ਗਣਿਤ

(ਅੱਠਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

Z9C7K7

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ

ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ

ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

© ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2023-24 .... 2,34,000 ਕਾਪੀਆਂ

All rights, including those of translation, reproduction and annotation etc., are reserved by the Punjab Government

ਸੰਯੋਜਕ : **ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ**
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : **ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ**
ਚੀਫ ਆਰਟਿਸਟ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰਮਾਰਕ' ਵਾਲੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।)

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ
ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ
ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8 ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. **ਪਾਇਨੀਅਰ ਪ੍ਰਿੰਟਰਜ਼, ਆਗਰਾ** ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਮੁੱਖ-ਬੰਧ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਆਪਣੀ ਸਥਾਪਨਾ ਤੋਂ ਹੀ ਸਕੂਲ ਪੱਧਰ ਦੇ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਬਣਾਉਣ, ਰਾਸ਼ਟਰ ਅਤੇ ਰਾਜ ਪੱਧਰ 'ਤੇ ਬਦਲਦੀਆਂ ਵਿੱਦਿਅਕ ਲੋੜਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪਾਠ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਨਵਿਆਉਣ ਅਤੇ ਉਸ ਅਨੁਸਾਰ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ ਯਤਨਸ਼ੀਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੱਥਲੀ ਪੁਸਤਕ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਰਕਸ਼ਾਪਾਂ ਲਗਾ ਕੇ ਖੇਤਰੀ ਮਾਹਿਰਾਂ ਵੱਲੋਂ NCF-2005 ਅਤੇ PCF-2013 ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਦਿਲਚਸਪ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਪੂਰਾ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਬੋਰਡ, SCERT ਦੇ ਮਾਹਿਰਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਤਜ਼ਰੇਬਕਾਰ ਅਧਿਆਪਕਾਂ/ਮਾਹਿਰਾਂ ਦੇ ਸਹਿਯੋਗ ਨਾਲ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਬੋਰਡ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਭ ਦਾ ਧੰਨਵਾਦੀ ਹੈ।

ਲੇਖਕਾਂ ਵੱਲੋਂ ਇਹ ਪੂਰੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਰੂਪ-ਰੇਖਾ ਅੱਠਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਮੁਤਾਬਿਕ ਹੀ ਹੋਵੇ। ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਵਿਸ਼ਾ-ਸਮੱਗਰੀ ਅਤੇ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਦੇ ਵਾਤਾਵਰਨ ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਪ੍ਰਸਥਿਤੀਆਂ ਮੁਤਾਬਿਕ ਹੀ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਕਈ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਸਥਾਨਕ ਸਾਧਨਾਂ ਅਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਜੀਵਨ-ਸ਼ੈਲੀ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਦਲੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

ਆਸ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਇਹ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਦਿਲਚਸਪ ਅਤੇ ਲਾਹੇਵੰਦ ਸਿੱਧ ਹੋਵੇਗੀ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਨੂੰ ਬੋਰਡ ਆਦਰ ਸਹਿਤ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਮੇਟੀ

ਲੇਖਕ

- ਅਰੁਨ ਕੁਮਾਰ ਗਰਗ, ਸ.ਸ.ਸ. ਬਰ੍ਹੇ, ਮਾਨਸਾ
- ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਚੂੜੀ ਵਾਲਾ ਧੰਨਾ ਫਾਜਿਲਕਾ
- ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ ਸ.ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਕਰਨੀਖੇੜਾ, ਫਾਜਿਲਕਾ

ਸੋਧਕ

- ਜਤਿੰਦਰ ਕੁਮਾਰ ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਪੱਕਾ ਕਲਾਂ, ਬਠਿੰਡਾ
- ਕੁਮਾਰ ਗੌਰਵ, ਸ.ਹ.ਸ. ਮੁਹੇਮ, ਜਲੰਧਰ
- ਵਰੁਨ ਬਾਂਸਲ, ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਸਿੱਧੂਪੁਰ ਕਲਾਂ, ਫਤਿਹਗੜ੍ਹ ਸਾਹਿਬ
- ਕਪਿਲ ਦੇਵ ਸੋਨੀ, ਸ.ਮਿ.ਸ. ਰਾਮਗੜ੍ਹ (ਨਵਾਂ ਪਿੰਡ) ਖੰਨਾ, ਲੁਧਿਆਣਾ
- ਵਿਕਾਸ ਜੁਲਕਾ, ਸ.ਹਾਈ ਸ.ਸ. ਧਰਮਗੜ੍ਹ (ਲਾਲੜੂ) ਮੋਹਾਲੀ
- ਗੁਰਜੰਟ ਸਿੰਘ, ਸ਼ਹੀਦ ਸਿਪਾਹੀ ਗੁਰਬਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਸ. ਹਾਈ ਸਕੂਲ ਤੋਲਾਵਾਲ, ਸੰਗਰੂਰ
- ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਲਿਲੀਅਨ, ਸ.ਮਿ.ਸ. ਜਮੀਤਗੜ੍ਹ, ਪਟਿਆਲਾ
- ਨਵਨੀਤ ਕੱਕੜ, ਸ਼ਹੀਦ ਜਗਸੀਰ ਸਿੰਘ ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਬੋਹਾ, ਮਾਨਸਾ

ਅਨੁਵਾਦਕ

- ਵਰੁਨ ਬਾਂਸਲ ਸ.ਸ.ਸ.ਸ. ਸਿੱਧੂਪੁਰ ਕਲਾਂ, ਫਤਿਹਗੜ੍ਹ ਸਾਹਿਬ
- ਅਰੁਨ ਕੁਮਾਰ ਗਰਗ, ਸ.ਸ.ਸ. ਬਰ੍ਹੇ, ਮਾਨਸਾ

ਵਿਸ਼ਾ-ਸੂਚੀ

		ਪੰਨਾ ਨੰ :
ਅਧਿਆਇ 1	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾ	1-33
ਅਧਿਆਇ 2	ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ	34-42
ਅਧਿਆਇ 3	ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ	43-59
ਅਧਿਆਇ 4	ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ	60-89
ਅਧਿਆਇ 5	ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ	90-119
ਅਧਿਆਇ 6	ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ	120-129
ਅਧਿਆਇ 7	ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ	130-149
ਅਧਿਆਇ 8	ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਤਤਸਮਕ	150-174
ਅਧਿਆਇ 9	ਖੇਤਰਮਿਤੀ	175-205
ਅਧਿਆਇ 12	ਘਾਤ ਅੰਕ ਅਤੇ ਘਾਤ	206-217
ਅਧਿਆਇ 10	ਸਿੱਧਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ	218-232
ਅਧਿਆਇ 12	ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ	233-250
ਅਧਿਆਇ 13	ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ	251-265

ਅਧਿਆਇ 1

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ :

- *ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਬਾਰੇ ਜਾਣੋਗੇ।*
- *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਅਲੱਗ-2 ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਜਿਵੇਂ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ, ਵੰਡ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋਗੇ।*
- *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਲੱਗ-2 ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣੋਗੇ।*

1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੁਦਰਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Natural numbers) ਜਿਵੇਂ-1, 2, 3, 4, ... ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਕੁਦਰਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰ (0) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਕੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Whole number) 0, 1, 2, 3, ... ਬਣਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕੁਦਰਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Integers) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ .... –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕਿਰਿਆਵਾਂ : ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਉੱਥੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Rational Numbers) ਦੇ ਸੰਕਲਪ, ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਉੱਪਰ ਮੂਲ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਪਰ ਮੂਲ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-2 ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰੀਏ।

1.2 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Rational Numbers)

ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ $\frac{p}{q}$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਜਾਂ $\frac{p}{q}$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹੋਣ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$, ਜਿੱਥੇ p, q ਸਹਿ-ਅਭਾਜ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ $\frac{-2}{5}, \frac{10}{7}, \frac{-3}{8}, -3, 0$ ਆਦਿ।

- ਸਾਰੀਆਂ ਕੁਦਰਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਸਾਰੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 1.1

1.2.1 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of Rational Numbers)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਧਨਾਤਮਕ ਹਰ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ (ਲਘੂਤਮ (LCM) ਲੈ ਕੇ) ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.1 ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{9}+\left(\frac{-1}{9}\right)$ (iii) $\frac{-3}{11}+\frac{6}{11}$

(iv) $\frac{5}{-11}+\frac{7}{11}$ (v) $\frac{-4}{11}+\frac{-3}{11}$

ਹੱਲ : **(i)** $\frac{2}{7}+\frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$

(ii) $\frac{5}{9}+\left(\frac{-1}{9}\right) = \frac{5}{9}-\frac{1}{9} = \frac{5-1}{9} = \frac{4}{9}$

(iii) $\frac{-3}{11}+\frac{6}{11} = \frac{-3+6}{11} = \frac{3}{11}$

(iv) $\frac{5}{-11}+\frac{7}{11} = \frac{-5}{11}+\frac{7}{11}$

$= \frac{-5+7}{11} = \frac{2}{11}$

(v) $\frac{-4}{11}+\frac{-3}{11} = \frac{-4}{11}-\frac{3}{11}$

$= \frac{-4-3}{11} = \frac{-7}{11}$

ਉਦਾਹਰਨ 1.2 ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{5}{12}+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-3}{8}+\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{3}{10}+\frac{-2}{5}$

(iv) $\frac{-5}{8}+\frac{-7}{12}$ (v) $\frac{-7}{15}+\frac{-3}{20}$

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਸਵਾਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲਘੂਤਮ ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) $\frac{5}{12}+\frac{3}{4}$

ਅਸੀਂ $\frac{5}{12}$ ਅਤੇ $\frac{3}{4}$ ਨੂੰ, ਇਹਨਾ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹਰ 12 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

2	12, 4
2	6, 2
	3, 1

12 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. $2\times2\times3=12$

ਇੱਥੇ, $\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}$

$\frac{5}{12}+\frac{3}{4} = \frac{5}{12}+\frac{9}{12}$

$= \frac{5+9}{12}$

$= \frac{14}{12}$ (14 ਅਤੇ 12 ਕੱਟ ਕੇ 7 ਅਤੇ 6)

$= \frac{7}{6}$

ਜਾਂ $\frac{5}{12}+\frac{3}{4} = \frac{(5\times1)+(3\times3)}{12}$

$12\div12=1$

$12\div4=3$

$= \frac{5+9}{12}$

$= \frac{14}{12}$

$= \frac{7}{6}$

(ii) $\frac{-3}{8}+\frac{5}{6}$

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ $\frac{-3}{8}$ ਅਤੇ $\frac{5}{6}$ ਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹਰ 8 ਅਤੇ 6 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

2	8, 6
2	4, 3
	2, 3

8 ਅਤੇ 6 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. $=2\times2\times2\times3=24$

ਇੱਥੇ, $\frac{-3}{8}=\frac{-3\times3}{8\times3}=\frac{-9}{24}$

ਅਤੇ $\frac{5}{6} = \frac{5\times4}{6\times4} = \frac{20}{24}$

$\therefore \quad \frac{-3}{8}+\frac{5}{6} = \frac{-9}{24}+\frac{20}{24}$

$= \frac{-9+20}{24}$

$= \frac{11}{24}$

ਜਾਂ

$\frac{-3}{8}+\frac{5}{6} = \frac{(-3\times3)+(5\times4)}{24}$

$= \frac{-9+20}{24}$

$= \frac{11}{24}$

$24 \div 8 = 3$

$24 \div 6 = 4$

(iii) $\frac{3}{10}+\frac{-2}{5}$

ਹਰ 10 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

5	10, 5
	2, 1

10 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. $= 5 \times 2 = 10$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\frac{3}{10}$ ਅਤੇ $\frac{-2}{5}$ ਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਲ.ਸ.ਵ. ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਇੱਥੇ, $\frac{-2}{5} = \frac{-2\times2}{5\times2} = \frac{-4}{10}$

$\frac{3}{10}+\frac{-2}{5} = \frac{3}{10}+\frac{-4}{10}$

$= \frac{3}{10}-\frac{4}{10}$

$= \frac{3-4}{10}$

$= \frac{-1}{10}$

ਜਾਂ $\frac{3}{10}+\frac{-2}{5} = \frac{(3\times1)+(-2\times2)}{10}$

$= \frac{3+(-4)}{10}$

$= \frac{3-4}{10}$

$= \frac{-1}{10}$

(iv) $\frac{-5}{8}+\frac{-7}{12}$

ਹਰ 8 ਅਤੇ 12 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

2	8, 12
2	4, 6
	2, 3

8 ਅਤੇ 12 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\frac{-5}{8}$ ਅਤੇ $\frac{-7}{12}$ ਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

$$\frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{-15}{24}$$

$$\frac{-7}{12} = \frac{-7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{-14}{24}$$

$$\therefore \quad \frac{-5}{8} + \frac{-7}{12} = \frac{-15}{24} + \frac{-14}{24}$$

$$= \frac{(-15) + (-14)}{24}$$

$$= \frac{-15 - 14}{24}$$

$$= \frac{-29}{24}$$

ਜਾਂ $\frac{-5}{8} + \frac{-7}{12} = \frac{-5}{8} + \frac{-7}{12}$

$$= \frac{(-5 \times 3) + (-7 \times 2)}{24}$$

$$= \frac{-15 - 14}{24}$$

$$= \frac{-29}{24}$$

(iv) $\frac{-7}{15} + \frac{-3}{20}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\frac{-7}{15}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{20}$ ਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹਰ 15 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

5	15, 20
	3, 4

15 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.
$= 5 \times 3 \times 4 = 60$

ਇੱਥੇ, $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \times 4}{15 \times 4} = \frac{-28}{60}$

ਅਤੇ $\frac{-3}{20} = \frac{-3 \times 3}{20 \times 3} = \frac{-9}{60}$

$$\therefore \quad \frac{-7}{15} + \frac{-3}{20} = \frac{-28}{60} + \frac{-9}{60}$$

$$= \frac{-28 + (-9)}{60}$$

$$= \frac{-28 - 9}{60}$$

$$= \frac{-37}{60}$$

ਜਾਂ $\frac{-7}{15} + \frac{-3}{20} = \frac{(-7 \times 4) + (-3 \times 3)}{60}$

$$= \frac{-28 - 9}{60}$$

$$= \frac{-37}{60}$$

1.2.2 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਗੁਣ : (Properties of Addition of Rational Numbers) :

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਗੁਣ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਵਰਗੇ ਹਨ, ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

- **ਬੰਦ ਗੁਣ (Closure Property)** : ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ, ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

  ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ :

  (i) $\frac{-2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{-10+12}{15}=\frac{2}{15}$, ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

  (ii) $\frac{5}{8}+\frac{-3}{4}=\frac{5+(-6)}{8}=\frac{5-6}{8}=\frac{-1}{8}$, ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

- **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (Commutative Peroperty)** : ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਇੱਕੋ ਉੱਤਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

  ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

  ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ, ਜੇਕਰ $\frac{-3}{8}$ ਅਤੇ $\frac{5}{6}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

  $$\frac{-3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{-9+20}{24}=\frac{11}{24}$$

  ਅਤੇ $\frac{5}{6}+\left(\frac{-3}{8}\right)=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{20-9}{24}=\frac{11}{24}$

  $$\frac{-3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\left(\frac{-3}{8}\right)$$

- **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ (Associative Property)** : ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ, ਫਿਰ ਤੀਸਰੀ ਜੋੜੀ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਤੇ ਤੀਸਰੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਫਿਰ ਪਹਿਲੀ ਜੋੜੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉੱਤਰ ਇੱਕੋ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

  ਜੇ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ਅਤੇ $\frac{e}{f}$ (b, d ਅਤੇ $f \neq 0$) ਤਾਂ $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$

  ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $\frac{-5}{6}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\left(\frac{-2+3}{4}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)$$

$$=\frac{3+(-10)}{12}=\frac{3-10}{12}=\frac{-7}{12}$$

ਅਤੇ $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-1}{2}+\left(\frac{9+(-10)}{12}\right)=\frac{-1}{2}+\left(\frac{9-10}{12}\right)$

$$=\frac{-1}{2}+\left(\frac{-1}{12}\right)=\frac{(-1\times 6)+(-1\times 1)}{12}=\frac{-6+(-1)}{12}$$

$$=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{-5}{6}\right)$$

- **ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (Additive Identity) :** ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 0 ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਉਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$, $(b\neq 0)$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}=0+\frac{a}{b}$ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ '0' ਇੱਕ ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।
- **ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ (Additive Inverse) :** ਜਦੋਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਉੱਤਰ ਸਿਫ਼ਰ (0) (ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ) ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\left(\frac{-a}{b}\right)$ ਹੈ।

ਤਾਂ ਜੋ $\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0=\left(\frac{-a}{b}\right)+\frac{a}{b}$

ਤਾਂ $\frac{-a}{b}$ ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਅਤੇ $\frac{a}{b}$ ਨੂੰ $\frac{-a}{b}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{2+(-2)}{3}=\frac{2-2}{3}=\frac{0}{3}=0$

ਅਤੇ $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{-2+2}{3}=\frac{0}{3}=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)=0=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \frac{2}{3}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{-2}{3}$ ਅਤੇ $\frac{-2}{3}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.3 ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਜੋੜ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

(i) $\frac{-5}{12}$ ਅਤੇ $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{2}{-7}$ ਅਤੇ $\frac{-11}{21}$

ਹਰ 12 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ.

2	12, 8
2	6, 4
	3, 2

12 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

ਹੱਲ : (i) $\frac{-5}{12}$ ਅਤੇ $\frac{3}{8}$

ਹੁਣ $\frac{-5}{12}+\frac{3}{8} = \frac{(-5\times2)+(3\times3)}{24}$

$= \frac{-10+9}{24} = \frac{-1}{24}$

ਅਤੇ $\frac{3}{8}+\left(\frac{-5}{12}\right) = \frac{(3\times3)+(-5\times2)}{24} = \frac{9+(-10)}{24} = \frac{9-10}{24}$

$= \frac{-1}{24}$

$\therefore \quad \frac{-5}{12}+\frac{3}{8} = \frac{3}{8}+\left(\frac{-5}{12}\right)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਥੇ ਜੋੜ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii)ਇੱਥੇ, $\frac{2}{-7}$ ਅਤੇ $\frac{-11}{21}$

ਹਰ 7, 21 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

7	7, 21
	1, 3

7 ਅਤੇ 21 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.

$= 7 \times 3 = 21$

ਹੁਣ $\frac{2}{-7}+\left(\frac{-11}{21}\right) = \frac{-2}{7}+\left(\frac{-11}{21}\right)$

$= \frac{(-2\times3)+(-11\times1)}{21} = \frac{-6+(-11)}{21}$

$= \frac{-6-11}{21} = \frac{-17}{21}$

ਅਤੇ $\frac{-11}{21}+\frac{2}{-7} = \frac{-11}{21}+\frac{(-2)}{7}$

$= \frac{(-11\times1)+(-2\times3)}{21} = \frac{-11+(-6)}{21} = \frac{-11-6}{21} = \frac{-17}{21}$

$$\therefore \quad \frac{2}{-7}+\left(\frac{-11}{21}\right) = \frac{-11}{21}+\frac{2}{-7}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.4 ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦੇ ਸਹਿਚਰ ਗੁਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

(i) $\frac{5}{3}, \frac{1}{6}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{5}$ **(ii)** $-4, \frac{3}{7}$ ਅਤੇ $\frac{-4}{5}$

ਹੱਲ :(i) $\frac{5}{3}, \frac{1}{6}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{5}$

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right) = \left[\frac{(5\times 2)+(1\times 1)}{6}\right]+\left(\frac{-3}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{10+1}{6}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right)$$

3	3, 6
	1, 2

3 ਅਤੇ 6 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.
$= 3 \times 2 = 6$

$$= \frac{11}{6}+\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{(11\times 5)+(-3\times 6)}{30}$$

2	6, 5
	3, 5

6 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.
$= 2 \times 3 \times 5 = 30$

$$= \frac{55+(-18)}{30}$$

$$= \frac{55-18}{30} = \frac{37}{30}$$

ਅਤੇ $\frac{5}{3}+\left[\frac{1}{6}+\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{5}{3}+\left[\frac{(1\times 5)+(-3\times 6)}{30}\right]$

3	3, 30
	1, 10

3 ਅਤੇ 30 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ.
$= 3 \times 10 = 30$

$$= \frac{5}{3}+\left(\frac{5+(-18)}{30}\right)$$

$$= \frac{5}{3}+\left(\frac{5-18}{30}\right)$$

$$= \frac{5}{3}+\left(\frac{-13}{30}\right)$$

$$= \frac{(5\times 10)+(-13\times 1)}{30} = \frac{50+(-13)}{30}$$

$$= \frac{50-13}{30}$$

$$= \frac{37}{30}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{5}{3}+\left(\frac{1}{6}+\left(\frac{-3}{5}\right)\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ, $-4, \frac{3}{7}$ ਅਤੇ $\frac{-4}{5}$

ਹੁਣ $\left(\frac{-4}{1}+\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{-4}{5}\right)=\left(\frac{-28+3}{7}\right)+\left(\frac{-4}{5}\right)$ (1 ਅਤੇ 7 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. = 7)

$$= \frac{-25}{7}+\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-125+(-28)}{35}$$ (7 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. = 35)

$$= \frac{-125+(-28)}{35} = \frac{-153}{35}$$

ਅਤੇ $-4+\left(\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{5}\right)\right)=-4+\left(\frac{15+(-28)}{35}\right)$ (7 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਲ. ਸ. ਵ. = 35)

$$= -4+\left(\frac{15-28}{35}\right) = -4+\left(\frac{-13}{35}\right)$$

$$= \frac{-140+(-13)}{35} = \frac{-140-13}{35}=\frac{-153}{35}$$

$$\therefore \quad \left(-4+\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{-4}{5}\right) = -4+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{5}\right)\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.5 ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $\frac{-3}{5}+\frac{7}{6}+\frac{-2}{5}+\frac{5}{6}$ **(ii)** $\frac{-2}{3}+\frac{7}{5}+\frac{4}{3}+\frac{-4}{5}+(-3)$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉ ਤਾਂ ਜੋ ਬਰਾਬਰ ਹਰ ਵਾਲੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇੱਕਠੀਆਂ ਹੋ ਜਾਣ।

$$\frac{-3}{5}+\frac{7}{6}+\frac{-2}{5}+\frac{5}{6} = \left(\frac{-3}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right)\right)+\left(\frac{7}{6}+\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{-3+(-2)}{5}+\frac{7+5}{6} = \frac{-5}{5}+\frac{12}{6}$$

$$= -1+2=1$$

(ii) ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉ ਤਾਂ ਜੋ ਬਰਾਬਰ ਹਰ ਵਾਲੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇੱਕਠੀਆਂ ਹੋ ਜਾਣ।

$$\frac{-2}{3}+\frac{7}{5}+\frac{4}{3}+\frac{-4}{5}+(-3)=\left(\frac{-2}{3}+\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{7}{5}+\frac{-4}{5}\right)+(-3)$$

$$=\frac{-2+4}{3}+\frac{7+(-4)}{5}+(-3)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+(-3)\quad=\frac{10+9+(-45)}{15}$$

$$=\frac{10+9-45}{15}=\frac{-26}{15}$$

ਉਦਾਹਰਨ 1.6 ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{-5}{13}$ **(ii)** $\frac{3}{-10}$ **(iii)** $\frac{-7}{-9}$

ਹੱਲ : (i) $\frac{-5}{13}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $=-\left(\frac{-5}{13}\right)=\frac{5}{13}$

(ii) $\frac{3}{-10}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $=-\left(\frac{3}{-10}\right)=-\left(\frac{-3}{10}\right)=\frac{3}{10}$

(iii) $\frac{-7}{-9}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $=-\left(\frac{-7}{-9}\right)=-\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{-7}{9}$

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{-5}{6}+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{6}{11}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ (iii) $\frac{-5}{24}+\frac{7}{12}$ (iv) $\frac{-11}{12}+\frac{7}{8}$

(v) $\frac{-3}{10}+\left(\frac{-7}{15}\right)$ (vi) $\frac{-5}{7}+\frac{3}{14}$ (vii) $\frac{7}{6}+\left(\frac{-5}{9}\right)$ (viii) $\frac{-11}{15}+\frac{21}{25}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

(i) $\frac{-5}{8}$ ਅਤੇ $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-2}{5}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{15}$ (iii) $\frac{-7}{10}$ ਅਤੇ $\frac{8}{15}$

(iv) $\frac{-11}{14}$ ਅਤੇ $\frac{17}{21}$ (v) -5 ਅਤੇ $\frac{2}{3}$

3. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਈ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਭਾਵ $(x + y) + z = x + (y + z)$ ।

(i) $x = \frac{-2}{3}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{5}{6}$ (ii) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{5}{8}$

(iii) $x = 2, y = \frac{-5}{12}, z = \frac{-3}{8}$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{-5}{11}$ (ii) $\frac{8}{9}$ (iii) $\frac{-15}{13}$ (iv) $\frac{-2}{-9}$

(v) $\frac{3}{-8}$ (vi) $\frac{2}{-7}$ (vii) $\frac{-18}{-11}$ (viii) 0

5. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $\frac{2}{5} + \left(\frac{-7}{3}\right) + \frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{-3}{8} + \frac{4}{7} + \frac{2}{8} + \left(\frac{-3}{7}\right)$

(iii) $\left(\frac{-6}{7}\right) + \left(\frac{-4}{9}\right) + \left(\frac{-15}{7}\right) + \left(\frac{-5}{6}\right)$ (iv) $\frac{2}{3} + \frac{-4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{3}$

(v) $\frac{-1}{8} + \frac{5}{12} + \frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{-5}{16}$

6. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ, ਜੋੜ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਹੈ ?

