮੰਨ ਲਈਏ ਅਤੇ 1992 ਦੇ ਲਈ 1 ਲਿਖੋ, ਕਿਉਂਕਿ 1991 ਤੋਂ ਬਾਦ 1992 ਤੱਕ 1 ਸਾਲ ਨਿਕਲ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, 1993 ਦੇ ਲਈ 2, 1994 ਦੇ ਲਈ 3 ਆਦਿ ਲਿਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ, ਹੁਣ ਸਾਰਣੀ A2.1, ਸਾਰਣੀ A 2.2 ਦੇ ਸਮਾਨ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗੀ।

ਸਾਰਣੀ A2.2

ਸਾਲ	ਦਾਖਿਲਾ (% ਵਿੱਚ)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ਦਾਖਿਲੇ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਵਾਧਾ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:

ਸਾਰਣੀ A2.3

ਸਾਲ	ਦਾਖਿਲਾ (% ਵਿੱਚ)	ਵਾਧਾ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 ਤੋਂ 1992 ਤੱਕ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ 41.9% ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 42.6% ਹੋ ਗਿਆ। ਅਰਥਾਤ ਦਾਖਿਲੇ ਵਿੱਚ 0.7% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ। ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਵਿੱਚ 0.1% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹ 42.6% ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 42.7% ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵਾਧਾ ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੋਂ ਲਗਾਤਾਰ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਸਿਰਫ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਅਤੇ ਦਸਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਇਹ ਹੈ:

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਦਾਖਿਲੇ ਵਿੱਚ ਨਿਰੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (steadily) 0.22 ਪ੍ਰਤਿਸ਼ਤ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ : ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦਾਖਿਲਾ ਵਿੱਚ 0.22% ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਨਿਰੰਤਰ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ(EP) $= 41.9 + 0.22$

ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

ਤੀਜੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

ਇਸਲਈ, nਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ $= 41.9 + 0.22n$, ਜਿੱਥੇ $n \geq 1$ ਹੈ। (1)

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ 50% ਪਹੁੰਚ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ:

$$50 = 41.9 + 0.22n \tag{2}$$

ਪਗ 2 : ਹੱਲ : n ਦੇ ਲਈ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

ਪਗ 3 : ਵਿਆਖਿਆ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਗਲੀ ਉੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 37 ਲਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ, 1991 + 37 = 2028 ਵਿੱਚ ਦਾਖਲਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ 50% ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਸ਼ਬਦ ਸੱਮਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਤੱਕ ਹੀ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਕਿਸ ਸੀਮਾ ਤੱਕ ਇਹ ਮੁੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 4 : ਵੈਧਤਾ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੇਖੀਏ ਕਿ ਸੂਤਰ (2) ਵਾਸਤਵਿਕਤਾ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਸੂਤਰ (2) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਸਾਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੀਏ। ਸਾਰਣੀ A2.4 ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ A2.4

ਸਾਲ	ਦਾਖਿਲਾ (% ਵਿੱਚ)	(2) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲ (% ਵਿੱਚ)	ਅੰਤਰ (% ਵਿੱਚ)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸੂਤਰ (2) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਲਗਭਗ 0.3% ਤੋਂ 0.5% ਤੱਕ ਘੱਟ ਹਨ। ਇਸ ਨਾਲ ਲਗਭਗ 3 ਤੋਂ 5 ਸਾਲਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਹਰ ਸਾਲ ਵਾਧਾ 1% ਤੋਂ 2% ਤੱਕ ਹੈ ਏਨਾ ਅੰਤਰ ਸਵੀਕਾਰੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਹੀ ਰੁੱਕ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਡਾ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ (2) ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇਹ ਗਲਤੀ ਕਾਫ਼ੀ ਵੱਡੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਤੱਦ ਸਾਨੂੰ ਪਗ 1 ਤੇ ਮੁੜ ਜਾਣਾ ਪਵੇਗਾ। ਫਿਰ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਬਦਲਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕਰੀਏ।

ਪਗ 1 : **ਦੁਬਾਰਾ ਸੂਤਰੀਕਰਨ :** ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਵੀ ਇਹ ਮੰਨ ਲਵਾਂਗੇ ਕਿ ਦਾਖਿਲੇ ਦੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 0.22% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਲਤੀ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸੋਧ ਗੁਣਾਂਕ (correction factor) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਗਲਤੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਮੱਧਮਾਨ ਇਹ ਹੈ:

$$\frac{0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

ਅਸੀਂ ਗਲਤੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਆਪਣੀ ਗਲਤੀ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸੋਧਿਆ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ : ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ (1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦਾਖਿਲੇ ਪ੍ਰਤਿਸ਼ਤ ਦੇ ਲਈ ਆਪਣੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜੋੜ ਦੇਈਏ। ਇਸ ਲਈ ਮਾਤਰ ਸੋਧਿਆ ਹੋਇਆ ਸੂਤਰ ਇਹ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ:

nਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦਾਖਿਲਾ $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$, ਜਿੱਥੇ $n \geq 1$ (3)

ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਵੀ ਉਚਿਤ ਸੁਧਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। n ਵਿੱਚ ਸਾਡਾ ਨਵਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ:

$$50 = 42.08 + 0.22n \tag{4}$$

ਪਗ 2 : **ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੱਲ :** n ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ਪਗ 3 : **ਵਿਆਖਿਆ :** ਕਿਉਂਕਿ $n = 36$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਲ 1991 + 36 = 2027 ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਦਾਖਿਲਾ 50% ਤੱਕ ਪਹੁੰਚ ਜਾਵੇਗਾ।

ਪਗ 4 : **ਵੈਧਤਾ :** ਆਉ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਸੂਤਰ (4) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਕਰੀਏ। ਸਾਰਣੀ A 2.5 ਵਿੱਚ ਮੁੱਲ ਦੀ ਇਹ ਤੁਲਨਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ A2.5

ਸਾਲ	ਦਾਖਿਲਾ (% ਵਿੱਚ)	(2) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲ	ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਅੰਤਰ	(4) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲ	ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਅੰਤਰ
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ (2) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ (4) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੇਕਾਂ ਮੁੱਲ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ਦੇ ਅਧਿਕ ਨੇੜੇ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 0 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਮਾਪਣ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਹੀ ਰੋਕ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਸਾਡਾ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸਾਲਾਂ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਨਾਮਾਂਕਣ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਸ਼ਤ ਨਾਮਾਂਕਣ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਗਣਿਤਿਕ ਸਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਉਸਾਰ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਜਿਸ ਦਾ ਸਾਡੇ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਨੁਸਰਨ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ (mathematical modelling) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਉਪਲਬੱਧ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਉਸਾਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਉਪਲਬੱਧ ਆਂਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉੱਤਮ ਗਣਿਤਿਕ ਮਾਪਨ ਵੀ ਉਪਲੱਬਧ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਾਉਣਾ ਹੈ, ਨਾ ਕਿ ਇਸ ਪਗ ਤੇ ਸਹੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀਆਂ (accurate predictions) ਕਰਨਾ।

ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕੀਤੀ ਗਈ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾਂ ਸਮਝ ਸਕੇ ਹੋ, ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਇੱਕ ਅਭਿਆਸ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ A 2.2

1. ਉਲੰਪਿਕ ਖੇਡਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਤੋਂ 400 ਮੀਟਰ ਦੀ ਦੌੜ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਈ ਹੈ ਉਦੋਂ ਤੋਂ ਸੋਨ ਤਮਗਾ ਹਾਸਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲਿਆਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਸਮਾਂ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਾਲਾਂ ਅਤੇ ਸਮੇਂ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਬਣਾਉ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਗਲੇ ਉਲੰਪਿਕ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਮੇਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਕਰੋ:

ਸਾਰਣੀ A 2.6

ਸਾਲ	ਸਮਾਂ (ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A 2.4 ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਇਸਦੇ ਲਾਭ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਪਹਿਲੂਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਈਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ, ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਿਛਲਿਆਂ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਪਛੋਕੜ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆ ਗਏ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਪਗਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਖੇਪ ਸਾਧਾਰਨ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਪਗ 1 : **ਸੂਤਰੀਕਰਨ** : ਅਨੁਭਾਗ A 2.2 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੇ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਪਗ ਅਤੇ A 2.3 ਵਿੱਚ ਚਰਚਿਤ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦੇ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਪਗ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਤੁਰੰਤ ਉਪਯੋਗੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ A 2.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਸਮਾਂ ਵੀ ਲੱਗਿਆ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਜਿਥੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਇਹ ਉਨਾਂ ਉੱਤਮ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਨਾਂ ਕਿ ਦੂਜਾ ਸੀ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅਕਸਰ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਉਸ

ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਰਹੇ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿਚ ਅਕਸਰ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਨੂੰ ਸੋਧ ਕਰਨ ਦੀ ਵੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸੱਮਸਿਆ ਹਲ ਕਰ ਰਹੇ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਾਫੀ ਸਮਾਂ ਲੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਤਿੰਨ ਗਤੀ ਦੇ ਨਿਯਮ, ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਗਤੀ ਦੇ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ ਹਨ, ਦੇ ਕਥਨ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਾਫੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨਾ ਪਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਕਾਰਜਾਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਪਿਆ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਵ ਵਿਗਿਆਨਿਕਾਂ ਨੇ ਕੀਤੇ ਸਨ।

ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨ ਪਗ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

(i) **ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਕਥਨ :** ਅਕਸਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਕਥਨ ਮੋਟੇ ਤੋਰ ਤੇ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਲੜਕੇ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਦਾਖਿਲਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਕੂਲ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਉਮਰ ਦੇ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 50% ਅਤੇ ਸਕੂਲ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਉਮਰ ਦੀ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 50% ਦਾਖਿਲਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸ਼ੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਸਕੂਲ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 50% ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦੂਜੇ ਨਜ਼ਰੀਏ ਨੂੰ ਅਪਣਾਇਆ ਹੈ।

(ii) **ਸੁਸੰਗਤ ਕਾਰਕਾਂ ਦੀ ਪਛਾਣ :** ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਅਤੇ ਸਬੰਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਣਗੋਲਿਆਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲੇ ਸਬੰਧੀ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦਾਖਿਲ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ, ਇਸ ਸਾਲ ਦਾਖਿਲ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਹੋਰ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾਖਿਲ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਉਵੇਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲੱਗਣਗੇ ਕਿ ਉਹ ਵੀ ਆਪਣੀ ਲੜਕੀਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਕਰਾਉਣ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਕਾਰਕ ਨੂੰ ਅਣਗੋਲਿਆਂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਦਾਖਿਲ ਹੋ ਜਾਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੀ ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਸ ਕਾਰਕ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਹੋਰ ਵੀ ਜਟਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iii) **ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ :** ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਹਿਲੂ ਹੋਰ ਪਹਿਲੂਆਂ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਸੁਸੰਗਤ ਹੈ। ਤਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ, ਇੱਕ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਹੋਰ ਉਚਿਤ ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਪਹਿਲੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

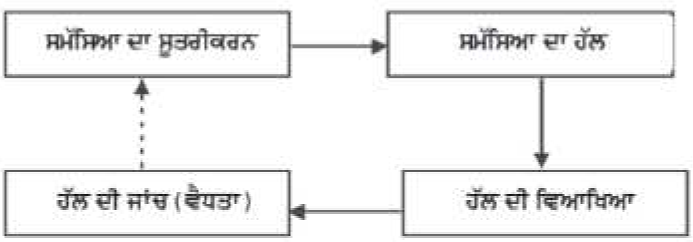
ਪਗ 2 : ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ : ਗਣਿਤਿਕ ਸੂਤਰੀ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਇਸ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮਤੁਲ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਸਾਡਾ ਗਣਿਤਿਕ ਗਿਆਨ ਉਪਯੋਗੀ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3 : **ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ :** ਗਣਿਤਿਕ ਹਲ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦੇ ਚਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਫਿਰ ਲੈਣਾ ਪਵੇਗਾ ਅਤੇ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ।

ਪਗ 4 : **ਹੱਲ ਦੀ ਵੈਧਤਾ :** ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ A 2.3 ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕਤਾ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਸਵੀਕਾਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਗਣਿਤਿਕ ਹੱਲ ਮੇਲ ਨਹੀਂ ਖਾਂਦਾ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਦੇ ਪਗ ਤੇ ਮੁੜ ਆ ਜਾਂਦੇ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਲਿਆਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਇਸ ਪਗ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇਕ ਵੱਡਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਇੱਕ ਮਹਤੱਵਪੂਰਣ ਪਗ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਹਾਂ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਅਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਸਰਲ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧਾ ਸਹੀ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਗ A2.3 ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਸੀ।

ਅਸੀਂ ਉਸ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਸਾਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਆਕ੍ਰਿਤੀ A 2.2 ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦੇ ਪਗ ਲਾਗੂ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਵੈਧਤਾ ਪਗ ਤੋਂ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਪਗ ਵੱਲ **ਬਿੰਦੂਨੁਮਾਂ ਤੀਰ** ਰਾਹੀਂ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਸ ਪਗ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ ਜਰੂਰੀ ਨਾ ਵੀ ਹੋਵੇ।



ਆਕ੍ਰਿਤੀ A 2.2

ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਪਗਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਕੁਝ ਪਹਿਲੂਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰ ਲਈਏ।

ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਗਤ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ, ਉਸਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਕੁਝ ਉਪਯੋਗੀ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਤਦੋਂ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਿੱਧੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਜਿਹੇ ਹੋਰ ਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਖਰਚੀਲਾ ਹੋਵੇ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕੇ ਹੈਰਾਨੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਉਂ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦੇ ਲਾਭ ਤੇ ਕੁਝ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਤਾਜ਼ ਮਹੱਲ ਤੇ ਮਥਰਾ ਰਿਫਾਇਨਰੀ ਦੇ ਨਿਕਾਸ ਤੋਂ ਖੌਰਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਤਾਜ਼ ਮਹਲ ਤੇ

ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤਾਜ਼ ਮਹਲ ਦਾ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਮਾਡਲ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੁਵਿਧਾਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਕਾਫੀ ਖਰਚੀਲੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਕਾਫੀ ਉਪਯੋਗੀ ਸਿੱਧ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ। ਤੱਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿਰਫ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਕਰਕੇ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਅਨੇਕਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ।

ਭਾਗ A2.4 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਉੱਤਮ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਦੂਜੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਲਿਆਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਉਥੇ ਰੁੱਕ ਗਏ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਨਹੀਂ ਸਨ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਕਸਰ ਸਾਨੂੰ ਲਗਭਗ ਉੱਤਰਾਂ ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਉਪਲਬੱਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੌਸਮ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਇੰਨੇ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਸਹੀ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਉਪਲਬੱਧ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਸੱਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਹੱਦ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਕਸਰ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਦੋਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਚਲ ਵਧਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਕਠਿਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਇੰਨਾਂ ਸਰਲ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਇੱਕ ਉੱਤਮ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦੋ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

1. ਪਰਿਸ਼ੁੱਧਤਾ (accuracy), ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕਤਾ ਦੇ ਕਿੰਨਾਂ ਨੇੜੇ ਹੈ।
2. ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਸਰਲਤਾ

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਗਤੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਕਾਫੀ ਸਰਲ, ਪਰੰਤੂ ਇੰਨੇ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਹਨ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਅਨੇਕ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਕੀ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ, ਬਿਲਕੁੱਲ ਨਹੀਂ? ਇਸ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਗੱਲ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸਿਰਫ *ਇੱਕ ਸਰਲੀਕਰਨ* ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ। ਇਹ ਬਹੁਤ ਕੁਝ ਉਸ ਅੰਤਰ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ਜਿਹੜਾ ਕਿਸੀ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਭੌਤਿਕ ਲੱਛਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਨਕਸ਼ੇ ਅਤੇ ਖੁਦ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਕਸੇ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਲ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ ਤਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਉਥੇ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸਤਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਪਦਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਿਰਫ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੀ ਉਸਾਰੀ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਅਣਗੌਲਿਆ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਿਰਫ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ

ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਗਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪਹਿਲੂ ਤੇ ਕੁਝ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਭਿਆਸ A 2.3

1. ਤੁਹਾਡੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਕੀ ਅੰਤਰ ਹੈ ?
2. ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਸੀਂ ਚੌਰਾਹੇ 'ਤੇ ਖੜੇ ਵਾਹਣਾਂ ਦੇ ਉਡੀਕ ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਕਾਰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (i) ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਕੀਮਤ।
   (ii) ਉਹ ਦਰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਚਾਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੜਕਾਂ ਤੋਂ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਾਹਣ ਚੌਰਾਹੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਸਾਇਕਲ ਅਤੇ ਰਿਕਸ਼ਾ ਆਦਿ ਵਰਗੇ ਧੀਮੀ ਗਤੀ ਨਾਲ ਚੱਲਣ ਵਾਲੇ ਵਾਹਣ ਅਤੇ ਕਾਰ ਤੇ ਮੋਟਰਸਾਇਕਲ ਜਿਹੇ ਤੇਜ਼ ਗਤੀ ਨਾਲ ਚੱਲਣ ਵਾਲੇ ਵਾਹਣਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ।

A 2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਸ਼ਬਦ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਪਗਾਂ ਤੇ ਮੁੜ ਝਾਤ ਮਾਰਨੀ।
2. ਕੁਝ ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਾਂ ਦੀ ਉਸਾਰੀ ਕਰਨਾ।
3. ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ:

> 1. **ਸੂਤਰੀਕਰਨ :**
>   (i) **ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਕਥਨ ਲਿਖਣਾ**
>   (ii) **ਸੁਸੰਗਤ ਕਾਰਕਾਂ ਦੀ ਪਛਾਣ**
>   (iii) **ਗਣਿਤਿਕ ਵਰਣਨ**
> 2. **ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।**
> 3. **ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਗਤ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ।**
> 4. **ਇਹ ਦੇਖਣਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਸੀਮਾਂ ਤੱਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਤਮ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ।**

4. ਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ ਦਾ ਉਦੇਸ਼, ਲਾਭ ਅਤੇ ਸੀਮਾਵਾਂ।