(a) $x \times y = y \times x$ (b) $(x+y) = (y+x)$

(c) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (d) $(x-y) = (y-x)$

(ii) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ, ਜੋੜ ਦਾ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ ਹੈ ?

(a) $x \times y = y \times x$ (b) $x + y = y + x$

(c) $(x+y) + z = x + (y + z)$ (d) $x - y = y - x$

(iii) $\frac{-5}{-9}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ

(a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{5}{-9}$ (c) 0 (d) $\frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{2}{3}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ

(a) 0 (b) $\frac{-2}{3}$ (c) $\frac{-2}{-3}$ (d) $\frac{3}{2}$

1.3 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਟਾਉ (Subtraction of Rational Numbers) :

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਟਾਓ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲਘੂਤਮ ਲੈ ਕੇ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਹਰ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.7 ਘਟਾਓ—

(i) $\frac{5}{7}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{2}{5}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-3}{10}$

(iv) $\frac{-3}{4}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-5}{6}$ (v) $\frac{-7}{10}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{7}{15}$

ਹੱਲ : (i) $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}$

(ii) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{8}=\frac{-3-5}{8}=\frac{-8}{8}=-1$

(iii) $\frac{2}{5}-\left(\frac{-3}{10}\right)=\frac{4-(-3)}{10}=\frac{4+3}{10}=\frac{7}{10}$

(iv) $\frac{-3}{4}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-9-(-10)}{12}=\frac{-9+10}{12}=\frac{1}{12}$

(v) $\frac{-7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{-21-14}{30}=\frac{-35}{30}=\frac{-7}{6}$

1.3.1 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Subtraction of Rational Numbers)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਗੁਣ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਵਰਗੇ ਹਨ, ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖੇ ਹਨ।

- **ਬੰਦ ਗੁਣ (Closure Property) :** ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਟਾਉ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ $(b, d \neq 0)$ ਤਾਂ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।

(i) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5-4}{6}=\frac{1}{6}$, ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) $\frac{-3}{8}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-9-(-20)}{24}=\frac{-9+20}{24}=\frac{11}{24}$, ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iii) $\frac{7}{10}-\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{7-(-4)}{10}=\frac{7+4}{10}=\frac{11}{10}$, ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

- **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (Commutative Property) :** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਨਹੀਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $\frac{5}{4}-\frac{3}{5} = \frac{25-12}{20}=\frac{13}{20}$

ਅਤੇ $\frac{3}{5}-\frac{5}{4} = \frac{12-25}{20}=\frac{-13}{20}$

$\therefore \frac{5}{4}-\frac{3}{5} \neq \frac{3}{5}-\frac{5}{4}$

- **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ (Associative Property) :** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਟਾਉ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇ $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ ਅਤੇ $\frac{e}{f}$; b, d, f ≠ 0, ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}\neq\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)$$

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}=\left(\frac{9-8}{12}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1-6}{12}=\frac{-5}{12}$

ਅਤੇ $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) =\frac{3}{4}-\frac{4-3}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12}$

$\therefore \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

- **ਤਤਸਮਕ (Identity) ਦੀ ਹੋਂਦ:** ਘਟਾਉ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਾਉ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਨਹੀਂ ਲੱਗਦਾ।
ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $a-0=a$ ਪ੍ਰੰਤੂ $0-a\neq a$ ਇਸ ਲਈ ਘਟਾਉ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.8 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x-y\neq y-x$ ਜੇਕਰ**

(i) $x=\frac{-2}{5}, y=\frac{-3}{4}$ **(ii)** $x=\frac{5}{12}, y=\frac{-7}{8}$

ਹੱਲ : (i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x-y = \frac{-2}{5}-\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{-2}{5}+\frac{3}{4}$

$=\frac{-8+15}{20}=\frac{7}{20}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y-x = \frac{-3}{4}-\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{-15-(-8)}{20}=\frac{-15+8}{20}$

$= \frac{-7}{20}$

∴ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

$x-y \neq y-x$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ: $x-y = \frac{5}{12}-\left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{10-(-21)}{24}$

$= \frac{10+21}{24} = \frac{31}{24}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y-x = \frac{-7}{8}-\frac{5}{12} = \frac{-21-10}{24} = \frac{-31}{24}$

∴ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $x-y \neq y-x$

ਉਦਾਹਰਨ 1.9 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $(x-y)-z \neq x-(y-z)$ ਜੇਕਰ**

(i) $x = \frac{-2}{3}, y = \frac{5}{8}, z = \frac{-7}{12}$ (ii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{-2}{5}, z = \frac{3}{10}$

ਹੱਲ : (i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $(x-y)-z = \left(\frac{-2}{3}-\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{-7}{12}\right)$

$= \frac{-16-15}{24}-\left(\frac{-7}{12}\right) = \frac{-31}{24}-\left(\frac{-7}{12}\right)$

$= \frac{-31-(-14)}{24} = \frac{-31+14}{24} = \frac{-17}{24}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $x-(y-z) = \frac{-2}{3}-\left(\frac{5}{8}-\left(\frac{-7}{12}\right)\right)$

$= \frac{-2}{3}-\left(\frac{15-(-14)}{24}\right) = \frac{-2}{3}-\left(\frac{15+14}{24}\right)$

$= \frac{-2}{3}-\frac{29}{24} = \frac{-16-29}{24} = \frac{-45}{24}$

∴ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $(x-y)-z \neq x-(y-z)$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $(x-y)-z = \left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-2}{5}\right)\right)-\frac{3}{10}$

$= \frac{5-(-4)}{10}-\frac{3}{10} = \frac{5+4}{10}-\frac{3}{10} = \frac{9}{10}-\frac{3}{10}$

$= \frac{9-3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ: $x-(y-z)$ $= \frac{1}{2}-\left(\frac{-2}{5}-\frac{3}{10}\right)$

$$= \frac{1}{2}-\left(\frac{-4-3}{10}\right) = \frac{1}{2}-\left(\frac{-7}{10}\right) = \frac{5-(-7)}{10} = \frac{5+7}{10}$$

$$= \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

∴ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $(x-y)-z \neq x-(y-z)$

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਘਟਾਓ :-

(i) $\frac{4}{5}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{7}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-3}{7}$ (iii) $\frac{3}{4}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-5}{8}$ (iv) $\frac{5}{14}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-8}{21}$

(v) $\frac{-8}{15}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-7}{10}$ (vi) $\frac{5}{6}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{6}{11}$ (vii) $\frac{-5}{12}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{-3}{4}$ (viii) $\frac{-8}{25}$ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{13}{10}$

2. ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x-y \neq y-x$ ਜੇ

(i) $x=\frac{-5}{12}, y=\frac{-3}{8}$ (ii) $x=\frac{7}{15}, y=\frac{-3}{10}$

(iii) $x=\frac{-15}{16}, y=\frac{7}{12}$ (iv) $x=\frac{-3}{4}, y=\frac{-5}{6}$ ਹੋਵੇ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ $(x-y)-z \neq x-(y-z)$ ਜੇ

(i) $x=\frac{-7}{12}, y=\frac{-3}{4}, z=\frac{2}{3}$ (ii) $x=\frac{3}{8}, y=\frac{-2}{5}, z=\frac{-7}{10}$

(iii) $x=\frac{-1}{2}, y=\frac{-5}{4}, z=\frac{3}{8}$ ਹੋਵੇ।

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ—

(i) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{-11}{2}+\frac{7}{6}-\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{-4}{5}-\left(\frac{-7}{10}\right)+\left(\frac{-8}{15}\right)$

(iv) $\frac{-2}{5}-\left[\frac{-3}{10}-\left(\frac{-4}{15}\right)\right]$ (v) $\frac{3}{8}-\left(\frac{-2}{9}\right)+\left(\frac{5}{-36}\right)$

1.4 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ (Multiplication of Rational Numbers) :

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਦੋ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਭਿੰਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਹਰ ਦਿੱਤੇ ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ} = \frac{\text{ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}}{\text{ਹਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}}$$

ਇਹ ਨਿਯਮ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ 'ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\therefore \quad \text{ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ} = \frac{\text{ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}}{\text{ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}}$$

ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ $(b, d \neq 0)$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ

ਤਾਂ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.10 ਗੁਣਾ ਕਰੋ—

(i) $\frac{3}{4}$ ਦੀ $\frac{5}{11}$ ਨਾਲ **(ii)** $\frac{-2}{3}$ ਦੀ $\frac{5}{9}$ ਨਾਲ **(iii)** $\left(\frac{-7}{8}\right)$ ਦੀ 5 ਨਾਲ

(iv) $\left(\frac{-5}{8}\right)$ ਦੀ $\frac{4}{3}$ ਨਾਲ **(v)** $\left(\frac{-10}{7}\right)$ ਦੀ $\left(\frac{-14}{15}\right)$ ਨਾਲ

ਹੱਲ :

(i) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{11} = \frac{3 \times 5}{4 \times 11} = \frac{15}{44}$

(ii) $\left(\frac{-2}{3}\right) \times \frac{5}{9} = \frac{(-2) \times 5}{3 \times 9} = \frac{-10}{27}$

(iii) $\left(\frac{-7}{8}\right) \times 5 = \frac{-7}{8} \times \frac{5}{1} = \frac{-7 \times 5}{8 \times 1} = \frac{-35}{8}$

(iv) $\left(\frac{-5}{8}\right) \times \frac{4}{3} = \frac{(-5) \times \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \times 3} = \frac{-5}{6}$

(v) $\left(\frac{-10}{7}\right) \times \left(\frac{-14}{15}\right) = \frac{\left(-\overset{2}{\cancel{10}}\right) \times \left(-\overset{2}{\cancel{14}}\right)}{\underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{4}{3}$

ਉਦਾਹਰਨ 1.11 ਸਰਲ ਕਰੋ :

(i) $\left(\frac{-8}{9}\right)\times\frac{3}{64}$ (ii) $\left(\frac{-9}{16}\right)\times\left(\frac{-64}{27}\right)$ (iii) $\left(\frac{-10}{9}\right)\times\left(\frac{36}{-25}\right)$

(iv) $\frac{15}{32}\times\left(\frac{-18}{25}\right)$ (v) $\frac{13}{20}\times\left(\frac{25}{-26}\right)$

ਹੱਲ : (i) $\left(\frac{-8}{9}\right)\times\frac{3}{64}=\frac{((-8)\times 3)}{9\times 64}=\frac{-1}{24}$

(ii) $\left(\frac{-9}{16}\right)\times\left(\frac{-64}{27}\right)=\frac{(-9)\times(-64)}{16\times 27}=\frac{4}{3}$

(iii) $\left(\frac{-10}{9}\right)\times\left(\frac{36}{-25}\right)=\frac{(-10)\times 36}{9\times(-25)}=\frac{8}{5}$

(iv) $\frac{15}{32}\times\left(\frac{-18}{25}\right)=\frac{15\times(-18)}{32\times 25}=\frac{-27}{80}$

(v) $\frac{13}{20}\times\left(\frac{25}{-26}\right)=\frac{13\times 25}{20\times(-26)}=\frac{-5}{8}$

1.4.1 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Multiplication of Rational Numbers) :

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਗੁਣ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਵਰਗੇ ਹਨ ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

- **ਬੰਦ ਗੁਣ (Closure Property) :** ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ, ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ $(b, d \neq 0)$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।

(i) $\frac{-5}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{-5\times 3}{8\times 4}=\frac{-15}{32}$ ਜੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) $\frac{-10}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{-10\times 3}{9\times 5}=\frac{-2}{3}$ ਜੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

▪ **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (Commutative Property) :** ਜੇਕਰ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕੋ ਉੱਤਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ (b, d ≠ 0) ਤਾਂ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ : ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{-5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{2}{3}$ ਲਉ।

ਤਾਂ $$\left(\frac{-5}{6}\right)\times\frac{2}{3} = \frac{(-5)\times\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}\times 3} = \frac{-5}{9}$$

ਅਤੇ $$\frac{2}{3}\times\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{\cancel{2}^{1}\times(-5)}{3\times\cancel{6}_{3}} = \frac{-5}{9}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{-5}{6}\right)\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{-5}{6}\right)$$

▪ **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ (Associative Property) :** ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ, ਫਿਰ ਤੀਸਰੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਜਾਂ ਦੂਸਰੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ, ਫਿਰ ਪਹਿਲੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਉੱਤਰ ਇੱਕੋ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

ਜੇ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ (b, d, f ≠ 0) ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ

ਤਾਂ $$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)$$

ਉਦਾਹਰਨ : ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{-5}{8}, \frac{4}{9}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{10}$ ਲਉ।

$$\left(\frac{-5}{8}\times\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{(-5)\times\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}\times 9}\times\left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{-5}{18}\times\left(\frac{-3}{10}\right)$$

$$= \frac{\left(-\cancel{5}^{1}\right)\times\left(-\cancel{3}^{1}\right)}{\cancel{18}_{6}\times\cancel{10}_{2}} = \frac{1}{12}$$

ਅਤੇ $$\left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\left(\frac{-3}{10}\right)\right) = \left(\frac{-5}{8}\right)\times\frac{\cancel{4}^{2}\times\left(-\cancel{3}^{1}\right)}{\cancel{9}_{3}\times\cancel{10}_{5}}$$

$$= \left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{-2}{15}\right) = \frac{\left(-\cancel{5}^{1}\right)\times\left(-\cancel{2}^{1}\right)}{\cancel{8}_{4}\times\cancel{15}_{3}} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{-5}{8}\times\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{-3}{10}\right) = \left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\left(\frac{-3}{10}\right)\right)$$

• **ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (Multiplicative Identity) :** ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ 1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$, $(b \neq 0)$ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $1\times\frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}\times 1$

$\therefore$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ 1 ਹੈ।

• **ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ (Multiplicative Inverse) :** ਜਦੋਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 1 (ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ) ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a}\times\frac{a}{b}$$

> ਨੋਟ:— 0 ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ 0 ਦਾ ਉਲਟ $\frac{1}{0}$ ਹੈ, ਜੋ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $\quad \frac{5}{6}\times\frac{6}{5} = \frac{\cancel{5}^{1}\times\cancel{6}^{1}}{\cancel{6}_{1}\times\cancel{5}_{1}} = 1$

ਅਤੇ $\quad \frac{6}{5}\times\frac{5}{6} = \frac{\cancel{6}^{1}\times\cancel{5}^{1}}{5_{1}\times\cancel{6}_{1}} = 1$

$\therefore \quad \frac{5}{6}\times\frac{6}{5} = 1 = \frac{6}{5}\times\frac{5}{6}$

$\therefore$ $\frac{6}{5}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{5}{6}$ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{5}{6}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{6}{5}$ ਹੈ।

1.4.2 ਗੁਣਾ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾਉ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਗੁਣ (Distributive property of Multiplication over Addition or Subtraction) :

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ, ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾਉ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ਅਤੇ $\frac{e}{f}$, $(b, d, f \neq 0)$ ਲਈ,

$$\frac{a}{b}\times\left[\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ, ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{-2}{3}, \frac{5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{-3}{4}$ ਲਉ।

$$\frac{-2}{3}\times\left(\frac{5}{6}+\left(\frac{-3}{4}\right)\right) = \frac{-2}{3}\times\left(\frac{10+(-9)}{12}\right)$$

$$= \frac{-2}{3}\times\frac{1}{12} = \frac{-\cancel{2}^{1}\times 1}{3\times \cancel{12}_{6}} = \frac{-1}{18}$$

ਅਤੇ $\left(\frac{-2}{3}\right)\times\frac{5}{6}+\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{\left(-\cancel{2}^{1}\right)\times 5}{3\times\cancel{6}_{3}} + \frac{\left(-\cancel{2}^{1}\right)\times\left(-\cancel{3}^{1}\right)}{\cancel{3}_{1}\times\cancel{4}_{2}}$

$$= \frac{-5}{9}+\frac{1}{2} = \frac{-10+9}{18} = \frac{-1}{18}$$

$\therefore \quad \frac{-2}{3}\times\left(\frac{5}{6}+\left(\frac{-3}{4}\right)\right) = \left(\frac{-2}{3}\right)\times\frac{5}{6}+\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-3}{4}\right)$

ਉਦਾਹਰਨ 1.12 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x \times y = y \times x$ ਜਦੋਂ**

(i) $x = \frac{-5}{12}, y = \frac{4}{15}$ ਹੋਵੇ। (ii) $x = \frac{-6}{7}, y = \frac{-14}{9}$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : (i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x \times y = \frac{-5}{12}\times\frac{4}{15} = \frac{\left(-\cancel{5}^{1}\right)\times\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}\times\cancel{15}_{3}} = \frac{-1}{9}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y \times x = \frac{4}{15}\times\left(\frac{-5}{12}\right) = \frac{\cancel{4}^{1}\times\left(-\cancel{5}^{1}\right)}{\cancel{15}_{3}\times\cancel{12}_{3}} = \frac{-1}{9}$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ $x \times y = y \times x$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x \times y = \left(\frac{-6}{7}\right) \times \left(\frac{-14}{9}\right) = \frac{\left(-\cancel{6}^{2}\right) \times \left(-\cancel{14}^{2}\right)}{\cancel{7}_{1} \times \cancel{9}_{3}} = \frac{4}{3}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y \times x = \left(\frac{-14}{9}\right) \times \left(\frac{-6}{7}\right) = \frac{\left(-\cancel{14}^{2}\right) \times \left(-\cancel{6}^{2}\right)}{\cancel{9}_{3} \times \cancel{7}_{1}} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $x \times y = y \times x$

ਉਦਾਹਰਨ 1.13 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ ਜਦੋਂ**

(i) $x = \frac{-7}{3}$, $y = \frac{12}{5}$, $z = \frac{4}{9}$ ਹੋਵੇ। (ii) $x = \frac{-1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = \frac{-7}{5}$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ :(i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x \times (y \times z) = \frac{-7}{3} \times \left(\frac{12}{5} \times \frac{4}{9}\right)$

$$= \frac{-7}{3} \times \frac{\cancel{12}^{4} \times 4}{5 \times \cancel{9}_{3}} = \frac{-7}{3} \times \frac{16}{15} = \frac{-7 \times 16}{3 \times 15} = \frac{-112}{45}$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $(x \times y) \times z = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{12}{5}\right) \times \frac{4}{9}$

$$= \frac{-7 \times \cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1} \times 5} \times \frac{4}{9} = \frac{-28}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{-28 \times 4}{5 \times 9} = \frac{-112}{45}$$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x \times (y \times z) = \frac{-1}{2} \times \left(\frac{5}{4} \times \left(\frac{-7}{5}\right)\right)$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{\cancel{5}^{1} \times (-7)}{4 \times \cancel{5}_{1}} = \frac{-1}{2} \times \left(\frac{-7}{4}\right) = \frac{(-1) \times (-7)}{2 \times 4} = \frac{7}{8}$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $(x \times y) \times z = \left(\left(\frac{-1}{2}\right) \times \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{-7}{5}\right)$

$$= \frac{(-1)\times 5}{2\times 4} \times \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{-5}{8}\times\left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{\left(-\cancel{5}^{1}\right)\times(-7)}{8\times \cancel{5}_{1}} = \frac{7}{8}$$

∴ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $x\times(y\times z) = (x\times y)\times z$

ਉਦਾਹਰਨ 1.14 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਲਿਖੋ।**

(i) -5 (ii) $\frac{-2}{3}$ (iii) $\frac{7}{15}$ (iv) $\frac{-2}{5}\times\frac{3}{7}$ (v) $\frac{-5}{8}\times\frac{4}{3}$

ਹੱਲ : (i) $-5 = \left(\frac{-5}{1}\right)$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$

(ii) $\frac{-2}{3}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$

(iii) $\frac{7}{15}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \frac{15}{7}$

(iv) ਇੱਥੇ $\frac{-2}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{(-2)\times 3}{5\times 7} = \frac{-6}{35}$

∴ $\frac{-6}{35}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \frac{35}{-6} = \frac{-35}{6}$

(v) ਇੱਥੇ $\frac{-5}{8}\times\frac{4}{3} = \frac{-5\times \cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}\times 3} = \frac{-5}{6}$

∴ $\frac{-5}{6}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \frac{6}{-5} - \frac{-6}{5}$

ਉਦਾਹਰਨ 1.15 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ : $x \times (y + z) = x\times y + x \times z$ ਜਦੋਂ**

(i) $x = \frac{-3}{7}, y = \frac{12}{13}, z = \frac{-5}{6}$ (ii) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{5}{2}, z = \frac{-7}{6}$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ :(i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x\times(y+z) = \left(\frac{-3}{7}\right)\times\left(\frac{12}{13}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right)$

$$= \left(\frac{-3}{7}\right)\times\left(\frac{72+(-65)}{78}\right) = \left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{7}{78} = \frac{\left(-\cancel{3}^{1}\right)\times \cancel{7}^{1}}{\cancel{7}_{1}\times \cancel{78}_{26}} = \frac{-1}{26}$$

(ii) ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $x\times y + x\times z$ $= \left(\frac{-3}{7}\right)\times\left(\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)$

$$= \frac{(-3)\times 12}{7\times 13}+\frac{(-3)\times(-5)}{7\times 6} = \frac{-36}{91}+\frac{15}{14}$$

$$= \frac{-72+65}{182} = \frac{-\cancel{7}^{1}}{\cancel{182}_{26}} = \frac{-1}{26}$$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ $x\times(y+z) = x\times y + x\times z$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x\times(y+z)$ $= \left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{2}+\left(\frac{-7}{6}\right)\right)$

$$= \left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{15+(-7)}{6}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right)\times\frac{8}{6} = \frac{\left(-\cancel{3}^{1}\right)\times\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}\times\cancel{6}_{2}} = -1$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $x\times y + x\times z$ $= \left(\frac{-3}{4}\right)\times\frac{5}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{-7}{6}\right)$

$$= \frac{(-3)\times 5}{4\times 2}+\frac{\left(-\cancel{3}^{1}\right)\times(-7)}{4\times\cancel{6}_{2}} = \frac{-15}{8}+\frac{7}{8} = \frac{-15+7}{8}$$

$$= \frac{-\cancel{8}^{1}}{\cancel{8}_{1}} = -1$$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ, $x\times(y+z) = x\times y + x\times z$

ਉਦਾਹਰਨ 1.16 **ਵੰਡਕਾਰੀ ਗੁਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ।**

(i) $\left(\frac{-5}{4}\right)\times\frac{8}{5}+\left(\frac{-5}{4}\right)\times\frac{16}{5}$ **(ii)** $\frac{2}{7}\times\frac{7}{16}-\frac{-2}{7}\times\frac{21}{4}$

ਹੱਲ :(i) $x\times y + x+z = x\times(y+z)$ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਇੱਥੇ $x = \frac{-5}{4}$, $y=\frac{8}{3}$ ਅਤੇ $z=\frac{16}{5}$

$$\left(\frac{-5}{4}\right)\times\frac{8}{5}+\left(\frac{-5}{4}\right)\times\frac{16}{5} = \left(\frac{-5}{4}\right)\times\left(\frac{8}{5}+\frac{16}{5}\right)$$ ($\frac{-5}{4}$ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$$= \left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{8+16}{5}\right) = \frac{-5}{4} \times \frac{24}{5} = \frac{-\cancel{5}^{1} \times \cancel{24}^{6}}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{5}_{1}} = -6$$

(ii) $x \times y - x \times z = x \times (y - z)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਇੱਥੇ $x = \frac{2}{7}, y = \frac{7}{16}$ ਅਤੇ $z = \frac{21}{4}$

$$\frac{2}{7} \times \frac{7}{16} - \frac{2}{7} \times \frac{21}{4}$$

$$= \frac{2}{7} \times \left(\frac{7}{16} - \frac{21}{4}\right)$$ ($\frac{2}{7}$ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$$= \frac{2}{7} \times \left(\frac{7-84}{16}\right) = \frac{2}{7} \times \left(\frac{-77}{16}\right) = \frac{\cancel{2}^{1} \times \left(-\cancel{77}^{11}\right)}{\cancel{7}_{1} \times \cancel{16}_{8}} = \frac{-11}{8}$$

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ:—

(i) $\frac{7}{11} \times \frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{7} \times \left(\frac{-3}{4}\right)$ (iii) $\frac{2}{9} \times \frac{-5}{11}$

(iv) $\frac{-3}{5} \times \frac{4}{7}$ (v) $\left(\frac{-8}{7}\right) \times \left(\frac{-14}{5}\right)$ (vi) $\left(\frac{-5}{9}\right) \times \left(\frac{36}{-25}\right)$

(vii) $\left(\frac{-8}{25}\right) \times \left(\frac{-15}{16}\right)$ (viii) $\left(\frac{-6}{11}\right) \times \left(\frac{-44}{30}\right)$ (ix) $\frac{5}{17} \times \left(\frac{-51}{30}\right)$

(x) $\left(\frac{-7}{18}\right) \times \left(\frac{15}{-7}\right)$ (xi) $\left(\frac{-16}{5}\right) \times \frac{20}{9} \times \left(\frac{-3}{4}\right)$ (xii) $\frac{9}{10} \times \left(\frac{-15}{27}\right) \times \frac{18}{5}$

2. ਜਾਂਚ ਕਰੋ : **x × y = y × x** ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{-5}{7}$ $y = \frac{9}{13}$ (ii) $x = \frac{3}{10}, y = \frac{-15}{8}$ (iii) $x = \frac{-7}{8}, y = \frac{-4}{9}$

(iv) $x = 5, y = \frac{-9}{10}$ ਹੋਵੇ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ : **x × (y × z) = (x×y) × z** ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{-7}{6}, y = \frac{12}{5}, z = \frac{-2}{9}$ (ii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{-5}{8}, z = \frac{-3}{5}$

(iii) $x = \frac{5}{7}, y = \frac{-12}{10}, z = \frac{-4}{9}$ (iv) $x = \frac{-3}{5}, y = \frac{2}{9}, z = \frac{10}{7}$ ਹੋਵੇ।

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਲਿਖੋ।

(i) -2 (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{7}{-9}$ (iv) $\frac{-3}{4}$

(v) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{-3}{15}\right)$ (vi) $\left(\frac{-3}{8}\right)\times\left(\frac{-12}{9}\right)$ (vii) $(-8)\times\frac{5}{6}$ (viii) $3\times\left(\frac{-7}{9}\right)$

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ : **x × (y + z) = x × y + x × z** ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{3}{5}, y = \frac{25}{24}, z = 10$ (ii) $x = \frac{-5}{4}, y = \frac{8}{5}, z = \frac{16}{15}$

(iii) $x = \frac{-2}{7}, y = \frac{14}{10}, z = \frac{3}{5}$ ਹੋਵੇ।

6. ਜਾਂਚ ਕਰੋ : **x × (y – z) = x × y – x × z** ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{-2}{3}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{6}{7}$ (ii) $x = \frac{-1}{2}, y = \frac{5}{6}, z = \frac{-3}{10}$

(iii) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{8}{9}, z = -10$ ਹੋਵੇ।

7. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਲਈ, ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਗੁਣ ਦਾ ਨਾਮ ਲਿਖੋ।

(i) $\frac{-2}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ ....

(ii) $\frac{-3}{8}\times 1 = \frac{-3}{8} = 1\times\frac{-3}{8}$ ....

(iii) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}$ ....

(iv) $\left(\frac{-2}{7}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{7}{10} = \frac{-2}{7}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{7}{10}\right)$ ....

(v) $\left(\frac{-7}{9}\right)\times\frac{3}{4}-\left(\frac{-7}{9}\right)\times\frac{5}{10} = \left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{10}\right)$. ....

8. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ?

(a) $x \times y = y \times x$ (b) $x \times (y - z) = x \times y - x \times z$

(c) $x - y = y - x$ (d) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

(ii) ਜੇ $\frac{-5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{8}\right)$ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਗੁਣ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

(a) ਬੰਦ ਗੁਣ (b) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (c) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ (d) ਤਤਸਮਕ

(iii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ 'a' ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ :

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{a}$ (d) $-a$

(iv) ਕਥਨ, $\frac{-5}{8}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{-5}{8}\right)\times\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{8}\right)\times\frac{2}{3}$ ਲਈ ਕਿਹੜਾ ਗੁਣ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

(a) ਗੁਣਾ ਦੀ ਸਹਿਚਾਰਤਾ
(b) ਘਟਾਉ ਦੀ ਸਹਿਚਾਰਤਾ
(c) ਗੁਣਾ ਦੀ ਜੋੜ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ
(d) ਗੁਣਾ ਦੀ ਘਟਾਓ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ

(v) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ?

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) $\frac{-2}{-3}$

(vi) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਉਹੀ ਸੰਖਿਆ ਖੁਦ ਹੈ ?

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) b ਅਤੇ c ਦੋਨੋਂ

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ (Division of Rational Numbers) :

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਵੰਡ, ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਲਈ ਵੀ ਉਹੀ ਨਿਯਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $\frac{c}{d} \neq 0$ ਤਾਂ

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}$ ਦਾ ਉਲਟ$)=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

ਇੱਥੇ $\frac{a}{b}$ ਨੂੰ ਭਾਜ (Dividend), $\frac{c}{d}$ ਨੂੰ ਭਾਜਕ (Divisor) ਅਤੇ

$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ ਨੂੰ ਭਾਜਫਲ (Quotient) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ :—ਸਿਫ਼ਰ (0) ਨਾਲ ਭਾਗ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.17 **ਭਾਗ ਕਰੋ :**

(i) $\frac{3}{10}$ ਨੂੰ $\frac{4}{25}$ ਨਾਲ **(ii)** $\left(\frac{-8}{9}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{-4}{3}\right)$ ਨਾਲ **(iii)** $\left(\frac{-8}{13}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{-5}{26}\right)$ ਨਾਲ

(iv) $\left(\frac{-5}{8}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{15}{16}\right)$ ਨਾਲ **(v)** $\frac{7}{15}$ ਨੂੰ $\frac{21}{20}$ ਨਾਲ

ਹੱਲ : (i) $\frac{3}{10}\div\frac{4}{25} = \frac{3}{10}\times\left(\frac{4}{25} \text{ ਦਾ ਉਲਟ}\right)$

$$= \frac{3}{10}\times\frac{25}{4} = \frac{3\times\cancel{25}^{5}}{\cancel{10}_{2}\times 4} = \frac{15}{8}$$

(ii) $\left(\frac{-8}{9}\right)\div\left(\frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-8}{9}\right)\times\left(\frac{-4}{3} \text{ ਦਾ ਉਲਟ}\right)$

$$= \left(\frac{-8}{9}\right)\times\left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{(-\cancel{8}^{2})\times\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}\times(-\cancel{4}_{1})} = \frac{2}{3}$$

(iii) $\left(\frac{-8}{13}\right)\div\left(\frac{-5}{26}\right) = \left(\frac{-8}{13}\right)\times\left(\frac{-5}{26} \text{ ਦਾ ਉਲਟ}\right)$

$$= \left(\frac{-8}{13}\right)\times\left(\frac{26}{-5}\right) = \frac{(-8)\times\cancel{26}^{2}}{\cancel{13}_{1}\times(-5)} = \frac{-16}{-5} = \frac{16}{5}$$

(iv) $\left(\frac{-5}{8}\right)\div\frac{15}{16} = \left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{15}{16} \text{ ਦਾ ਉਲਟ}\right)$

$$= \left(\frac{-5}{8}\right)\times\frac{16}{15} = \frac{(-\cancel{5}^{1})\times\cancel{16}^{2}}{\cancel{8}\times\cancel{15}_{3}} = \frac{-2}{3}$$

(v) $\frac{7}{15} \div \frac{21}{20} = \frac{7}{15} \times \left(\frac{21}{20} \text{ ਦਾ ਉਲਟ}\right)$

$$= \frac{7}{15} \times \frac{20}{21} = \frac{\cancel{7}^{1} \times \cancel{20}^{4}}{\cancel{15}_{3} \times \cancel{21}_{3}} = \frac{4}{9}$$

ਉਦਾਹਰਨ 1.18 ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{-14}{27}$ ਹੈ। ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{-7}{9}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :ਮੰਨ ਲਓ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਾਂ

$$\left(\frac{-7}{9}\right) \times x = \frac{-14}{27}$$

$$x = \left(\frac{-14}{27}\right) \div \left(\frac{-7}{9}\right)$$

$$= \frac{-\cancel{14}^{2}}{\cancel{27}_{3}} \times \frac{\cancel{9}^{1}}{-\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 1.19 $\frac{3}{-7}$ **ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਜੋ ਗੁਣਨਫਲ** $\frac{-18}{49}$ **ਬਣ ਜਾਵੇ ?**

ਹੱਲ :ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਾਂ

$$x \times \left(\frac{3}{-7}\right) = \left(\frac{-18}{49}\right)$$

$$x = \left(\frac{-18}{49}\right) \div \left(\frac{3}{-7}\right) = \left(\frac{-18}{49}\right) \times \left(\frac{-7}{3}\right)$$

$$= \frac{\left(-\cancel{18}^{6}\right) \times \left(-\cancel{7}^{1}\right)}{\cancel{49}_{7} \times \cancel{3}_{1}} = \frac{6}{7}$$

1.5.1ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਭਾਗ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Divison of Rational Numbers) :

- **ਬੰਦ ਗੁਣ (Closure Property) :** ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ (ਭਾਜਕ $\neq 0$) ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ($b, d \neq 0$) ਅਤੇ $\frac{c}{d} \neq 0$ ਤਾਂ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ (i) $\left(\frac{-2}{5}\right) \div \frac{4}{9} = \frac{-2}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{(-2) \times 9}{5 \times 4} = \frac{-9}{10}$ ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) $\left(\frac{-3}{10}\right)\div\left(\frac{-5}{9}\right)=\left(\frac{-3}{10}\right)\times\left(\frac{9}{-5}\right)=\frac{(-3)\times(-9)}{10\times5}=\frac{27}{50}$ ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

- **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (Commutative Property) :** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਭਾਗ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ

ਕੋਈ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{a}{b}$ ਅਤੇ $\frac{c}{d}$ ਦੇ ਲਈ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$

- **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣਾ (Associative Property) :** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ ਅਤੇ $\frac{e}{f}$ ਦੇ ਲਈ

$$\left(\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\right)\div\frac{e}{f}\neq\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\div\frac{e}{f}\right)$$

1.5.2 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Rational Numbers) :

ਗੁਣ/ਕਿਰਿਆਵਾਂ	ਜੋੜ	ਘਟਾਉ	ਗੁਣਾ	ਭਾਗ
ਬੰਦ	✓	✓	✓	✓
ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ	✓	×	✓	×
ਸਹਿਚਾਰਤਾ	✓	×	✓	×
ਤਤਸਮਕ	✓	×	✓	×
ਉਲਟ	✓	×	✓	×

ਉਦਾਹਰਨ 1.20 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x + y \neq y + x$ ਜਦੋਂ**

(i) $x=\frac{-2}{5}, y=\frac{3}{4}$ (ii) $x=\frac{-3}{13}, y=\frac{-7}{9}$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : (i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x\div y=\left(\frac{-2}{5}\right)\div\frac{3}{4}=\left(\frac{-2}{5}\right)\times\frac{4}{3}=\frac{(-2)\times4}{5\times3}=\frac{-8}{15}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y\div x=\frac{3}{4}\div\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{-2}\right)=\frac{3\times5}{4\times(-2)}=\frac{-15}{8}$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $\neq$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ $x\div y\neq y\div x$

(ii) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ : $x\div y=\left(\frac{-3}{13}\right)\div\left(\frac{-7}{9}\right)=\left(\frac{-3}{13}\right)\times\left(\frac{9}{-7}\right)$

$$=\frac{(-3)\times9}{13\times(-7)}=\frac{27}{91}$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $y \div x = \left(\frac{-7}{9}\right) \div \left(\frac{-3}{13}\right) = \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{13}{-3}\right)$

$$= \frac{(-7) \times (-13)}{9 \times 3} = \frac{91}{27}$$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ $x \div y \neq y \div x$

ਉਦਾਹਰਨ 1.21 **ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x \div (y \div z) \neq (x \div y) \div z$, ਜਦੋਂ $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{-5}{6}$, $z = 3$ ਹੋਵੇ।**

ਹੱਲ : ਖੱਬਾ ਪਸਾ : $x \div (y \div z) = \left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\left(\frac{-5}{6}\right) \div 3\right) = \left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\left(\frac{-5}{6}\right) \div \frac{3}{1}\right)$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\frac{-5}{6} \times \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\frac{-5}{18}\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{18}{-5}\right) = \frac{(-2) \times \cancel{18}^{6}}{\cancel{3}_{1} \times (-5)} = \frac{12}{5}$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ : $(x \div y) \div z = \left[\left[\frac{-2}{3}\right] \div \left[\frac{-5}{6}\right]\right] \div 3$

$$= \left(\left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-6}{5}\right)\right) \div 3 = \frac{(-2) \times \left(-\cancel{6}^{2}\right)}{\cancel{3}_{1} \times 5} \div 3$$

$$= \frac{4}{5} \div \frac{3}{1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

ਇਸ ਲਈ $x \div (y \div z) \neq (x \div y) \div z$

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਭਾਗ ਕਰੋ :—

(i) $\frac{2}{5}$ ਨੂੰ $\frac{3}{4}$ ਨਾਲ (ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{-2}{3}\right)$ ਨਾਲ (iii) $\left(\frac{-5}{6}\right)$ ਨੂੰ $\frac{3}{4}$ ਨਾਲ

(iv) $\left(\frac{-5}{8}\right)$ ਨੂੰ (-3) ਨਾਲ (v) $\left(\frac{-3}{4}\right)$ ਨੂੰ (-6) ਨਾਲ (vi) $\left(\frac{-2}{3}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{-7}{12}\right)$ ਨਾਲ

(vii) $\left(\frac{-16}{21}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{-4}{9}\right)$ ਨਾਲ (viii) $\frac{10}{9}$ ਨੂੰ $\left(\frac{-25}{12}\right)$ ਨਾਲ

2. ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x + y \neq y + x$, ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{5}{7}$ $y = \frac{-3}{4}$ (ii) $x = \frac{-7}{10}, y = \frac{-5}{12}$ (iii) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{-9}{16}$ ਹੋਵੇ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ $x + (y + z) \neq (x + y) + z$, ਜਦੋਂ

(i) $x = \frac{-3}{15}, y = \frac{-2}{3}, z = 2$ (ii) $x = \frac{-1}{4}, y = \frac{-3}{2}, z = \frac{-5}{6}$ ਹੋਵੇ।

4. ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{-8}{9}$ ਹੈ। ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{-2}{5}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ -10 ਹੈ। ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 15 ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\frac{-3}{4}$ ਦੀ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਜੋ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{15}{16}$ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :—

- *ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਾਰੇ।*
- *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i) $\frac{-1}{12}$ (ii) $\frac{-4}{33}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{-1}{24}$ (v) $\frac{-23}{30}$

(vi) $\frac{-1}{2}$ (vii) $\frac{11}{18}$ (viii) $\frac{8}{75}$

4. (i) $\frac{5}{11}$ (ii) $\frac{-8}{9}$ (iii) $\frac{15}{13}$ (iv) $\frac{-2}{9}$ (v) $\frac{3}{8}$

(vi) $\frac{2}{7}$ (vii) $\frac{-18}{11}$ (viii) 0

5. (i) $\frac{-12}{15}$ (ii) $\frac{1}{56}$ (iii) $\frac{-77}{18}$ (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{47}{48}$

6. (i) b (ii) c (iii) b (iv) a

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) 1 (iii) $\frac{11}{8}$ (iv) $\frac{31}{42}$ (v) $\frac{1}{6}$

(vi) $\frac{19}{66}$ (vii) $\frac{1}{3}$ (viii) $\frac{-81}{50}$

4. (i) $\frac{17}{24}$ (ii) $\frac{-119}{24}$ (iii) $\frac{-19}{30}$ (iv) $\frac{-11}{30}$ (v) $\frac{33}{72}$

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. (i) $\frac{35}{44}$ (ii) $\frac{-15}{28}$ (iii) $\frac{-10}{99}$ (iv) $\frac{-112}{35}$ (v) $\frac{16}{5}$ (vi) $\frac{4}{5}$

(vii) $\frac{3}{10}$ (viii) $\frac{4}{5}$ (ix) $\frac{-1}{2}$ (x) $\frac{5}{6}$ (xi) $\frac{16}{3}$

(xii) $\frac{-9}{5}$

4. (i) $\frac{-1}{2}$ (ii) $\frac{-8}{5}$ (iii) $\frac{-9}{7}$ (iv) $\frac{-4}{3}$ (v) $\frac{-35}{2}$

(vi) 2 (vii) $\frac{-3}{20}$ (viii) $\frac{-3}{7}$

7. (i) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ (ii) ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (iii) ਜੋੜ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ

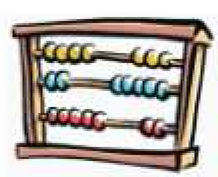
(iv) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣ (v) ਘਟਾਉ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ

8. (i) c (ii) b (iii) a (iv) d (v) a (vi) d

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{9}{16}$ (iii) $\frac{-10}{9}$ (iv) $\frac{5}{24}$ (v) $\frac{1}{8}$ (vi) $\frac{8}{7}$ (vii) $\frac{12}{7}$ (viii) $\frac{-8}{15}$

4. $\frac{20}{9}$ 5. $\frac{-2}{3}$ 6. $\frac{-5}{4}$



ਅਧਿਆਇ 2

ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਬਾਰੇ।*
- *ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੁਲਝਾਉਣਾ।*

2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

7ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਹੱਲ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ $4x = 12$, $3y = 15$, $2y + 1 = 9$ ਆਦਿ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਕ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

2.2 ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨ (Equation in one Variable) :

ਉਹ ਸਮੀਕਰਨ ਜਿਸਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਇੱਕ ਚਲ ਹੋਵੇ, ਉਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜਿਵੇਂ $2y + 5 = 9$, $3z^2 - 1 = 7$, $4x^2 + 5x = 8$ ਆਦਿ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚਲ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ $2x + 3y = 7$, $2a + b + c = 7$, $4abc = 5$ ਆਦਿ ਇੱਕ ਚੱਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ

- ਪਹਿਲੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y ਹਨ।
- ਦੂਜੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਚਲ a, b ਅਤੇ c ਹਨ।
- ਤੀਜੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਤਿੰਨ ਚਲ a, b ਅਤੇ c ਹਨ।

2.2.1 ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ (Linear Equation in one Variable) :

ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਮੀਕਰਨ ਜਿਸਦੀ ਘਾਤ (ਚਲ ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸ਼ਕਤੀ) 1 ਹੋਵੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜਿਵੇਂ : (i) $2x + 3 = 12$, ਚਲ (x) ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

(ii) $5y - 3 = 8$, ਚਲ (y) ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

(iii) $2x + 3 = 5y$, ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y ਹਨ।

(iv) $3z^2 - 1 = 7$, ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ।

2.2.2 ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ (Solution of linear equation in one variable) :

ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਬਰਾਬਰ (=) ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਭਾਵ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ = ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ। ਇਹ ਚਲ ਦੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਚਲ ਦਾ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਹੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $4x = 8$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = $4x$

(i) ਜੇ $x = 1$

ਤਾਂ $4x = 4 \times 1 = 4$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ = 8

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ≠ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਤਾਂ $x = 1$ ਲਈ, ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ≠ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ

$\therefore$ $x = 1$ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇ $x = 2$ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 4x = 4(2) = 8$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= 8$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇੱਥੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ = ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ

$\therefore$ $x = 2$ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

2.3 ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ (Solving equations having variables on both sides)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਚਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਹ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਨਾਂ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਹਨ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਚਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕਠਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਚਰਚਾ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 2.1 : ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $4x - 3 = 3x + 2$ (ii) $3x + 4 = x - 6$ (iii) $4x - 5 = 7x + 8$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ $4x - 3 = 3x + 2$

$4x = 3x + 2 + 3$ (-3 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$4x = 3x + 5$

($3x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$4x - 3x = 5$

$\Rightarrow$ $x = 5$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਉੱਤਰ ਹੈ।

ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਚਲ ਅਤੇ ਅਚਲ ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਕੇ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $4x - 3 = 3x + 2$

(-3 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ $3x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$4x - 3x = +2 + 3$

$\Rightarrow$ $x = 5$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $3x + 4 = x - 6$

($+4$ ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ x ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$3x - x = -6 - 4$

$\Rightarrow$ $2x = -10$ $\Rightarrow$ $x = \frac{-10}{2} = -5$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $4x - 5 = 7x + 8$

(-5 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ $7x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$4x - 7x = +8 + 5$

$\Rightarrow$ $-3x = 13$

$\Rightarrow$ $x = \frac{13}{-3} \Rightarrow x = \frac{-13}{3}$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 2.2 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

(i) $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$ (ii) $2x - 5 = 14 - (x - 2)$

(iii) $3(\ell - 3) = 5(2\ell + 1)$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $8x + 4 = 3(x-1)+7$

$\Rightarrow 8x + 4 = 3x - 3 + 7$

$\Rightarrow 8x + 4 = 3x + 4$

(+4 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ 3x ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$8x - 3x = +4 - 4$

$\Rightarrow 5x = 0$

(5 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$x = \frac{0}{5} = 0$

ਜਾਂਚ

$x = 0$

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਭਰੋ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ	ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ
$8(0) + 4$	$3(0 - 1) + 7$
$= 0 + 4$	$= -3 + 7$
$= 4$	$= 4$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $2x - 5 = 14 - (x - 2)$

$\Rightarrow 2x - 5 = 14 - x + 2$

$\Rightarrow 2x - 5 = 16 - x$

(−5 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ −x ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$\Rightarrow 2x + x = 16 + 5$

$\Rightarrow 3x = 21$

$\Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7$

ਜਾਂਚ

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ $x = 7$ ਭਰਨ 'ਤੇ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ	ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ
$2(7) - 5$	$14 - (7 - 2)$
$= 14 - 5$	$= 14 - 5$
$= 9$	$= 9$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $3(\ell - 3) = 5(2\ell + 1)$

$3\ell - 9 = 10\ell + 5$

(−9 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ 10ℓ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$\Rightarrow 3\ell - 10\ell = 5 + 9$

$\Rightarrow -7\ell = 14$

$\Rightarrow$ −7 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ

$\Rightarrow \ell = \frac{14}{-7} = -2$

ਜਾਂਚ

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ $\ell = -2$ ਭਰਨ ਤੇ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ	ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ
$3(-2 - 3)$	$5[2(-2) + 1]$
$= 3(-5)$	$= 5(-4 + 1)$
$= -15$	$= 5(-3)$
	$= -15$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 2.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

(1) $2x - 3 = x + 2$ (2) $5x - 6 = 2x + 9$ (3) $5a - 3 = 3a - 5$

(4) $5x + 9 = 5 + 3x$ (5) $4y + 3 = 6 + 2y$ (6) $3x - 1 = 15 - x$

(7) $4x + 3 = 2(x - 1) + 5$ (8) $3\ell - 5 = 4(\ell + 2) - 6$ (9) $6x = 5(x + 10) - 2$

2.4 ਕੁੱਝ ਵਿਹਾਰਿਕ ਉਪਯੋਗ (Some Practical applications)

ਉਦਾਹਰਨ 2.3 : **ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਜੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 5 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਜੇ ਦੋਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ 21 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ = x

ਤਾਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ = 5 × (ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ) = $5 \times x = 5x$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ :

ਜੇ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ 21 ਜੋੜ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $(x + 21)$ ਅਤੇ $(5x + 21)$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ, ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ = 2 × ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ

$\Rightarrow 5x + 21 = 2(x + 21)$

$\Rightarrow 5x + 21 = 2x + 42 \Rightarrow 5x - 2x = 42 - 21$

$\Rightarrow 3x = 21 \qquad \Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7$

∴ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ 5x ਭਾਵ 7 ਅਤੇ $5 \times 7 = 35$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 2.4 : **ਇੱਕ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 8 ਹੈ। ਜੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 18 ਜੋੜ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕ ਉਲਟ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ : ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = 8

ਭਾਵ, ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ + ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ = 8

ਮੰਨ ਲਓ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ = x ਤਾਂ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ = $8 - x$

∴ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ = 10 × (ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ) + (ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ)

$= 10(8 - x) + x = 80 - 10x + x$

$= 80 - 9x$

ਹੁਣ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ = 10 × (ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ) + (ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ)

$= 10 \times x + (8 - x) = 9x + 8$

ਦੂਸਰੀ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ : ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 18 ਜੋੜਨ ਨਾਲ = ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ

⇒ (ਦੋ ਅਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ) + 18 = ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ

$\Rightarrow (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$\Rightarrow 98 - 9x = 9x + 8$

$\Rightarrow 98 - 8 = 9x + 9x \Rightarrow 90 = 18x$

$\Rightarrow x = \frac{90}{18} = 5$

∴ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ = $80 - 9x = 80 - 9(5) = 80 - 45 = 35$

ਉਦਾਹਰਨ 2.5 : **ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ, ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦਾ 6 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਪੰਜ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਉਮਰ ਆਪਣੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦਾ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ :

ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 6 × ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ
ਮੰਨ ਲਓ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ x ਸਾਲ ਹੈ।
ਤਾਂ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 6x ਸਾਲ

ਹੁਣ, 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਉਮਰ = ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦਾ $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x + 5 = \frac{1}{3} \times 6x \qquad \Rightarrow x + 5 = 2x$

$\Rightarrow 5 = 2x - x = x \qquad \Rightarrow \quad x = 5$

$\therefore$ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 5 ਸਾਲ
ਅਤੇ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 6 × 5 = 30 ਸਾਲ

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਅਜਿਹੀ ਹੈ ਕਿ ਜਿੰਨੀ ਉਹ 84 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਉੰਨੀ ਹੀ 108 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 34 ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡੋ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਗ ਦਾ $\frac{4}{7}$ ਦੂਜੇ ਭਾਗ ਦੇ $\frac{2}{5}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ 5 ਗੁਣਾ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਘਟਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਤੀਜਾ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੁਗਣੇ ਤੋਂ 4 ਵੱਧ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇੱਕ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਹੈ। ਜੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 143 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਨਵੀਂ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ 27 ਜ਼ਿਆਦਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪਰੀਤ ਦੀ ਉਮਰ ਅਬਦੁਲ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ 6 ਸਾਲ ਵੱਧ ਹੈ। 6 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ, ਪਰੀਤ ਦੀ ਉਮਰ, ਅਬਦੁਲ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. 12 ਸਾਲ ਬਾਅਦ, ਮੈਂ ਆਪਣੀ 4 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ 3 ਗੁਣਾ ਹੋਵਾਂਗਾ। ਮੇਰੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੀਆ ਦੀ ਉਮਰ ਕਾਵਿਆ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹੈ। ਜੇ ਕਾਵਿਆ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚੋਂ 6 ਸਾਲ ਘਟਾ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਅਤੇ ਜੀਆ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ 4 ਸਾਲ ਜੋੜ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਜੀਆ ਦੀ ਉਮਰ, ਕਾਵਿਆ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ 4 ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.5 ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲਤਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ (Reducing equation to simplest form)

ਉਦਾਹਰਨ 2.6 : **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।**

(i) $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ (ii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + 2$

(iii) $\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{3} - \frac{5x}{6}$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ, $\frac{2x}{3}+1=\frac{7x}{15}+3$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (3 ਅਤੇ 15) ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. = 15 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left(\frac{2x}{3}+1\right)\times 15=\left(\frac{7x}{15}+3\right)\times 15$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3}\times 15+1\times 15=\frac{7x}{15}\times 15+3\times 15$$

$\Rightarrow 10x + 15 = 7x + 45$

(+ 15 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ $7x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$\Rightarrow 10x - 7x = + 45 - 15$

$\Rightarrow 3x = 30$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$$

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ, $\frac{x}{2}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3}+2$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (2, 3, 5) ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. = 30 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{5}\right)\times 30=\left(\frac{x}{3}+2\right)\times 30$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\times 30-\frac{1}{5}\times 30=\frac{x}{3}\times 30+2\times 30$$

$\Rightarrow 15x - 6 = 10x + 60$

-6 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ $10x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ

$15x - 10x = 60 + 6$

$\Rightarrow \quad 5x = 66$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{66}{5}$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}=\frac{-2}{3}-\frac{5x}{6}$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (4, 2, 3) ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. = 12 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left(\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}\right)\times 12=\left(\frac{-2}{3}-\frac{5x}{6}\right)\times 12$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{4}\times 12-\frac{3}{2}\times 12 = \frac{-2}{3}\times 12-\frac{5x}{6}\times 12$$

$\Rightarrow 9x - 18 = -8 - 10x$

-18 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ $-10x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ 'ਤੇ

$9x + 10x = -8 + 18$

$$\Rightarrow 19x = 10 \Rightarrow x - \frac{10}{19}$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 2.7 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :—

(i) $\frac{6x+1}{2}+1=\frac{7x-3}{3}$ (ii) $\frac{5x}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{x-3}{5}$

(iii) $\frac{3a-2}{4}-\frac{2a+3}{3}=\frac{2}{3}-a$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{6x+1}{2}+1=\frac{7x-3}{3}$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (2, 3) ਦੇ ਲ. ਸ. ਵ - 6 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left(\frac{6x+1}{2}+1\right)\times 6=\left(\frac{7x-3}{3}\right)\times 6$$

$$\Rightarrow \left[\frac{6x+1}{2}\right]\times 6+1\times 6=\left[\frac{7x-3}{3}\right]\times 6$$

$\Rightarrow 3(6x + 1) + 6 = 2 (7 x - 3)$

$\Rightarrow 18 x + 3 + 6 = 14x - 6$

$\Rightarrow 18x + 9 = 14x - 6$

$\Rightarrow 18x - 14x = - 6 - 9$

$\Rightarrow 4x = -15$

$$\Rightarrow x = \frac{-15}{4}$$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{5x}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{x-3}{5}$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (3, 4, 5) ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. = 60 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left(\frac{5x}{3}-\frac{x-1}{4}\right)\times 60=\left(\frac{x-3}{5}\right)\times 60$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{3}\times 60-\left[\frac{x-1}{4}\right]\times 60 = \left[\frac{x-3}{5}\right]\times 60$$

$\Rightarrow 100x - 15 (x - 1) = 12 (x - 3)$

$\Rightarrow 100x - 15x + 15 = 12x - 36$

$\Rightarrow 85x + 15 = 12x - 36$

$\Rightarrow 85x - 12x = -36 - 15$

$\Rightarrow 73x = -51$

$$\Rightarrow x = \frac{-51}{73}$$

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{3a-2}{4} - \frac{2a+3}{3} = \frac{2}{3} - a$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹਰਾਂ (4, 3, 3) ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. = 12 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\left[\frac{3a-2}{4} - \frac{(2a+3)}{3}\right] \times 12 = \left(\frac{2}{3} - a\right) \times 12$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3a-2}{4}\right) \times 12 - \left[\frac{2a+3}{3}\right] \times 12 = \frac{2}{3} \times 12 - a \times 12$$

$\Rightarrow 3(3a-2) - 4(2a+3) = 8 - 12a$

$\Rightarrow 9a - 6 - 8a - 12 = 8 - 12a$

$\Rightarrow a - 18 = 8 - 12a$

$\Rightarrow a + 12a = 8 + 18 \Rightarrow 13a = 26$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{26}{13} = 2$$

ਉਦਾਹਰਨ **2.8 : ਸਮੀਕਰਨ $15(y-4) - 2(y-9) + 5(y+6) = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $15(y-4) - 2(y-9) + 5(y+6) = 0$

$15y - 60 - 2y + 18 + 5y + 30 = 0$

$15y - 2y + 5y - 60 + 18 + 30 = 0$

$18y - 12 = 0 \qquad 18y = 12$

$$y = \frac{12}{18}$$

$$y = \frac{2}{3}$$

ਅਭਿਆਸ 2.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(1) $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$

(2) $\frac{\ell}{2} - \frac{1}{5} = \frac{\ell}{3} + \frac{1}{4}$

(3) $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$

(4) $5x - 2(2x-7) = 2(3x-1) + \frac{7}{2}$

(5) $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$

(6) $\frac{3a}{4} - \frac{a-1}{2} = \frac{a-2}{3}$

(7) $4(x+2) - 5 = 2(x-1) + 7$ (8) $7(2a-3) = 4 - 3(1-a)$

(9) $3(5x-7) - 2(9x-11) = 4(8x-13) - 17$

(10) $15(a-4) - 2(a-9) + 5(a+6) = 0$

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਵਿਹਾਰਿਕ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਸੁਲਝਾਉਣ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $x = 5$ 2. $x = 5$ 3. $a = -1$ 4. $x = -2$ 5. $y = \frac{3}{2}$

6. $x = 4$ 7. $x = 0$ 8. $\ell = -7$ 9. $x = 48$

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. 96 2. 14, 20 3. 3 4. 85 ਜਾਂ 58 5. 36

6. ਪਰੀਤ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 14 ਸਾਲ
ਅਬਦੁਲ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 8 ਸਾਲ

7. 12 ਸਾਲ

8. ਕਾਵਿਆ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 14 ਸਾਲ
ਜੀਆ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = 28 ਸਾਲ

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. $n = 36$ 2. $\ell = \frac{27}{10}$ 3. $m = \frac{7}{5}$ 4. $x = \frac{5}{2}$ 5. $x = -1$

6. $a = 14$ 7. $x = 1$ 8. $a = 2$ 9. $x = 2$ 10. $a = \frac{2}{3}$

ਅਧਿਆਇ
3

ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਅਲੱਗ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ।*

3.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction) :

ਸਾਡੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਤਲ ਸਤ੍ਹਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ-ਜਮਾਤ ਦਾ ਬਲੈਕ ਬੋਰਡ, ਕਿਤਾਬ ਦਾ ਇੱਕ ਪੇਜ, ਮੇਜ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਸਤ੍ਹਾ ਆਦਿ।

ਚਿੱਤਰ 3.1

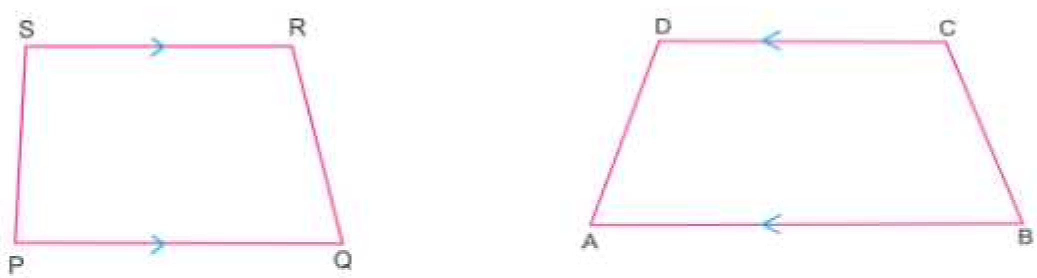
ਇਹ ਪੂਰਨ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਕਾਗਜ ਸਮਤਲ ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਹੈ।

3.2 ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of quadrilateral) :

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਕਿ "ਚਤੁਰਭੁਜ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ।"

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ (Trapezium) : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

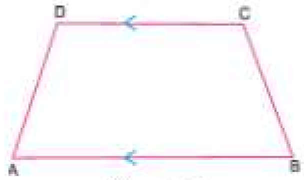


(i) (ii)

ਚਿੱਤਰ 3.2

ਨੋਟ : ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਸਮਲੰਬ (Isosceles Trapezium) : ਉਸ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਖਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋਨੋਂ ਅਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

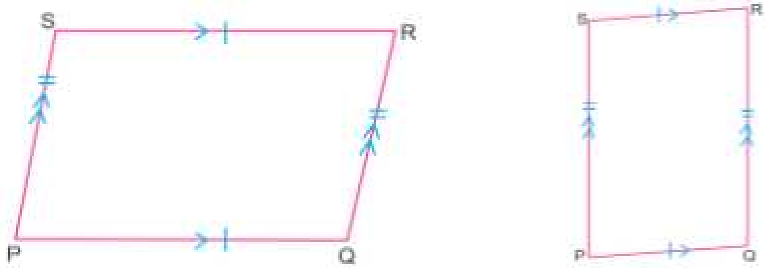


ਚਿੱਤਰ 3.3

ਇੱਥੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਸਮਲੰਬ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB||DC ਅਤੇ AD = BC.

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ (Parallelogram): ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਹੈ।

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਉਹ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਜੋੜੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ।



ਚਿੱਤਰ 3.4

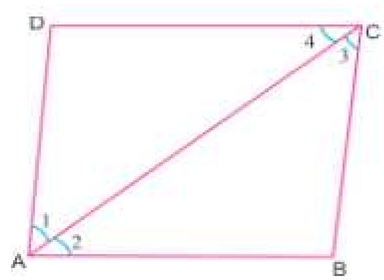
ਇੱਥੇ, ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

PQ||RS ਅਤੇ PS||QR ਜਾਂ PQ = RS ਅਤੇ PS = QR.

3.3 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of a Parallelogram) :

ਗੁਣ 1. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ । ਇਸਦਾ ਵਿਕਰਨ AC ਬਣਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 3.5

ΔABC ਅਤੇ ΔCDA ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$\angle 3 = \angle 1$

$\angle 4 = \angle 2$ [ਇਕਾਂਤਰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ]

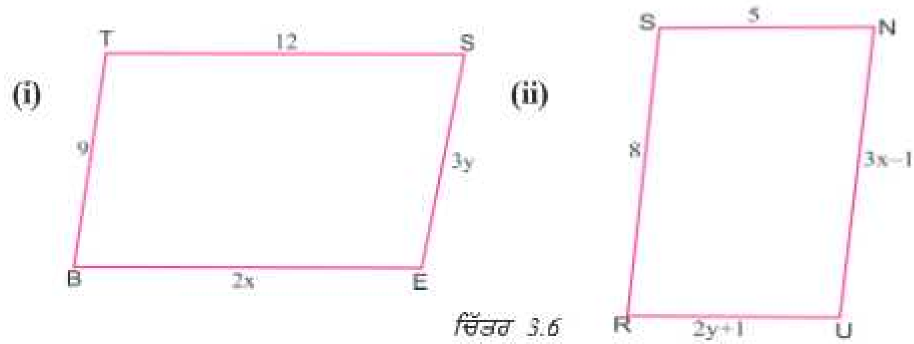
$AC = AC$ (ਸਾਂਝੀ)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ)

$\Rightarrow$ $AB = CD$ ਅਤੇ $BC = DA$ (c.p.c.t.)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 3.1 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.6

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ, BEST ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ BE = ST ਅਤੇ ES = BT

$2x = 12$ | $3y = 9$

$x = \frac{12}{2} = 6$ | $y = \frac{9}{3} = 3$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ, RUNS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ RU = NS ਅਤੇ UN = RS

$\Rightarrow 2y + 1 = 5$ | $3x - 1 = 8$

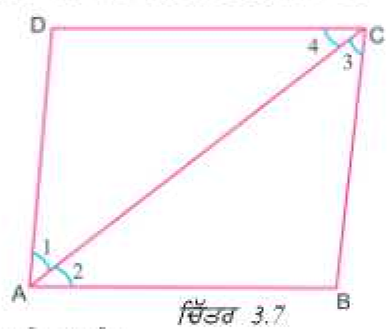
$2y = 5 - 1 = 4$ | $3x = 8 + 1 = 9$

$y = \frac{4}{2} = 2$ | $x = \frac{9}{3} = 3$

ਗੁਣ 2 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ AC ਬਣਾਓ।

ΔABC ਅਤੇ ΔCDA ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ 3.7

$\angle 2 = \angle 4$ [ਇਕਾਂਤਰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ]

$\angle 3 = \angle 1$ [ਇਕਾਂਤਰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ]

AC = AC (ਸਾਂਝਾ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ)

$\Rightarrow \angle B = \angle D$ (c.p.c.t.)

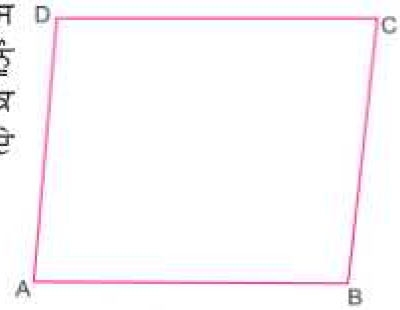
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਕਰਨ BD ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\angle A = \angle C$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਗੁਣ 3 : ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ AB||CD ਅਤੇ AD ਇੱਕ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A ਅਤੇ D 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.8

ਇਸ ਲਈ

$\therefore \quad \angle A + \angle D = 180^\circ$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$\angle A + \angle B = 180^\circ$

ਅਤੇ $\angle B + \angle C = 180^\circ$

ਅਤੇ $\angle C + \angle D = 180^\circ$

ਉਦਾਹਰਨ 3.2 : ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ?

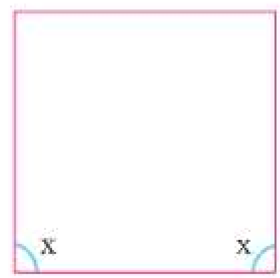
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਹਰੇਕ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ x ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore \quad x + x = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 2x = 180^\circ$

$$x = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

ਇਸ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ 90° ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.9

ਉਦਾਹਰਨ 3.3 : ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ 2 : 3 ਵਿੱਚ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

$\angle A : \angle B = 2 : 3$

ਮੰਨ ਲਓ $\angle A = 2x$ ਅਤੇ $\angle B = 3x$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore \quad \angle A + \angle B = 180^\circ$

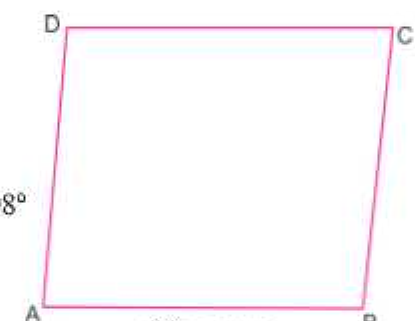
$\Rightarrow \quad 2x + 3x = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 5x = 180^\circ$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$\therefore \quad \angle A = 2x = 2 \times 36^\circ = 72^\circ, \ \angle B = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$\Rightarrow \quad \angle C = \angle A = 72^\circ$ ਅਤੇ $\angle D = \angle B = 108^\circ$



ਚਿੱਤਰ 3.10

ਉਦਾਹਰਨ 3.4 : ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ RING ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਜੇ $\angle R = 70^\circ$ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

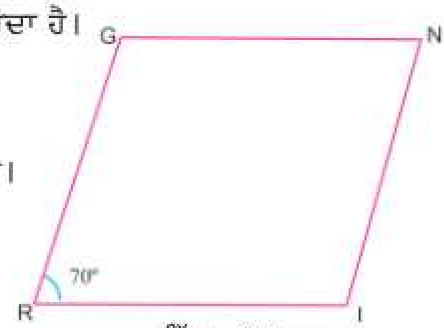
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore \quad \angle R + \angle I = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad 70^\circ + \angle I = 180^\circ \Rightarrow \angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$\Rightarrow \quad \angle N = \angle R = 70^\circ$ ਅਤੇ $\angle G = \angle I = 110^\circ$



ਚਿੱਤਰ 3.11

ਉਦਾਹਰਨ 3.5 : ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, PQRS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। x, y ਅਤੇ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad x = 110^\circ$

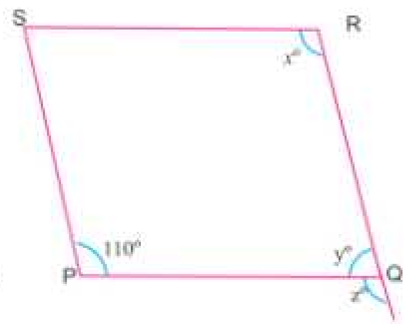
ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore \quad y + 110^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad y = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $y + z = 180^\circ$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ)

$\Rightarrow \quad 70^\circ + z = 180^\circ \Rightarrow z = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$



ਚਿੱਤਰ 3.12

ਗੁਣ 4 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ BD ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

ΔAOB ਅਤੇ ΔCOD ਵਿੱਚ

$AB = CD$ [ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ]

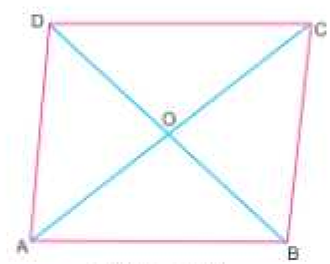
$\angle OAB = \angle OCD$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

$\angle OBA = \angle ODC$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)

$\Rightarrow \quad OA = OC$ ਅਤੇ $OB = OD$ (c.p.c.t)

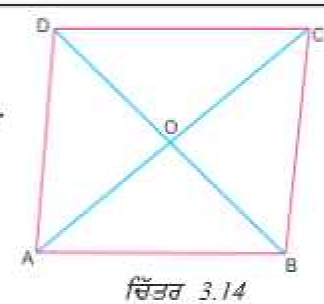
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.13

ਉਦਾਹਰਨ 3.6 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਵਿੱਚ, ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ BD ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇ OA=3 cm OB = 2.5 cm ਹੈ ਤਾਂ AC ਅਤੇ BD ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ



ਚਿੱਤਰ 3.14

ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad AC = 2\,(OA) = 2 \times 3 = 6$ cm

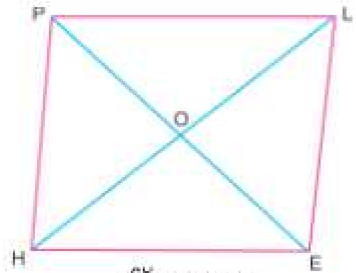
ਅਤੇ $\quad BD = 2(OB) = 2 \times 2.5 = 5$ cm

ਉਦਾਹਰਨ 3.7 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ HELP ਵਿੱਚ, HL = 10cm ਅਤੇ PE = 9 cm ਤਾਂ HO ਅਤੇ EO ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad OH = \frac{1}{2} HL = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm

ਅਤੇ $\quad EO = \frac{1}{2} PE = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5$ cm



ਚਿੱਤਰ 3.15

ਉਦਾਹਰਨ 3.8 : ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਜੇ PQRS ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad OP = OR$

$\Rightarrow \quad 3x + 2 = 17$

$\Rightarrow \quad 3x = 17 - 2 = 15$

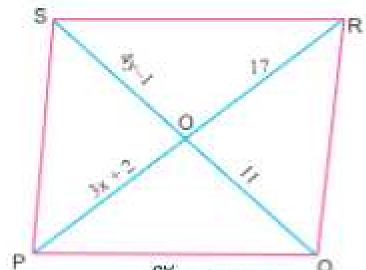
$x = \frac{15}{3} = 5$

ਅਤੇ $\quad OQ = OS$

$11 = 4y - 1$

$4y = 11 + 1 = 12$

$y = \frac{12}{4} = 3$



ਚਿੱਤਰ 3.16

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ 6cm ਅਤੇ 8cm ਹਨ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ PQRS, ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਕਰੋ। (ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ।)

   (i) PQ = ...

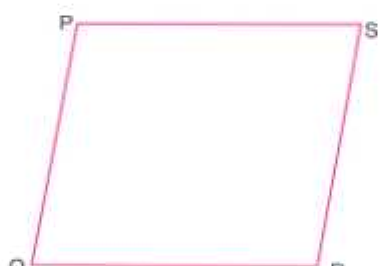
   (ii) QR = ...

   (iii) $\angle P$ = ...

   (iv) $\angle S$ = ...

   (v) $\angle P + \angle Q$ = ...

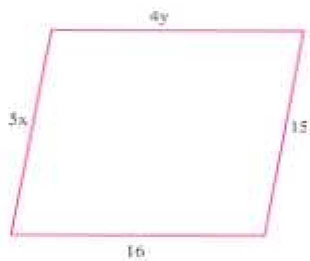
   (vi) $\angle R + \angle S$ = ...



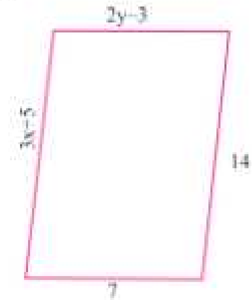
ਚਿੱਤਰ 3.17

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i)



(ii)

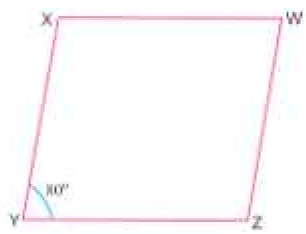


ਚਿੱਤਰ 3.18

4. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 4 : 5 ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

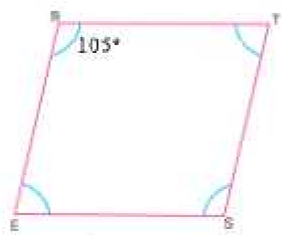
5. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 3 : 7 ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ WXYZ ਵਿੱਚ, $\angle Y = 80°$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.19

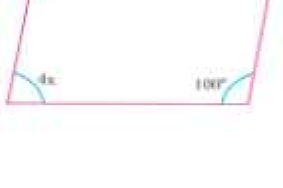
7. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ BEST ਵਿੱਚ, $\angle B = 105°$, ਹੈ। ਇਸਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।



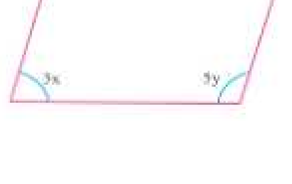
ਚਿੱਤਰ 3.20

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i)



(ii)

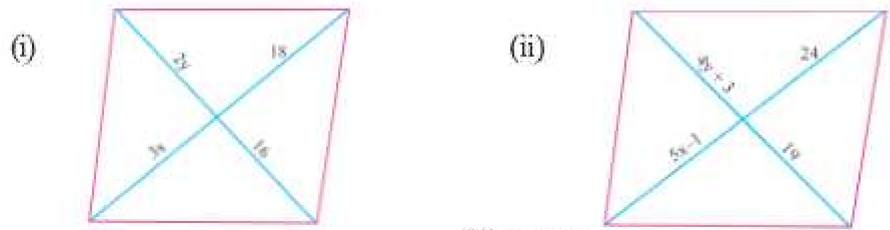


ਚਿੱਤਰ 3.21

9. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਵਿੱਚ, ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇ AC = 12 cm ਅਤੇ BD = 16 cm ਹੈ ਤਾਂ OA ਅਤੇ OD ਪਤਾ ਕਰੋ।

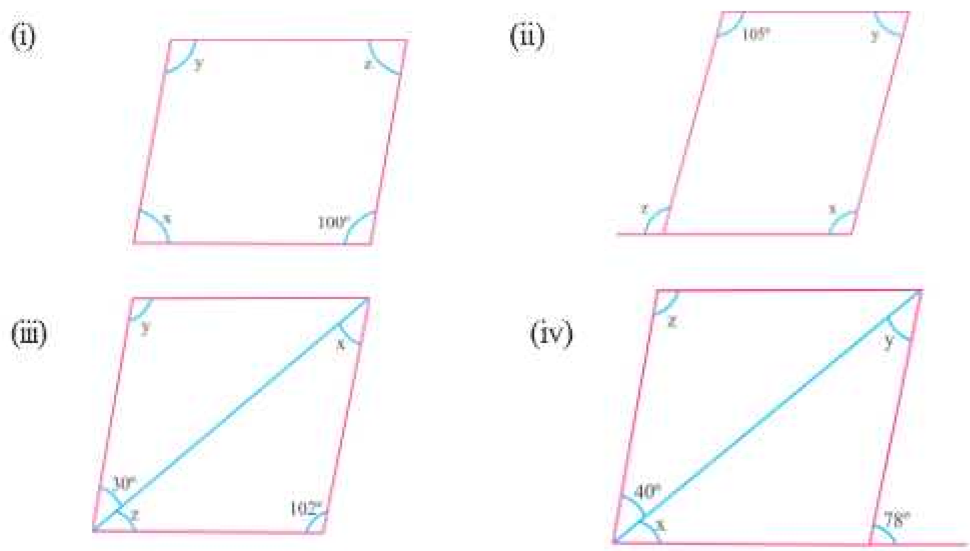
10. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਵਿੱਚ, ਵਿਕਰਨ PR ਅਤੇ QS ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇ OP = 6 cm ਅਤੇ OS = 7 cm ਹੈ ਤਾਂ PR ਅਤੇ QS ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.22

12. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ x,y ਅਤੇ z ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.23

13. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :

(i) ਜੇ ਆਇਤ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ ?

(a) 3 cm (b) 6 cm (c) 12 cm (d) 4 cm

(ii) ਜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂਅ ਦੋ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ 6x ਅਤੇ 24 ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

(a) 4 (b) 6 (c) 24 (d) 12

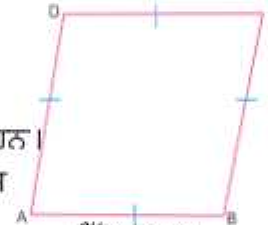
(iii) ਜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗ 3x – 2 ਅਤੇ 7 ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 6

(iv) ਜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ $4y^\circ$ ਅਤੇ 100° ਹਨ ਤਾਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 25 (b) 20 (c) 100 (d) 10

3.4 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (Rhombus) :



ਚਿੱਤਰ 3.24

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਾਂ

ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਸ ਨੂੰ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਇਥੇ ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = BC = CD = DA ਹਨ।

3.4.1 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Rhombus) :

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਾਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ, ਭਾਵ

(i) ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

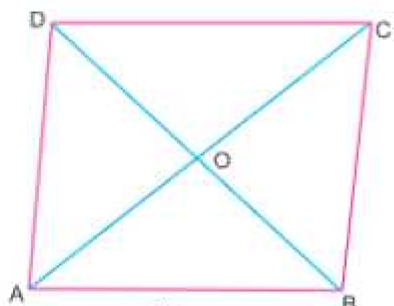
ਗੁਣ 5 : ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 90° 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ।

$\therefore \Delta AOB$ ਅਤੇ ΔBOC ਵਿੱਚ,



ਚਿੱਤਰ 3.25

$AO = OC$ (AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ)

$OB = OB$ (ਸਾਂਝਾ)

$AB = BC$ (ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ)

$\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (SSS ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਿਯਮ)

$\Rightarrow \quad \angle AOB = \angle BOC$ (c.p.c.t)

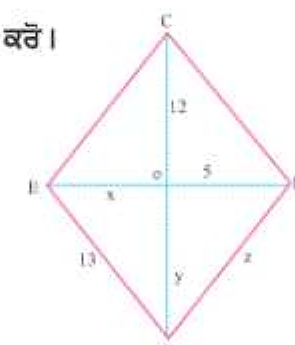
ਕਿਉਂਕਿ $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ (ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ)

$\therefore \quad \angle AOB + \angle AOB = 180°$

$\Rightarrow \quad 2\angle AOB = 180° \Rightarrow \angle AOB = \frac{180°}{2} = 90°$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 90° 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 3.18 : ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ RICE ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। x, y ਅਤੇ z ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.26

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad OR = OC \Rightarrow \quad y = 12$

ਅਤੇ $OE = OI \quad \Rightarrow \quad x = 5$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$IR = ER$

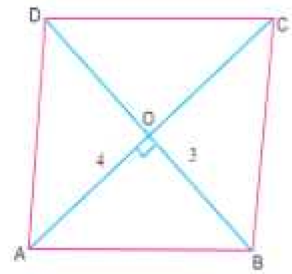
$\therefore \quad z = 13$

ਉਦਾਹਰਨ 3.10 : ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ 6cm ਅਤੇ 8 cm ਹਨ। ਇਸ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ AC = 8 cm ਅਤੇ BD = 6 cm ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ 90° 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4cm$

ਅਤੇ $OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$



ਚਿੱਤਰ 3.27

ਸਮਕੋਣੀ ΔOAB ਵਿੱਚ

ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਅਨੁਸਾਰ

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Rightarrow \quad AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$

ਇਸ ਲਈ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ AB = 5cm ਹੈ।

3.5 ਆਇਤ (Rectangle) :

ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਉਸ ਨੂੰ ਆਇਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਗੁਣ 1 : ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ 90° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ।

$\Rightarrow \quad \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

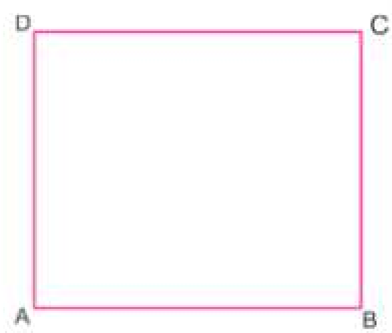
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\angle A + \angle A + \angle A + \angle A = 360°$

$\Rightarrow \quad 4\angle A = 360° \Rightarrow \angle A = \frac{360°}{4} = 90°$

$\therefore \quad \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.28

ਗੁਣ 2 : ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ BD ਹਨ।

ΔDAB ਅਤੇ ΔCBA ਵਿੱਚ,

AD = BC (ਆਇਤ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ)

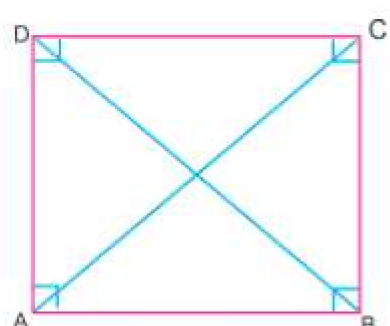
AB = AB (ਸਾਂਝਾ)

$\angle DAB = \angle CBA$ (ਹਰੇਕ ਕੋਣ 90°)

$\therefore \quad \Delta DAB \cong \Delta CBA$ (SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਿਯਮ)

$\Rightarrow \quad BD = AC$ (c.p.c.t.)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.29

ਉਦਾਹਰਨ 3.11 : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, PQRS ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle QPR = 32°$ ਹੈ ਤਾਂ $\angle PRQ$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ 90° ਹੈ।

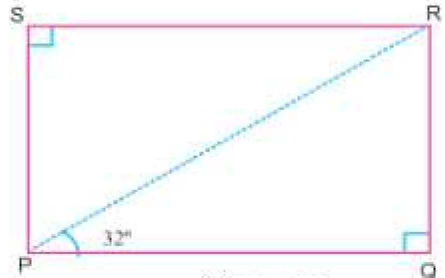
ΔPQR, ਵਿੱਚ

$\angle QPR + \angle PQR + \angle PRQ = 180°$

$\Rightarrow 32° + 90° + \angle PRQ = 180°$

$\Rightarrow 122° + \angle PRQ = 180°$

$\Rightarrow \angle PRQ = 180° - 122° = 58°$



ਚਿੱਤਰ 3.30

ਉਦਾਹਰਨ 3.12 : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ। x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਇਤ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$\therefore BC = AD$	$AB = CD$
$\Rightarrow 5x - 1 = 24$	$\Rightarrow 2y - 3 = 5$
$\Rightarrow 5x = 24 + 1 = 25$	$\Rightarrow 2y = 5 + 3 = 8$
$\Rightarrow x = \frac{25}{5} = 5$	$\Rightarrow y = \frac{8}{2} = 4$

ਚਿੱਤਰ 3.31

ਉਦਾਹਰਨ 3.13 : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, RENT ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ O 'ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। x ਪਤਾ ਕਰੋ।

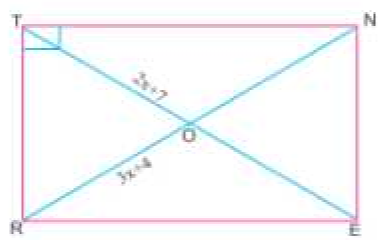
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$\therefore RN = TE \Rightarrow \frac{1}{2}RN = \frac{1}{2}TE$

$\Rightarrow OR = OT$

$\Rightarrow 3x+4 = 2x+7 \Rightarrow 3x - 2x = 7 - 4$

$x = 3$



3.6 ਵਰਗ (Square) :

ਇੱਕ ਆਇਤ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸਨੂੰ ਵਰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜਾਂ

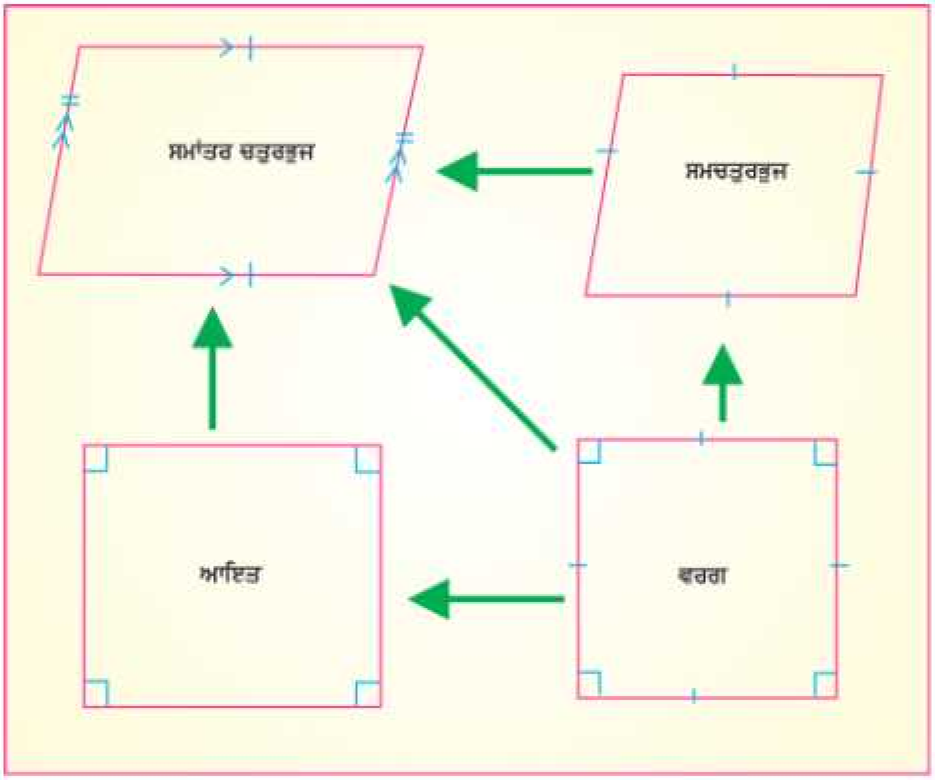
ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸਨੂੰ ਵਰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

Figure 3.33

ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਆਇਤ ਦੋਨੋਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਆਇਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਵਰਗ ਦੇ ਵੀ ਗੁਣ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 3.32

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
(ii) ਸਾਰੇ ਕੋਣ 90° ਦੇ ਹਨ।
(iii) ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
(iv) ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 90° 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.34

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਉਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

(i) ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ii) ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

2. ਉਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

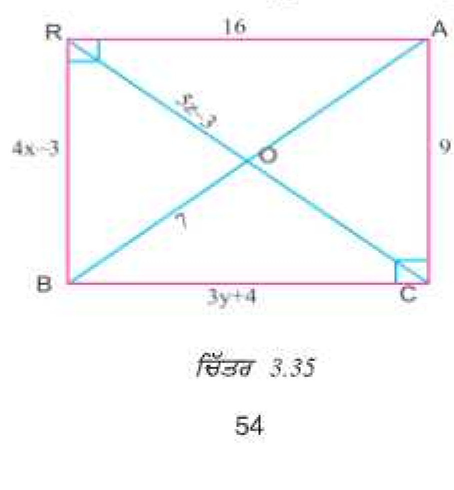
(i) ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ (ii) ਹਰੇਕ ਕੋਣ 90° ਦਾ ਹੋਵੇ।

3. ਉਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

(i) ਵਿਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

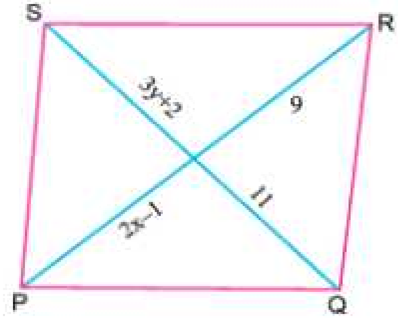
(ii) ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

4. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ RACE ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ। x, y ਅਤੇ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



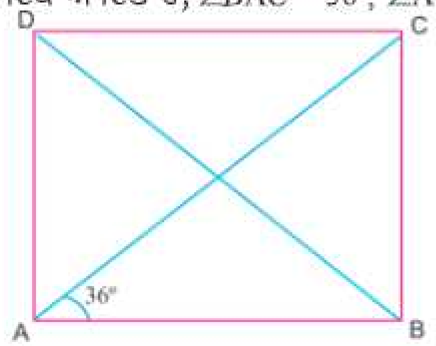
ਚਿੱਤਰ 3.35

5. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ PQRS ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.36

6. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ, $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle ACB$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.37

7. **ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :**

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ :

(a) 90° (b) 180° (c) 360° (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

(ii) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਕਿਹੜੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਦੀ ਹੈ ?

(a) ਆਇਤ (b) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (c) ਵਰਗ (d) ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ

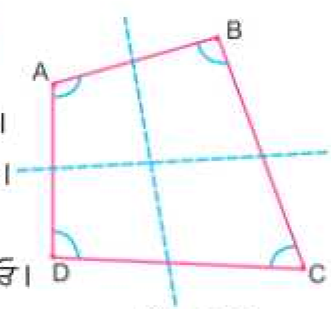
(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਕਿਹੜੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਦੀ ਹੈ ?

(a) ਆਇਤ (b) ਵਰਗ (c) ਸਮਲੰਬ (d) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ

(iv) ਜੇਕਰ $3y^\circ$ ਅਤੇ 120° ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 15° (b) 90° (c) 20° (d) 60°

ਕਿਰਿਆਵਾਂ



ਚਿੱਤਰ 3.38

ਕਿਰਿਆ 1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ **360°** ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਨ : ਰੰਗਦਾਰ ਪੇਪਰ, ਜੁਮੈਟਰੀ ਬਾਕਸ, ਰੰਗਦਾਰ ਪੈਨਸਿਲ ਜਾਂ ਪੈੱਨ।

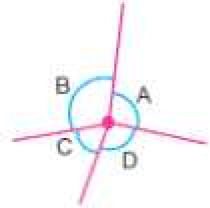
ਵਿਧੀ :

1. ਇੱਕ ਰੰਗਦਾਰ ਪੇਪਰ ਲਓ ਅਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਬਣਾਓ।
2. ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਕੱਟੋ।

3. ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ।

4. ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾਉ।

5. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ਅਤੇ $\angle D$ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਚਿਪਕਾਓ।



ਕੀ ਸਿੱਖਿਆ : ਚਾਰੇ ਕੋਣ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਚਿਪਕਾਉਣ 'ਤੇ ਉਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

ਇਸ ਲਈ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 360° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਕਰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ?

ਉੱਤਰ : 2

2. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿੰਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ : 360°

3. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿੰਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ : 360°

ਕਿਰਿਆ 2 : ਪੇਪਰ ਕੱਟਕੇ ਅਤੇ ਚਿਪਕਾ ਦੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਬਾਹਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 360° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਮੱਗਰੀ : ਰੰਗੀਨ ਪੇਪਰ, ਜੁਮੈਟਰੀ ਬੱਾਕਸ ਰੰਗਦਾਰ ਪੈਨਸਿਲ ਜਾਂ ਪੈੱਨ।

ਵਿਧੀ :

ਤ੍ਰਿਭੁਜ

(i) ਇੱਕ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਲਉ ਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਬਣਾਉ।

(ii) ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਸਹਿਤ ΔABC ਨੂੰ ਚਾਰਟ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਟੋ।

(iii) ਤਿੰਨੋਂ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ A, B, C ਨੂੰ ਕੱਟੋ।

(iv) ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਬਣਾਉ।

(v) ਤਿੰਨੋਂ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ਦੇ ਸਿਖਰ ਨੂੰ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਚਿਪਕਾਉ।

ਚਤੁਰਭੁਜ

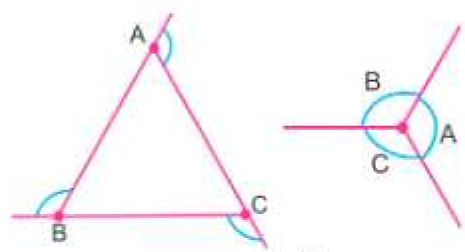
(i) ਇੱਕ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਲਉ 'ਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਬਣਾਉ।

(ii) ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਸਹਿਤ PQRS ਨੂੰ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਟੋ।

(iii) ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚੋਂ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ P,Q,R,S ਕੱਟੋ।

(iv) ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਬਣਾਉ।

(v) ਚਾਰੋਂ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ, $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਚਿਪਕਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 3.39

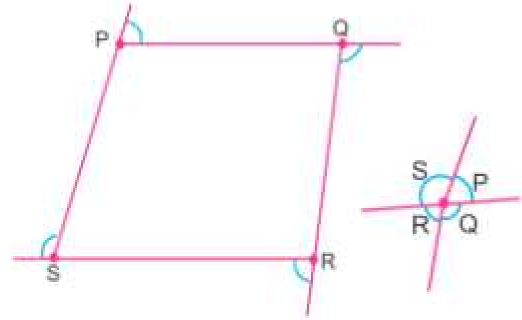
ਨਿਰੀਖਣ (Observations) : ਦੋਵੇਂ ਕੇਸਾਂ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $\angle A + \angle B + \angle C = 360°$

ਅਤੇ $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 360°$

ਠੀਕ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬਾਕੀ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਲਈ ਵੀ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਭਾਵ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 360° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.40

1. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿੰਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ : 180°

2. ਇੱਕ ਪੰਜ ਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿੰਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ : 540°

3. ਇੱਕ ਛੇ ਭੁਜ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿੰਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ : 360°

ਕਿਰਿਆ 3 : ਜਾਂਚ ਕਰਨਾ ਕਿ (1) ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(2) ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(3) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

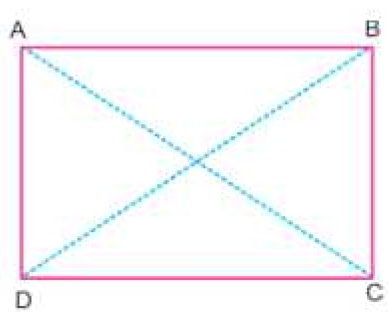
ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਨ : ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ, ਜੁਮੈਟਰੀ ਬਾਕਸ, ਰੰਗਦਾਰ ਪੈਨਸਿਲ ਜਾਂ ਪੈੱਨ।

ਵਿਧੀ : (i) ਰੰਗਦਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਲਓ ਅਤੇ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਆਇਤ, ਵਰਗ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਓ।

(ii) ਸਾਰੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਣਾਓ।

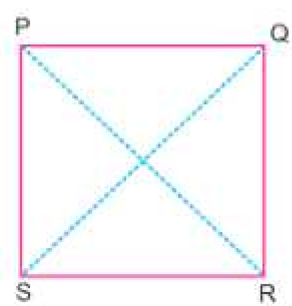
(iii) ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਮਾਪੋ।

(i) ਆਇਤ



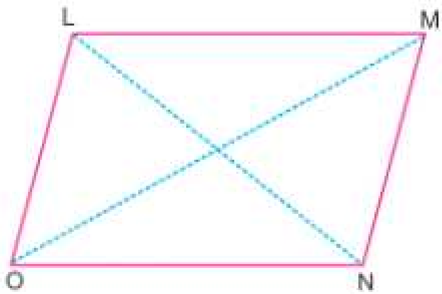
AC = ______, BD = ______

(ii) ਵਰਗ



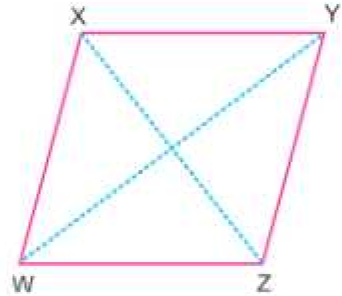
PR = ______, QS = ______

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ



NL = ______, OM = ______

(iv) ਸਮ ਚਤੁਰਭੁਜ



XZ = ______, YW = ______

ਚਿੱਤਰ 3.41

ਨਿਰੀਖਣ (Observations) :

(i) ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

(iv) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6cm ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਉੱਤਰ : 6 cm

2. ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ PR = 6 cm ਅਤੇ QS = 8cm ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਤਾਂ OP = ... ਅਤੇ OS = ...

ਉੱਤਰ : 3cm ਅਤੇ cm

3. ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ .... 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

ਉੱਤਰ : 90°.

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਰਨ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ।

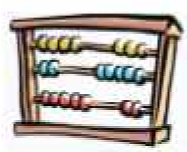
ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. 28cm
2. (i) SR (ii) PS (iii) $\angle R$ (iv) $\angle Q$ (v) 180° (vi) 180°
3. (i) $x = 3, y=4$ (ii) $x=3, y = 5$
4. $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$
5. $54^\circ, 126^\circ, 54^\circ, 126^\circ$
6. $\angle X=100^\circ, \angle W=80^\circ, \angle Z=100^\circ$
7. $\angle E = 75^\circ, \angle S = 105^\circ, \angle T =75^\circ$
8. (i) $x=20^\circ, y = 20^\circ$ (ii) $x = 20^\circ, y = 24^\circ$
9. OA = 6cm, OD = 8cm
10. PR = 12cm, QS = 14cm
11. (i) $x = 6, y = 8$ (ii) $x = 5, y = 4$
12. (i) $x = 80^\circ, y = 100^\circ, z = 80^\circ$ (ii) $x = 105^\circ, y = 75^\circ, z = 105^\circ$
    (iii) $x = 30^\circ, y = 102^\circ, z = 48^\circ$ (iv) $x = 38^\circ, y = 40^\circ, z = 102^\circ$
13. (i) b (ii) a (iii) c (iv) a

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਆਇਤ
2. ਵਰਗ
3. ਵਰਗ
4. $x = 3, y = 4, z= 2$
5. $x = 5, y = 3$
6. 54°
7. (i) b (ii) a (iii) b (iv) c



ਅਧਿਆਇ 4

ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ।*
- *ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਣਾ।*
- *ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨਾ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨਾ।*
- *ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਾਰੇ।*
- *ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਜੋੜਨਾ।*

4.1 ਮੂਲ ਅੰਕੜੇ (Raw Data / Primary Data) :

ਆਧੁਨਿਕ ਦੁਨੀਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਮਹੱਤਤਾ ਬਹੁਤ ਵੱਧ ਗਈ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਕੜੇ ਹੀ ਉਹ ਆਧਾਰ ਹਨ ਜਿਸ ਉੱਪਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਆਧਾਰਿਤ ਜਾਂਚ ਦਾ ਢਾਂਚਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਦੀ ਸਫ਼ਲਤਾ ਜਾਂ ਅਸਫ਼ਲਤਾ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਗੁਣਵੱਤਾ ਅਤੇ ਸਟੀਕਤਾ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ ਅੰਕੜਾ (data) ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ—ਸੂਚਨਾ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕੜਾ ਆਧਾਰਿਤ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨਾ ਪਹਿਲਾ ਕਦਮ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਨਿਰੀਖਕ ਵਲੋਂ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਨਿਰੀਖਣ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜੇ ਤੁਰੰਤ ਹੀ ਅਤੇ ਸਿੱਧੇ ਹੀ ਵਰਤੇ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਮੂਲ ਅੰਕੜੇ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ 8ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੇ 10 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (20 ਵਿੱਚੋਂ) ਹਨ :

12, 15, 18, 10, 13, 19, 20, 14, 12, 10

ਇੱਥੇ ਉਪਰਲੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਤੱਥ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ **ਨਿਰੀਖਣ (Observations)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਨੂੰ ਜੋ ਕਿ ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ, **ਮੂਲ ਅੰਕੜੇ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। *ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ ਅੰਕੜੇ ਉਹ ਅੰਕੜੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਮੰਤਵ ਲਈ, ਕਿਸੇ ਜਾਂਚ ਕਰਤਾ ਜਾਂ ਸੰਸਥਾ ਦੁਆਰਾ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।*

4.2 ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਤੂਤੀਕਰਨ/ਪੇਸ਼ਕਾਰੀ (Presentation of Data) :

ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਜਾਂਚ ਕਰਤਾ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਨੀਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਬੰਧ ਨੂੰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਤੂਤੀਕਰਨ/ਪੇਸ਼ਕਾਰੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੂਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਵਰਨਮਾਲਾ ਅਨੁਸਾਰ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ

(ii) ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ

ਮੂਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਜਦੋਂ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ **ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅੰਕੜੇ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ, ਇੱਕ ਕਲਾਸ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ 10 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ 25 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਅਨੁਸਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

18, 21, 17, 13, 5, 14, 20, 24, 19, 16

ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅੰਕੜੇ ਮੂਲ ਅੰਕੜੇ ਜਾਂ ਗੈਰ-ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਰੋਲ ਨੰਬਰ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	18	21	17	13	5	14	20	24	19	16

ਸਾਰਨੀ 4.1

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਸਮੂਹ ਦੀ ਮਿਆਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ **(In ascending order) :-**

5, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24

ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ **(In descending order) :-**

24, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 14, 13, 5

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਅਤੇ ਔਖਾ ਕੰਮ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸਮਝਣ ਯੋਗ ਅਤੇ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਾਰਨੀ ਬੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

4.3 ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਜਾਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ (Frequency Distribution or Frequency Table):

ਇਹ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਉਹ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਜਾਂ ਸਾਰਨੀ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(i) ਖੰਡਿਤ ਵੰਡ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ (Discrete frequency distribution)

(ii) ਅਖੰਡਿਤ ਵੰਡ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ (Continuous frequency distribution)

4.3.1. ਖੰਡਿਤ ਵੰਡ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ (Discrete frequency Distribution) :

ਮੂਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਖਰੀ ਵੰਡ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਅੰਕ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	I	II	III	IIII	~~IIII~~	~~IIII~~ I	~~IIII~~ II	~~IIII~~ III	~~IIII~~ IIII	~~IIII~~ ~~IIII~~

ਸਾਰਨੀ 4.2

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.1 : ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 25 ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖਿਆ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ।

1, 5, 2, 4, 3, 6, 1, 4, 2, 5, 1, 6, 2, 6, 3, 5, 4, 1, 3, 2, 3, 6, 1, 5, 2.

ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆ ਅੰਕਾਂ ਲਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ :

ਸੰਖਿਆ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
1	~~IIII~~	5
2	~~IIII~~	5
3	IIII	4
4	III	3
5	IIII	4
6	IIII	4
	ਕੁੱਲ	**25**

ਸਾਰਨੀ 4.3

ਉਦਾਹਰਨ 4.2 : ਇੱਕ ਗੁਰੱਪ ਵਿਚਲੇ 22 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਪਸੰਦੀਦਾ ਵਿਸ਼ੇ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

ਪੰਜਾਬੀ, ਗਣਿਤ, ਵਿਗਿਆਨ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਪੰਜਾਬੀ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਗਣਿਤ, ਗਣਿਤ, ਵਿਗਿਆਨ, ਪੰਜਾਬੀ, ਪੰਜਾਬੀ, ਵਿਗਿਆਨ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ, ਪੰਜਾਬੀ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਪੰਜਾਬੀ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਵਿਗਿਆਨ, ਪੰਜਾਬੀ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ।

ਇਹ ਵੀ, ਉੱਤਰ ਦਿਓ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਵਿਸ਼ਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ।

ਹੱਲ : ਪਸੰਦੀਦਾ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਵਿਸ਼ਾ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	(ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
ਪੰਜਾਬੀ	𝍸 II	7
ਗਣਿਤ	𝍸	5
ਵਿਗਿਆਨ	𝍸 I	6
ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	IIII	4
	ਕੁੱਲ	**22**

ਸਾਰਨੀ 4.4

ਸਾਰਨੀ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪੰਜਾਬੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.1 ਵਿੱਚ ਪਾਸੇ ਦੇ ਫਲਕ ਉੱਪਰ ਆਏ ਅੰਕ ਅਤੇ ਉਦਾਹਰਨ 4.2 ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੀ ਪਸੰਦ ਲਈ ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਇਹ ਦੱਸਦੀ ਹੈ, ਕਿ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਆਈ ਹੈ।

4.3.2 ਲਗਾਤਾਰ ਵੰਡ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ (Continuous Frequency Distribution) :-

ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਵਾਲੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਅਤੇ ਅਸਾਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਅੰਕੜੇ ਜਿਆਦਾਤਰ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ। ਪਰ ਜੇਕਰ ਅੰਕੜੇ ਦੁਹਰਾਏ ਨਹੀਂ ਜਾ ਰਹੇ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਜਿਆਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਜਾਂ ਗੁੱਟਾ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.3 : ਕਿਸੀ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ 30 ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਹਫ਼ਤਾਵਾਰੀ ਮਜ਼ਦੂਰੀ/ਤਨਖ਼ਾਹ (₹ ਵਿੱਚ) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

830, 835, 890, 810, 835, 869, 836, 890, 898, 845, 832, 820, 860, 833, 845, 855, 812, 808, 804, 835, 840, 835, 885, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840.

ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 800–810, 810–820 ਆਦਿ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ :

ਤਨਖਾਹ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
800-810	III	3
810-820	II	2
820-830	I	1
830-840	𝍸 IIII	9
840-850	𝍸	5
850-860	I	1
860-870	III	3
870-880	I	1
880-890	I	1
890-900	IIII	4
	ਕੁੱਲ	**30**

ਸਾਰਨੀ 4.5

ਨੋਟ : ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵੰਡ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰਲੀ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ :

(i) ਬਹੁਤੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦਾ ਹਫ਼ਤਾਵਾਰੀ ਮਿਹਨਤਾਨਾ ₹830 ਅਤੇ ₹840 ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(ii) ਚਾਰ ਕਰਮਚਾਰੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਨਖਾਹ ₹890 ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਲੈ ਰਹੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

* **ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ (Class Interval) :** ਹਰੇਕ ਗੁੱਟ 800–810, 810–820 ਆਦਿ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਚੀਜ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 810 ਦੋਵੇਂ ਅੰਤਰਾਲ 800–810 ਅਤੇ 810–820 ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਦੋ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਵਰਤਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਂਝਾ ਪ੍ਰੇਖਨ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਗਿਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ ਭਾਵ 810 ਨੂੰ 810–820 ਵਿੱਚ ਗਿਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ (ਨਾ ਕਿ 800–810 ਵਿੱਚ) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 820 ਅੰਤਰਾਲ 820–830 ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਹੋਵੇਗਾ (ਨਾ ਕਿ 810–820 ਦਾ)
* **ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (Lower class limit) :** ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 800–810 ਵਿੱਚ 800 ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 810–820 ਵਿੱਚ 810 ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ।
* **ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (Upper Class limit) :** ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ 800–810 ਵਿੱਚ 810 ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 810–820 ਵਿੱਚ 820 ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ।
* **ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ (Class width or class size) :** ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 800–810, 810–820 ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ 10 ਹੈ।
* **ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (Class Mark) :** ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$$\text{ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ} = \frac{(\text{ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ} + \text{ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ})}{2}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 800–810 ਲਈ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ

$$\text{ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ} = \frac{800+810}{2} = \frac{1610}{2} = 805$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ	ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ	ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ
800-810	800	810	10	805
810-820	810	820	10	815
820-830	820	830	10	825
830-840	830	840	10	835
840-850	840	850	10	845
850-860	850	860	10	855
860-870	860	870	10	865
870-880	870	880	10	875
880-890	880	890	10	885
890-900	890	900	10	895

ਸਾਰਨੀ 4.6

ਉਦਾਹਰਨ 4.4 : **ਜਮਾਤ VIII ਦੇ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :**

18, 12, 8, 6, 8, 5, 16, 23, 12, 2, 16, 2, 23, 10, 9, 20 , 12, 5, 3, 5, 6, 7, 15, 21, 13, 13, 20, 7, 1, 21, 24, 16, 23, 18, 13, 18, 3, 7, 16, 17.

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 15-20, 20-25 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੂਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 24 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਵਾਲੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 0–5, 5–10 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਅੰਕ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0-5	~~IIII~~	5
5-10	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
10-15	~~IIII~~ II	7
15-20	~~IIII~~ IIII	9
20-25	~~IIII~~ III	8
ਕੁੱਲ		**40**

ਸਾਰਨੀ 4.7

ਉਦਾਹਰਨ 4.5 : **ਜਮਾਤ VIII ਦੇ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ (cm ਵਿੱਚ) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :**

155, 158, 154, 158, 149, 148, 160, 150, 148, 159, 161, 153, 157, 153, 162, 157, 154, 159, 151, 160, 156, 156, 152, 163, 147, 155, 152, 157, 153, 155.

3cm ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੂਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉੱਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 147 ਅਤੇ 163 ਹਨ। ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ 3cm ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 147–150, 150–153, 153–156 ਆਦਿ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਉੱਚਾਈ (cm ਵਿੱਚ)	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
147-150	IIII	4
150-153	IIII	4
153-156	~~IIII~~ III	8
156-159	~~IIII~~ II	7
159-162	~~IIII~~	5
162-165	II	2
	ਕੁੱਲ	**30**

ਸਾਰਨੀ 4.8

ਅਭਿਆਸ 4.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ 40 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ :

   1, 2, 1, 5, 6, 2, 1, 3, 5, 4, 2, 6, 3, 0, 2, 4, 0, 0, 2, 3, 2, 0, 4, 1, 4, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 5, 4, 2, 4, 3, 6, 2, 1, 2

   ਇਸ ਨੂੰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

2. ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ 30 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਨ :

   6, 5, 6, 3, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 1, 2, 0, 2, 5, 1, 6, 4, 3, 0, 6, 5, 5, 1, 5, 6, 2, 6.

   ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

3. ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੇ VIII ਜਮਾਤ ਦੇ 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਉਮਰ (ਸਾਲ ਵਿੱਚ) ਤੋਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

   13, 14, 12, 13, 14, 13, 15, 14, 13, 13, 14, 14, 12, 16, 14, 13, 14, 16, 15, 14, 13, 13, 17, 12, 13.

4. ਇੱਕ ਡਿਪਾਰਟਮੈਂਟਲ ਸਟੋਰ 'ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚਿੰਨ੍ਹਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਰਸ਼ (M), ਇਸਤਰੀ (W), ਲੜਕੀ (G) ਅਤੇ ਲੜਕਾ (B) । ਹੇਠਾਂ ਸਵੇਰ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਆਏ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੀ ਲਿਸਟ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

   W W G W B M G G W W M M W W W G B M W W B G M G M W M W W W
   W M W B W M G W W W G W W M M W W M W G G M W M M W B W G G

   ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

5. ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 30–35, 35–40 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 20 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਵਜ਼ਨ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

   40, 48, 33, 38, 31, 60, 53, 49, 36, 46, 34, 65, 55, 49, 41, 47, 44, 39, 38, 42.

6. ਜਮਾਤ ਅੱਠਵੀਂ ਦੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ (60 ਵਿੱਚੋਂ) ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

   21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

   ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 0 – 10, 10 – 20 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।

7. ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 30 ਘਰਾਂ ਦੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਬਿੱਲ (₹ ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 10 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

   30, 32, 54, 45, 78, 74, 112, 66, 108, 76, 14, 20, 88, 40, 44, 35, 15, 66, 95, 84, 75, 96, 110, 74, 88, 102, 34, 14, 110, 44.

8. 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 0–5, 5–10 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

   10, 7, 5, 12, 0, 15, 25, 20, 22, 27, 17, 11, 8, 9, 6, 17, 23, 19, 31, 21, 29, 37, 31, 35, 45, 40, 49, 42, 50, 16.

9. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 20–30 ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ :

(a) 25 (b) 20 (c) 30 (d) 50

(ii) 25–35 ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ :

(a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) 60

(iii) 40–60 ਦਾ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ:

(a) 10 (b) 20 (c) 40 (d) 60

(iv) 100-150 ਦਾ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੈ :

(a) 100 (b) 120 (c) 150 (d) 125

(v) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 0–10, 10–20, 20–30 ਹਨ :

(a) ਲਗਾਤਾਰ (b) ਗੈਰ–ਲਗਾਤਾਰ (c) ਅੰਕੜੇ ਪੂਰੇ ਨਹੀਂ (d) ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ

(vi) .... ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਾਰ–ਵਾਰ ਆਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(a) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (b) ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (c) ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ

(d) ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ

(vii) ਜੇਕਰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 50–60 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ :

(a) 50 (b) 10 (c) 60 (d) 110

(viii) ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ?

(a) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (b) ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (c) ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ

(d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(ix) ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
5-10	8
10-15	10
15-20	25
20-25	10
25-30	12
30-35	6

(A) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕਿੰਨਾ ਹੈ ?

(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20

(B) ਕਿਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ?

(a) 5-10 (b) 15-20 (c) 30-35 (d) 20-25

(C) ਕਿਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ?

(a) 5-10 (b) 15-20 (c) 30-35 (d) 10-15

(D) ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੈ ?

(a) 5-10 ਅਤੇ 10-15 (b) 5-10 ਅਤੇ 30-35

(c) 25-30 ਅਤੇ 30-35 (d) 10-15 ਅਤੇ 20-25

4.4 ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਤੁਤੀਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ (Graphical Method of Representing the data)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਕਿ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਆਲੇਖੀ ਪ੍ਰਸਤੁਤੀਕਰਨ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਆਲੇਖ ਅਤੇ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਸੌਖਾ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਉੱਪਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਇੱਕ ਆਮ ਤਰੀਕਾ **ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ** ਹੈ।

4.5 ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (Histogram) : ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਲੇਖੀ ਪ੍ਰਸਤੁਤੀਕਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਉਸਦਾ ਆਧਾਰ ਹਨ ਅਤੇ ਉਚਾਈ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤ ਹੈ। ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਾਲੇ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਣੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.6 : **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।**

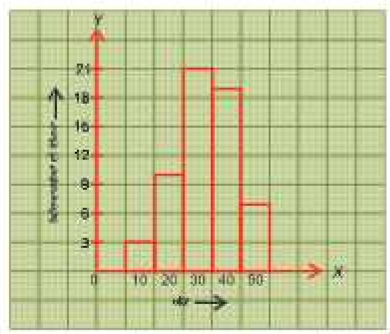
ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	ਕੁੱਲ ਜੋੜ
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	3	10	21	19	7	60

ਸਾਰਨੀ 4.9

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅੰਕ (ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ) X-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ Y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਵਰਤ ਕੇ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਮੁੱਲ ਅਨੁਸਾਰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਛੜ ਬਣਾਓ।

- ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ ਆਧਾਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਆਇਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਆਇਤ ਬਣਾਓ ਤਾਂ ਜੋ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕੇ।



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਉਦਾਹਰਨ 4.7 : **50 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਵਜ਼ਨ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਦੀ ਸਾਰਨੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।**

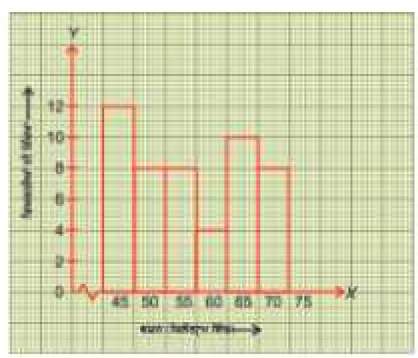
ਵਜ਼ਨ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	12	8	8	4	10	8

ਸਾਰਨੀ 4.10

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਜ਼ਨ ਨੂੰ X ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਤੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ Y ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਵਰਤ ਕੇ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

- ਕਿਉਂਕਿ X-ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਪੈਮਾਨਾ 45 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਕੋਲ ਇੱਕ **ਕਿੰਕ** KINK ਪਾਵਾਂਗੇ ਜੋ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਪੈਮਾਨਾ 45 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ 0 ਤੋਂ।
- ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ ਅਨੁਸਾਰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 4.2

ਉਦਾਹਰਨ 4.8 : ਕਿਸੀ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 30 ਕਾਮਿਆਂ ਦੇ ਹਫਤਾਵਾਰੀ ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 800–810, 810–820 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ।

(i) ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਓ।
(ii) ਕਿਸ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਕਾਮਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ?
(iii) ਕਿੰਨੇ ਕਾਮੇ ₹ 850 ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਮਾਉਂਦੇ ਹਨ ?
(iv) ਕਿੰਨੇ ਕਾਮੇ ₹ 850 ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਮਾਉਂਦੇ ਹਨ ?

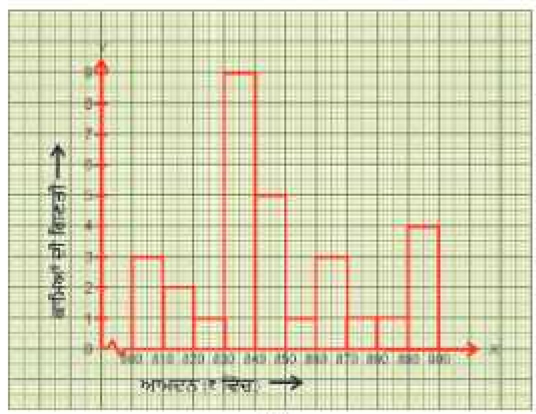
ਹੱਲ :

ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ)	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਕਾਮਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ)
800-810	III	3
810-820	II	2
820-830	I	1
830-840	~~IIII~~ IIII	9
840-850	~~IIII~~	5
850-860	I	1
860-870	III	3
870-880	I	1
880-890	I	1
890-900	IIII	4
ਕੁੱਲ ਜੋੜ		**30**

ਸਾਰਨੀ 4.11

(i) ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਲਈ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਮੰਤਵ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਮਦਨ ਨੂੰ X-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਤੇ ਕਾਮਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ Y- ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ X-ਧੁਰੇ ਤੇ ਪੈਮਾਨਾ 800 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਇੱਕ ਕਿੰਕ (kink) (⩘) ਪਾਵਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਮੁੱਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਛੜ ਬਣਾਵਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 4.3

(ii) ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਛੜ 830–840 ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਚੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 830–840 ਵਾਲੇ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਾਮੇ ਹਨ।

(iii) ₹850 ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਮਦਨ ਵਾਲੇ ਕਾਮਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 1 + 3 + 1 + 1 + 4 = 10

(iv) ₹850 ਤੋਂ ਘੱਟ ਆਮਦਨ ਵਾਲੇ ਕਾਮਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 3 + 2 + 1 + 9 + 5 = 20

ਉਦਾਹਰਨ 4.9 : ਦਿੱਤਾ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸੇ ਕਸਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਤੋਂ 40 ਸਾਲ ਉਮਰ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਸਾਖਰ (literate) ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

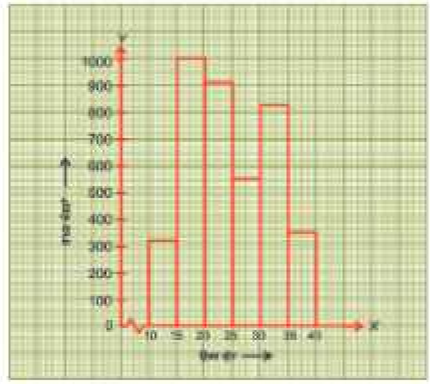
(i) ਉਹ ਉਮਰ ਗੁੱਟ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਖਰ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

(ii) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ?

(iii) ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਕੀ ਹੈ ?

(iv) ਕਿਸ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਸਾਖਰ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ?

(v) ਇਹ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 4.4

ਹੱਲ : (i) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਾਖਰ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 15–20 ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਹੈ।

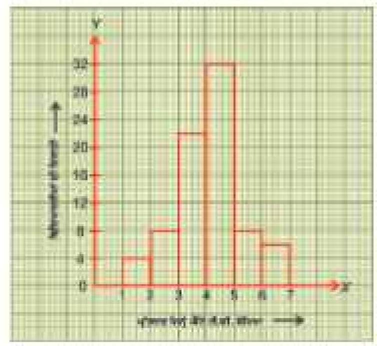
(ii) ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਈ ਵਰਗ ਦਾ ਮਾਪ 5 ਹੈ।

(iii) ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 320 ਹੈ।

(iv) ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਾਖਰ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 10–15 ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(v) ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਉਮਰ ਗੁੱਟਾ ਵਿੱਚ ਸਾਖਰ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.10 : **ਛੁੱਟੀਆਂ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵੱਲੋਂ ਜਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਗ੍ਰਾਫ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।**



ਚਿੱਤਰ 4.5

(i) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਤਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ ?

(ii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 4 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ ?

(iii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 5 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ ?

ਹੱਲ : (i) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਜਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਤੱਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ = 4-5 ਘੰਟੇ

(ii) ਜਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 4 ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ = 4 + 8 + 22 = 34

(iii) ਜਿੰਨ੍ਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 5 ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਵੇਖਿਆ = 8 + 6 = 14

ਅਭਿਆਸ 4.2

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਲਈ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਓ।

1.

ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਵਿਦਿ: ਦੀ ਗਿਣਤੀ	6	9	12	8	10	5

2.

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	15	12	18	24	21

3.

ਵਜ਼ਨ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਵਿੱਚ)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	4	8	13	15	10	12

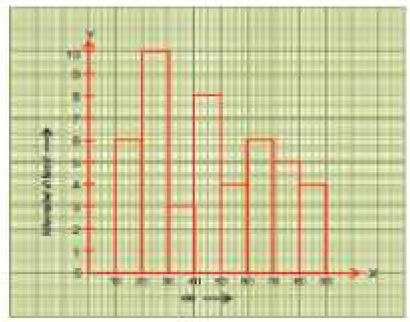
4.	ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	26	18	30	15	24	35

5.	ਰੋਜਾਨਾ ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ)	450-500	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750
	ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	16	10	12	20	25	12

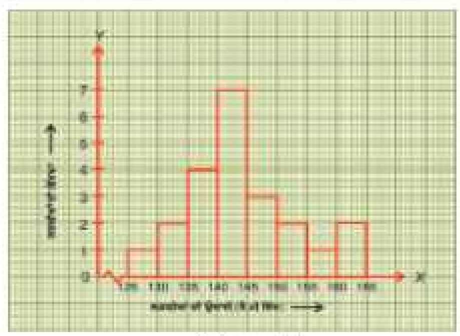
6. 20 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਪੈਸੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਰਕਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :
104, 98, 98, 88, 91, 99, 107, 109, 116, 121, 121, 133, 146, 159, 172, 185, 197, 209, 225, 108.
ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਓ। (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 50–100 ਹੋਵੇ)

7. ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜਮਾਤ VIII ਦੇ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :
18, 8, 12, 6, 8, 16, 12, 5, 23, 16, 2, 23, 7, 12, 20, 16, 9, 7, 5, 6, 5, 3, 13, 21, 13, 20, 15, 7, 1, 21, 20, 18, 13, 23, 15, 18, 7, 17, 16, 3.
15–20 ਜਿਹਾ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲੈ ਕੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ। ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਵੀ ਬਣਾਉ।

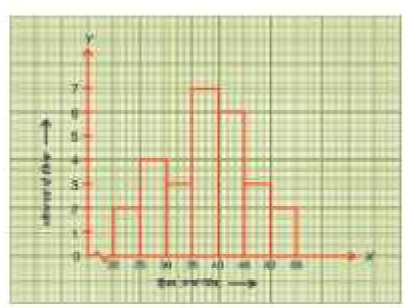
8. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 46 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।
(i) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ?
(ii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ?
(iii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ 60 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ?
(iv) ਜੇਕਰ ਪਾਸ ਹੋਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਅੰਕ 30 ਹਨ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਫੇਲ ਹੋਏ ?


ਚਿੱਤਰ 4.6

9. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।
(i) ਗ੍ਰਾਫ ਵਿੱਚ ਕੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ?
(ii) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲੜਕੀਆਂ ਕਿਸ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਹਨ ?
(iii) ਕਿੰਨੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ 145cm ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ?

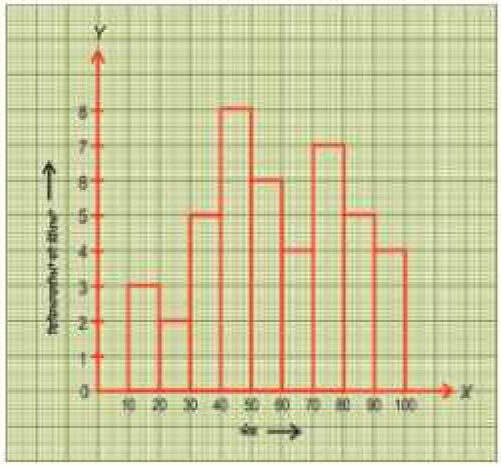

ਚਿੱਤਰ 4.7

10. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।
(i) ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਉਮਰ ਦੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੈ ?
(ii) ਕਿਸ ਉਮਰ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਅਧਿਆਪਕ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ?
(iii) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ?


ਚਿੱਤਰ 4.8

11. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(A) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 44 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.9

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(i) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ?

(a) 5 (b) 10 (c) 20 (d) 43

(ii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਮਿਲੇ ਹਨ ?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ 60 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਮਿਲੇ ਹਨ ?

(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 24

(iv) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਮਿਲੇ ਹਨ ?

(a) 13 (b) 18 (c) 8 (d) 10

(v) ਕਿਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ?

(a) 20-30 (b) 30-40 (c) 40-50 (d) 90-100

(B) ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

(a) ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (b) ਬਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ

(c) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ (d) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ × ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

12. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ/ਗਲਤ ਨੂੰ ਚੁਣੋ।

(i) ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਅਤੇ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਸਹੀ/ਗਲਤ)

(ii) ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਸਹੀ/ਗਲਤ)

(iii) ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦੀ ਕੋਈ ਮਹੱਤਤਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। (ਸਹੀ/ਗਲਤ)

4.6 ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਜਾਂ ਪਾਈ ਚਾਰਟ (Circle Graph or Pie Chart) :

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਅਤੇ ਸਾਰਨੀਕਰਨ ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਆਲੇਖੀ ਪ੍ਰਸਤੁਤੀਕਰਨ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰਾਤਮਕ ਪ੍ਰਸਤੁਤੀਕਰਨ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਚਿੱਤਰਾਤਮਕ ਪ੍ਰਸਤੂਤੀਕਰਨ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਰਜੀਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਗ੍ਰਾਫ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਸਤੂਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਕਿਸਮ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ,ਜਿਸਨੂੰ **ਚੱਕਰ ਗ੍ਰਾਫ** ਜਾਂ **ਪਾਈ ਚਾਰਟ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

"ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਚੱਕਰ ਦੇ ਨਾ-ਕੱਟਣਯੋਗ ਲਾਗਵੇਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੁਆਰਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਤੂਤੀਕਰਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸ ਖੰਡ ਵੱਲੋਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

4.6.1 ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ (Drawing a Pie Chart) : ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਕੁੱਲ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪੂਰੇ ਭਾਗ ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਮਾਪ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸਦੀ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਖੰਡ ਦੇ ਕੋਣ ਜਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰੇ ਦਰਸਾਏ ਜਾ ਰਹੇ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਕੋਣ 360° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ $= \dfrac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}} \times 360^\circ$

ਆਓ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.11 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵੱਲੋਂ ਆਈਸ ਕਰੀਮ ਦੇ ਮਨਪਸੰਦ ਫਲੇਵਰ (flavour) ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਫਲੇਵਰ	ਵਨੀਲਾ	ਚਾਕਲੇਟ	ਹੋਰ
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	50%	25%	25%

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣ 360° ਹੈ। ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ 360° ਦੇ ਭਾਗ ਹੋਣਗੇ।

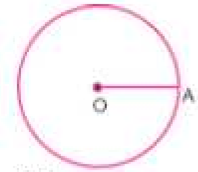
ਹੱਲ : $\therefore$ ਭਾਗ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ $= \dfrac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}} \times \mathbf{360^\circ}$

ਫਲੇਵਰ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਭਿੰਨ $= \dfrac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜ}}$	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ
ਵਨੀਲਾ	50%	$\dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$
ਚਾਕਲੇਟ	25%	$\dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
ਹੋਰ	25%	$\dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
ਕੁੱਲ	100		360°

ਸਾਰਨੀ 4.12

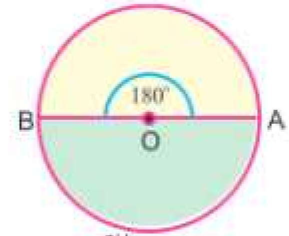
ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੀ ਰਚਨਾ ਲਈ ਪਗ (Steps for construction of a Pie Chart)

1. ਸਹੂਲਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ OA ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।



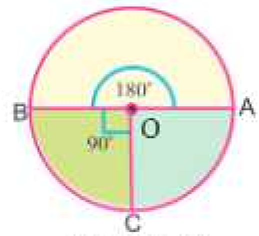
ਚਿੱਤਰ 4.10

2. ਪਹਿਲੇ ਭਾਗ (ਵਨੀਲਾ) ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ 180°. ਹੈ। ਅਧਾਰ OA ਲੈ ਕੇ ਕੋਣ ਮਾਪਕ (ਪ੍ਰੋਟੈਕਟਰ) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\angle AOB = 180°$ ਖਿੱਚੋ।



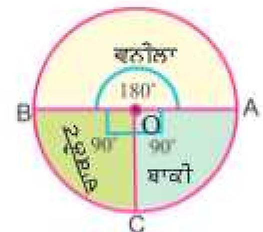
ਚਿੱਤਰ 4.11

3. ਦੂਜਾ ਭਾਗ (ਚਾਕਲੇਟ) ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ 90°. ਹੈ। ਅਧਾਰ OB ਲੈ ਕੇ ਕੋਣ ਮਾਪਕ (ਪ੍ਰੋਟੈਕਟਰ) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\angle BOC = 90°$ ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 4.12

4. ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਧਾਰ OC ਨਾਲ ਆਖਰੀ ਬਚੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ $\angle COA = 90°$ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਾਡੇ ਆਖਰੀ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਡਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.13

ਉਦਾਹਰਨ 4.12 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਓ। ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਪਸੰਦ ਕੀਤੇ ਰੰਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

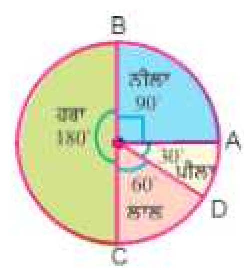
ਰੰਗ	ਨੀਲਾ	ਹਰਾ	ਲਾਲ	ਪੀਲਾ	ਕੁੱਲ
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	9	18	6	3	36

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਇੱਕ ਭਾਗ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ} = \frac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}} \times 360° .$$

ਰੰਗ	ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਭਾਗ/ਭਿੰਨ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ
ਨੀਲਾ	9	$\frac{9}{36} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360° - 90°$
ਹਰਾ	18	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360° = 180°$
ਲਾਲ	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
ਪੀਲਾ	3	$\frac{3}{36} - \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \times 360° - 30°$
ਕੁੱਲ	**36**		**360°**

ਸਾਰਨੀ 4.13



ਚਿੱਤਰ 4.14

ਉਦਾਹਰਨ 4.13 : ਇੱਕ ਸਕੂਲੀ ਬੱਚੇ ਦੁਆਰਾ ਸਾਰੇ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਲਈ ਬਤੀਤ ਕੀਤਾ ਸਮਾਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ	ਸੌਣਾ	ਸਕੂਲ ਦਾ ਸਮਾਂ	ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ	ਖੇਡ	ਬਾਕੀ	ਕੁੱਲ
ਘੰਟੇ	8	7	4	2	3	24

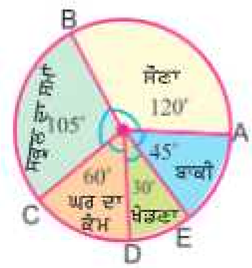
ਇਸ ਅੰਕੜੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ} = \frac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}} \times 360^\circ.$$

ਕਿਰਿਆ	ਘੰਟੇ	ਭਾਗ/ਭਿੰਨ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ
ਸੌਣਾ	8	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$
ਸਕੂਲ ਦਾ ਸਮਾਂ	7	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24} \times 360^\circ = 105^\circ$
ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ	4	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$
ਖੇਡਣਾ	2	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$
ਬਾਕੀ	3	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \times 360^\circ = 45^\circ$
ਕੁੱਲ	**24**		**360°**

ਸਾਰਨੀ 4.14



ਚਿੱਤਰ 4.15

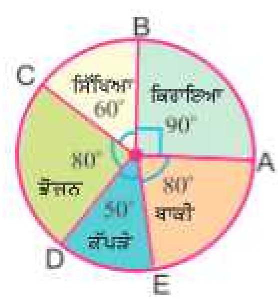
ਉਦਾਹਰਨ 4.14 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੱਦਾਂ (items) ਉੱਪਰ ਕੀਤਾ ਖਰਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉ।

ਮੱਦ (Item)	ਕਿਰਾਇਆ	ਸਿੱਖਿਆ	ਭੋਜਨ	ਕੱਪੜੇ	ਬਾਕੀ
ਰਕਮ (₹ ਵਿੱਚ)	2700	1800	2400	1500	2400

ਹੱਲ :

ਮੱਦ	ਰਕਮ	ਭਾਗ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ
ਕਿਰਾਇਆ	2700	$\frac{2700}{10800} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
ਸਿੱਖਿਆ	1800	$\frac{1800}{10800} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$
ਭੋਜਨ	2400	$\frac{2400}{10800} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360^\circ = 80^\circ$
ਕਪੜੇ	1500	$\frac{1500}{10800} = \frac{5}{36}$	$\frac{5}{36} \times 360^\circ = 50^\circ$
ਬਾਕੀ	2400	$\frac{2400}{10800} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360^\circ = 80^\circ$
ਕੁੱਲ	**10800**		**360°**

ਸਾਰਨੀ 4.15



ਚਿੱਤਰ 4.16

4.6.2 ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨਾ (Reading of Pie Chart) :

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉਣਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਸੰਬੰਧੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ} = \frac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ}}{\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}} \times 360^\circ.$$

$$\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ} = \frac{\text{ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times (\text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ})$$

$$\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਮੁੱਲ} = \frac{\text{ਇੱਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times 100$$

ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਤੋਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.15 : ਦਿੱਤਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਅਨੀਤਾ ਦੁਆਰਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਅੰਕ 540 ਹੋਣ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 4.17

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਅੰਕ = 540

$$\text{ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ} = \frac{\text{ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times \text{ਕੁੱਲ ਅੰਕ}$$

$$= \frac{\text{ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times 540$$

ਵਿਸ਼ਾ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ	ਭਿੰਨ	ਅੰਕ
ਗਣਿਤ	100°	$\frac{100^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{18}$	$\frac{5}{18} \times 540 = 150$
ਵਿਗਿਆਨ	90°	$\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 540 = 135$
ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ	70°	$\frac{70^\circ}{360^\circ} = \frac{7}{36}$	$\frac{7}{36} \times 540 = 105$
ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	100°	$\frac{100^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{18}$	$\frac{5}{18} \times 540 = 150$
ਕੁੱਲ	**360°**		**540**

ਸਾਰਨੀ 4.16

ਉਦਾਹਰਨ 4.16 : ਦਿੱਤਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ 180 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਕੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (ii) ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ

ਚਿੱਤਰ 4.18

ਹੱਲ : (i) ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 180

$$\text{ਭਾਗ ਦਾ ਮੁੱਲ} = \frac{\text{ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times \text{ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਜੋੜ}$$

$$\Rightarrow 180 = \frac{\text{ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ}}{360^\circ} \times \text{ਕੁੱਲ ਅੰਕ}$$

$$\Rightarrow 180 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \text{ਕੁੱਲ ਅੰਕ}$$

$$\Rightarrow \text{ਕੁੱਲ ਅੰਕ} = 180 \times \frac{360^\circ}{90^\circ} = 720$$

(ii)

ਵਿਸ਼ਾ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ	ਅੰਕ
ਹਿੰਦੀ	60°	$\frac{60^\circ}{360^\circ} \times 720 = 120$
ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	65°	$\frac{65^\circ}{360^\circ} \times 720 = 130$
ਵਿਗਿਆਨ	75°	$\frac{75^\circ}{360^\circ} \times 720 = 150$
ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ	70°	$\frac{70^\circ}{360^\circ} \times 720 = 140$
ਗਣਿਤ	90°	$\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 720 = 180$
ਕੁੱਲ	**360°**	**720**

ਸਾਰਨੀ 4.17

ਅਭਿਆਸ 4.3

ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਓ (1-5) :-

1. ਕਿਸੇ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬੋਲੀਆਂ ਬੋਲਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਭਾਸ਼ਾ	ਹਿੰਦੀ	ਪੰਜਾਬੀ	ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	ਮਰਾਠੀ	ਤਾਮਿਲ	ਬੰਗਾਲੀ	ਕੁੱਲ
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	10	30	12	9	7	4	72

2. ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ

ਵਿਭਾਗ	ਵਿਗਿਆਨ	ਆਰਟਸ	ਕਾਮਰਸ	ਕਾਨੂੰਨ	ਸਿੱਖਿਆ	ਕੁੱਲ
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1000	1200	650	450	300	3600

3. ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੱਦਾਂ ਉੱਪਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਖਰਚ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਮੱਦ	ਭੋਜਨ	ਕੱਪੜੇ	ਕਿਰਾਇਆ	ਸਿੱਖਿਆ	ਬਾਕੀ
ਖਰਚ (₹ ਵਿੱਚ)	4000	2000	1500	1500	1000

4. ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬੇਕਰੀ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤਾਂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਮੱਦ	ਆਮ ਬਰੈਡ	ਫਰੂਟ ਬਰੈਡ	ਕੇਕ	ਬਿਸਕੁਟ	ਬਾਕੀ
ਵਿਕਰੀ (₹ਵਿੱਚ)	260	40	100	60	20

5. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਮਕਾਨ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਹੋਏ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਮੱਦ	ਸੀਮੇਂਟ	ਲੱਕੜੀ	ਇੱਟਾਂ	ਮਜ਼ਦੂਰੀ	ਸਟੀਲ	ਬਾਕੀ
ਖਰਚ (ਹਜ਼ਾਰ ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ)	60	30	45	75	45	45

6. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਇੱਕ ਭਾਰਤੀ ਰਾਜ ਦੁਆਰਾ ਸਲਾਨਾ ਖੇਤੀ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ 8100 ਟਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 4.19

7. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਕੁੱਲ 880 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਵੱਲੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 4.20

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਕੱਪੜਿਆਂ ਉੱਪਰ ਖਰਚ ₹ 1650 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

(i) ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ਕਿੰਨਾ ਹੈ ?

(ii) ਹਰੇਕ ਮੱਦ ਉੱਪਰ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 4.21

9. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ 135 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਕੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ।

(ii) ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ।

ਚਿੱਤਰ 4.22

10. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਵਿਚਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦਾ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

(a) ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ (b) ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (c) ਪਾਈ ਚਾਰਟ (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(ii) ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣਾ ਦਾ ਜੋੜ :

(a) 90° (b) 180° (c) 360° (d) 270°

(iii) 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ 8 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਬਾਗਬਾਨੀ ਨੂੰ ਸ਼ੌਕ ਵਜੋਂ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਬਾਗਬਾਨੀ ਨੂੰ ਸ਼ੌਕ ਵਜੋਂ ਚੁਣਿਆ ਹੈ, ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ :

(a) 72° (b) 90° (c) 50° (d) 30°

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦੇ 60% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪੰਜਾਬੀ ਬੋਲਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪੰਜਾਬੀ ਬੋਲਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ :

(a) 126° (b) 216° (c) 144° (d) 162°

(v) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਖੇਡਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ 108° ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਖੇਡਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ :

(a) 30% (b) 45% (c) 90% (d) 72%

11. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਪਾਈ ਚਾਰਟ, ਸ਼ਿਖਾ ਦੁਆਰਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੱਦਾਂ 'ਤੇ ਕੀਤੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖ਼ਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ₹ 36000 ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਵਿਕਲਪ ਚੁਣੋ।

(i) ਉਹ ਭੋਜਨ 'ਤੇ ਕਿੰਨਾ ਖ਼ਰਚ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

(a) ₹ 8100 (b) ₹ 3600

(c) ₹ 13500 (d) ₹ 10800

(ii) ਉਹ ਕਿਰਾਏ ਉੱਪਰ ਕਿੰਨਾ ਖ਼ਰਚ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

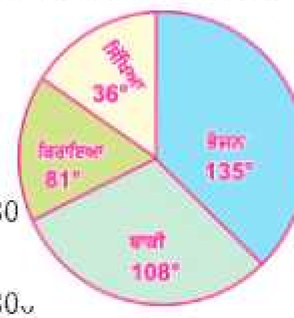
(a) ₹ 8100 (b) ₹ 3600 (c) ₹ 13500 (d) ₹ 1080

(iii) ਉਹ ਬਾਕੀ ਮੱਦਾਂ ਤੇ ਕਿੰਨਾ ਖ਼ਰਚ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

(a) ₹ 8100 (b) ₹ 3600 (c) ₹ 13500 (d) ₹ 1080

(iv) ਉਹ ਸਿੱਖਿਆ ਉੱਪਰ ਕਿੰਨਾ ਖ਼ਰਚ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

(a) ₹ 8100 (b) ₹ 3600 (c) ₹ 13500 (d) ₹ 10800



ਚਿੱਤਰ 4.23

4.7 ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ (Chance and Probability) :-

ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਕਸਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ—

(i) ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਹੋ।

(ii) ਅੱਜ ਬਾਰਿਸ਼ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iii) ਭਾਰਤੀ ਟੀਮ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੱਧ ਹਨ।

ਅਜਿਹੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਨ : ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਸ਼ਾਇਦ, ਲਗਦਾ ਹੈ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਆਦਿ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਹੀ ਸ਼ਬਦ ਇੱਕ ਹੀ ਮਤਲਬ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਘਟਨਾ ਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਪੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਵਾਪਰਨ ਜਾਂ ਨਾ ਵਾਪਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਰਥ ਦਾ ਇੱਕ ਕੱਚਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਹੈ। ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤਤਾ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸੰਕਲਪ 18ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਜਿਵੇਂ, ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣਾ, ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣਾ, ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਪਤਾ ਖਿੱਚਣਾ ਆਦਿ ਕੁਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਕਾਰਨ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਆਇਆ। ਸੰਯੋਗ ਦੀ ਖੇਡ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ (Getting a Result): ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਦਾ ਮੈਚ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਟੀਮ ਪਹਿਲਾ ਬੱਲੇਬਾਜੀ ਕਰੇਗੀ, ਦੋਵੇਂ ਟੀਮਾਂ ਦੇ ਕਪਤਾਨ ਸਿੱਕਾ ਸੁੱਟ ਕੇ ਟੱਸ ਕਰਨ ਲਈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਾ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਦੋ ਨਤੀਜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਦਾ ਆਉਣਾ ਇੱਕ **ਘਟਨਾ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ 1, 2, 3, 4, 5 ਜਾਂ 6 ਹਨ ਅਤੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਸੁੱਟਣਾ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਾਂ ਘਟਨਾ	ਨਤੀਜਾ
1. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਨਾ	ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ
2. ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣਾ	1, 2, 3, 4, 5, ਜਾਂ 6

4.7.1 ਸੰਯੋਗ ਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਾਲ ਜੋੜਨਾ (Linking chances to probability) :

- ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਵਾਪਰਨ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ **ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 2

ਹੁਣ ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਚਿਤ ਦਾ ਆਉਣ ਦਾ ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਿਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਟ ਦਾ ਆਉਣ ਦਾ ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਟ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = 1/2 ਹੈ।

ਕੁੱਲ ਪਰਿਣਾਮ	ਘਟਨਾ	ਸੰਭਾਵਨਾ
2	ਪਟ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 1	2 ਵਿੱਚੋਂ 1 ਭਾਵ $\frac{1}{2}$
	ਚਿਤ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 1	2 ਵਿੱਚੋਂ 1 ਭਾਵ $\frac{1}{2}$

ਸਾਰਨੀ 4.18

- ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹਨ। ਸਾਰੇ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹਨ।

ਕੁੱਲ ਪਰਿਣਾਮ	ਘਟਨਾ	ਗਿਣਤੀ	ਸੰਭਾਵਨਾ
6	ਸੰਖਿਆ 1	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$
	ਸੰਖਿਆ 2	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$
	ਸੰਖਿਆ 3	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$
	ਸੰਖਿਆ 4	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$
	ਸੰਖਿਆ 5	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$
	ਸੰਖਿਆ 6	1	6 ਵਿੱਚੋਂ 1 = $\frac{1}{6}$

ਸਾਰਨੀ 4.19

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$P(E) = \frac{\text{ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ}}{\text{ਕੁੱਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ}}$$

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 4.17 : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਚਿਤ ਆਉਣ ਦੀ। (ii) ਪਟ ਆਉਣ ਦੀ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕੁੱਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 2

ਚਿੱਤਰ 4.24

(i) ਚਿਤ = 2 ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 1

ਇਸ ਲਈ P (ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ) = $\frac{1}{2}$

(ii) ਪਟ = 2 ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 1

ਇਸ ਲਈ P (ਪਟ) = $\frac{1}{2}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.18 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾ ਤੇ 3 ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵੇਖਿਆ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

(i) ਇਹ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹੋਵੇਗੀ। (ii) ਇਹ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੱਲ : ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਗੇਦਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਪਰਿਣਾਮ) = 5 + 3 = 8

(i) ਲਾਲ ਗੇਂਦਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 8 ਵਿੱਚੋਂ 5

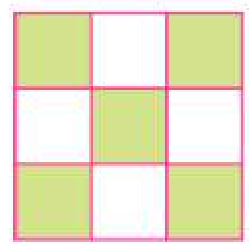
$\therefore$ P (ਲਾਲ ਗੇਂਦ) = $\frac{5}{8}$

(ii) ਨੀਲੀਆਂ ਦੀ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 8 ਵਿੱਚੋਂ 3

$\therefore$ P (ਲਾਲ ਗੇਂਦ) = $\frac{3}{8}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.19 : ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਰਗ ਨੂੰ 9 ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਭਾਗ ਅਚਾਨਕ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਭਾਗ

(i) ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ (ii) ਗੈਰ-ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ।



ਚਿੱਤਰ 4.25

ਹੱਲ : **ਕੁੱਲ ਬਕਸੇ** = 9

(i) ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਡੱਬੇ = 9 ਵਿੱਚੋਂ 5

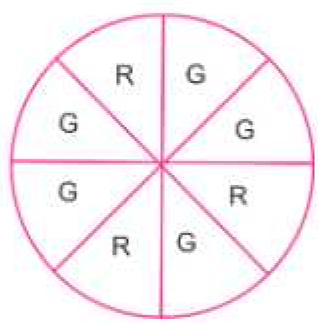
$\therefore$ P (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ) = $\frac{5}{9}$

(ii) ਗੈਰ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਡੱਬੇ = 9 ਵਿੱਚੋਂ 4

$\therefore$ P (ਗੈਰ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ) = $\frac{4}{9}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.20 : ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਨੂੰ 8 ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ R ਲਾਲ ਰੰਗ ਨੂੰ ਅਤੇ G ਹਰੇ ਰੰਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਭਾਗ

(i) ਹਰੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ। (ii) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.26

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ ਭਾਗ = 8

(i) G ਵਾਲੇ ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 8 ਵਿੱਚੋਂ 5

$\therefore$ P (ਹਰਾ ਰੰਗ) = $\frac{5}{8}$

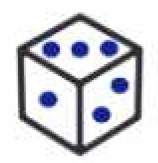
(ii) R ਵਾਲੇ ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 8 ਵਿੱਚੋਂ 3

$\therefore$ P (ਲਾਲ ਰੰਗ) = $\frac{3}{8}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.21 ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਦੀ (ii) ਸੰਖਿਆ 2 ਜਾਂ 4 ਆਉਣ ਦੀ।

(iii) 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਦੀ (iv) ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਦੀ।



ਚਿੱਤਰ 4.27

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ ਪਰਿਣਾਮ = 6

(i) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ = 2, 3, 5

ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 6 ਵਿੱਚੋਂ 3

$\therefore$ P (ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) ਸੰਖਿਆ 2 ਜਾਂ 4 ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ = 2

$\therefore$ P (ਸੰਖਿਆ 2 ਜਾਂ 4) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(iii) 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4 = 5, 6

4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ = 6 ਵਿੱਚੋਂ 2

$\therefore$ P (4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(iv) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ = 1, 3, 5

ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 6 ਵਿੱਚੋਂ 3

$\therefore$ P (ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.22 ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਬੰਟੇ, 7 ਸਫੇਦ ਬੰਟੇ ਅਤੇ 3 ਨੀਲੇ ਬੰਟੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬੰਟੇ ਨੂੰ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਨਚੇਤ ਕੱਢਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸਦਾ ਰੰਗ ਹੈ :

(i) ਲਾਲ (ii) ਸਫੇਦ (iii) ਨੀਲਾ (iv) ਸਫੇਦ ਨਹੀਂ

ਹੱਲ : ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬੰਟੇ = 5 + 7 + 3 = 15

(i) ਲਾਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 15 ਵਿੱਚੋਂ 5

$\therefore$ P (ਲਾਲ ਬੰਟਾ) = $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

(ii) ਸਫੇਦ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 15 ਵਿੱਚੋਂ 7

$\therefore$ P (ਸਫੇਦ ਬੰਟਾ) = $\frac{7}{15}$

(iii) ਨੀਲੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 15 ਵਿੱਚੋਂ 3

$\therefore$ P (ਨੀਲਾ ਬੰਟਾ) $= \frac{3}{15} - \frac{1}{5}$

(iv) ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਸਫੈਦ ਨਹੀਂ ਹੈ = 5 + 3 = 8 (15 ਵਿੱਚੋਂ)

$\therefore$ P (ਸਫੈਦ ਨਹੀਂ) $= \frac{8}{15}$

ਉਦਾਹਰਨ 4.23 **20 ਕਾਰਡ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਪਰ 1, 2, 3 .... 20 ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਾਰਡ ਕੱਢੇ ਤਾਂ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਾਰਡ ਉੱਪਰ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।**

(i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ (ii) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ

(iii) 3 ਨਾਲ ਵਿਭਾਜਿਤ ਸੰਖਿਆ (iv) ਅੰਕ

ਹੱਲ : ਕਾਰਡਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 20

(i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ = 1, 3, 5, 7, 9, 11,13, 15, 17, 19

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 20 ਵਿੱਚੋਂ 10

$\therefore$ P (ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ) $= \frac{10}{20} - \frac{1}{2}$

(ii) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ = 2,3,5,7,11,13,17,19

ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 20 ਵਿੱਚੋਂ 8

$\therefore$ P (ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ) $= \frac{8}{20} - \frac{2}{5}$

(iii) 3 ਨਾਲ ਵਿਭਾਜਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ = 3, 6, 9, 12, 15, 18

3 ਨਾਲ ਵਿਭਾਜਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 20 ਵਿੱਚੋਂ 6

$\therefore$ P (3 ਨਾਲ ਵਿਭਾਜਿਤ ਸੰਖਿਆ) $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(iv) ਅੰਕ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 20 ਵਿੱਚੋਂ 9

$\therefore$ P (ਅੰਕ) $= \frac{9}{20}$

ਅਭਿਆਸ 4.4

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

   (i) 3 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ (ii) 5 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ (iii) ਸੰਖਿਆ 4 ਹੋਵੇਗੀ।

2. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 7 ਹਰੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਵੇਖਿਆ ਕੱਢਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ :

   (i) ਹਰੀ ਗੇਂਦ ਹੋਵੇ (ii) ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹੋਵੇ

3. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਨੀਲੇ ਬੰਟੇ, 8 ਹਰੇ ਬੰਟੇ, 4 ਲਾਲ ਬੰਟੇ ਅਤੇ 7 ਪੀਲੇ ਬੰਟੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬੰਟੇ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਵੇਖਿਆ ਕੱਢਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ :

   (i) ਨੀਲਾ ਬੰਟਾ ਹੋਵੇ (ii) ਹਰਾ ਬੰਟਾ ਹੋਵੇ (iii) ਲਾਲ ਬੰਟਾ ਹੋਵੇ

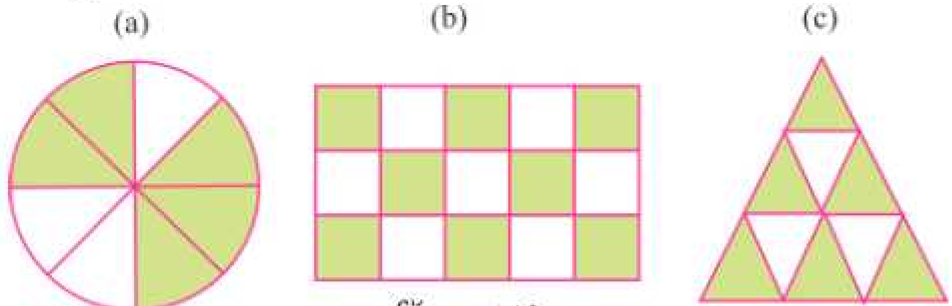
   (iv) ਪੀਲਾ ਬੰਟਾ ਹੋਵੇ (v) ਨੀਲਾ ਬੰਟਾ ਨਾ ਹੋਵੇ (vi) ਲਾਲ ਬੰਟਾ ਨਾ ਹੋਵੇ।

4. ਇੱਕ ਕਲਾਸ ਵਿੱਚ 15 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 12 ਲੜਕੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਜਮਾਤ ਮੋਨੀਟਰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਮੋਨੀਟਰ ਇੱਕ

(i) ਲੜਕਾ ਹੋਵੇਗਾ (ii) ਲੜਕੀ ਹੋਵੇਗੀ

5. ਜੇਕਰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਰਨ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ (i) ਸੁਰ ਹੋਵੇਗਾ (ii) ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਵੇਗਾ।

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨੂੰ ਅਚਨਚੇਤ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਭਾਗ (i) ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇਗਾ (ii) ਗੈਰ-ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 4.29

7. 25 ਕਾਰਡ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਪਰ 1, 2, 3 .... 25 ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਕੱਢੇ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਾਰਡ ਉੱਪਰ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ :

(i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ (ii) ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ (iii) 5 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ (iv) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ

8 **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ 'ਤੇ ਚਿਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

(ii) ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{4}$

(iii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੁਰ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{5}{18}$

(iv) ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੈ ?

(a) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣਾ (b) ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਨਾ

(c) ਇੱਕ ਜਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਬੰਟੇ ਨੂੰ ਚੁਣਨਾ (d) ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ।

(v) ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 10 ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ, ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਮਿਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ।

(a) $\frac{1}{10}$ (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{5}$

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ।*
- *ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਅਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 4.1

1.

ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0	𝍸	5
1	𝍸 I	6
2	𝍸 𝍸 II	12
3	𝍸	5
4	𝍸 I	6
5	III	3
6	III	3
	ਕੁੱਲ	40

2.

ਹਰ ਰੋਜ਼ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0	II	2
1	III	3
2	𝍸 I	6
3	III	3
4	IIII	4
5	𝍸 I	6
6	𝍸 I	6
	ਕੁੱਲ	30

3.

ਉਮਰ (ਸਾਲ ਵਿੱਚ)	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
12					3
13	卌 ||||	9
14	卌 |||	8
15				2
16				2
17			1
	ਕੁੱਲ	25

4.

ਗ੍ਰਾਹਕ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
M	卌 卌 卌	15
W	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
B	卌	5
G	卌 卌 ||	12
	ਕੁੱਲ	60

5.

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
30-35	|||	3
35-40	||||	4
40-45	||||	4
45-50	卌	5
50-55			1
55-60			1
60-65			1
65-70			1
	ਕੁੱਲ	20

6.

ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0-10	||	2
10-20	卌 卌	10
20-30	卌 卌 卌 卌		21
30-40	卌 卌 卌 ||||	19
40-50	卌 ||	7
50-60			1
	ਕੁੱਲ	60

7.

ਬਿੱਲ (ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ)	ਮਿਲਾਨ ਚਿਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
10-20	III	3
20-30	I	1
30-40	IIII	4
40-50	IIII	4
50-60	I	1
60-70	II	2
70-80	𝍸	5
80-90	III	3
90-100	II	2
100-110	II	2
110-120	III	3
	ਕੁੱਲ	30

8.

ਅੰਕ	ਮਿਲਾਨ ਚਿਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0-5	I	1
5-10	𝍸	5
10-15	III	3
15-20	𝍸	5
20-25	IIII	4
25-30	III	3
30-35	II	2
35-40	II	2
40-45	II	2
45-50	II	2
50-55	I	1
	ਕੁੱਲ	30

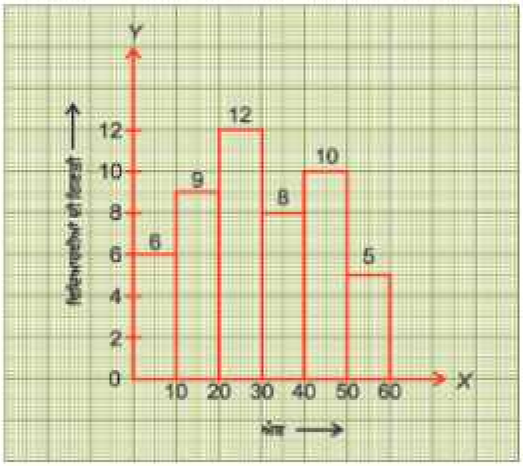
9. (i) c (ii) a (iii) b (iv) d (v) a (vi) a (vii) a (viii) a

(ix)

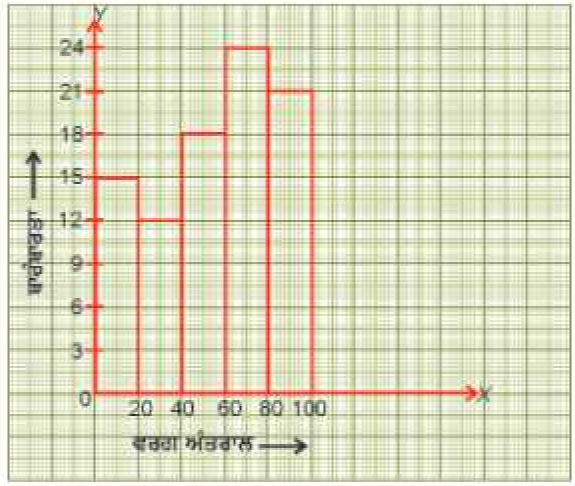
(A)	(a)
(B)	(b)
(C)	(c)
(D)	(d)

ਅਭਿਆਸ 4.2

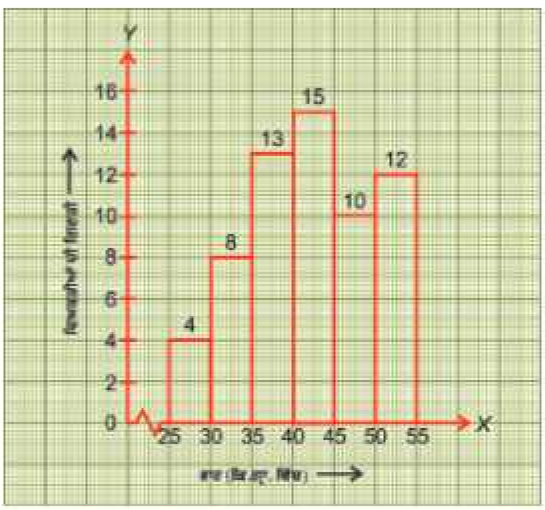
1.



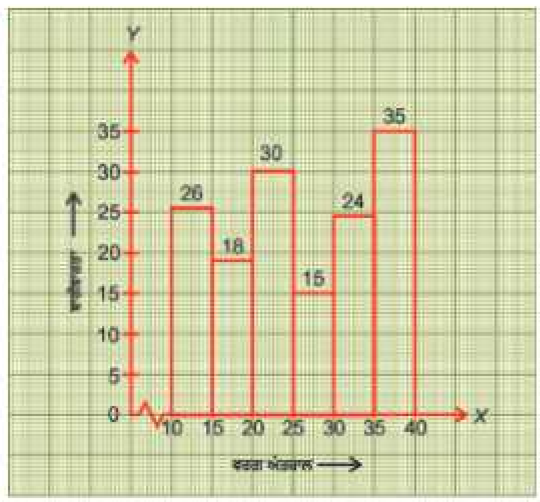
2.



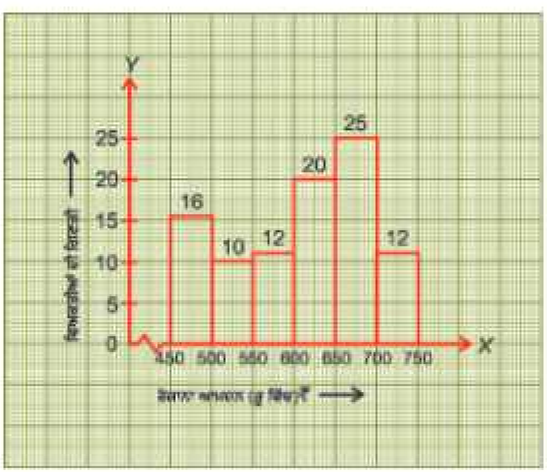
3.



4.

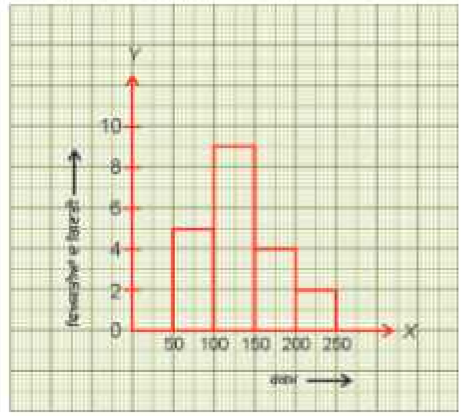


5.



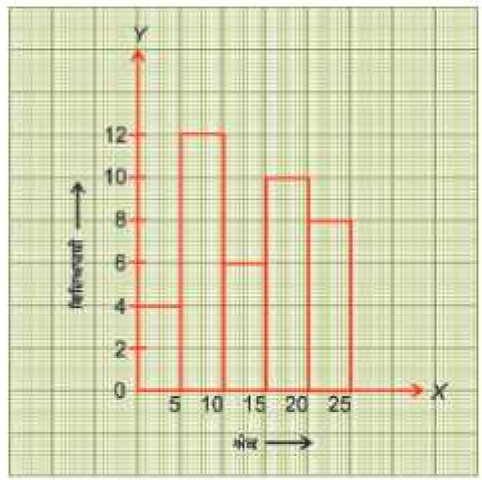
6. ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਰਕਮ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
50-100	‖‖̸	5
100-150	‖‖̸ IIII	9
150-200	IIII	4
200-250	II	2
	ਕੁੱਲ	20



7. ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਨੀ

ਅੰਕ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਵਿਦਿਆਰਥੀ
0-5	IIII	4
5-10	‖‖̸ ‖‖̸ II	12
10-15	‖‖̸ I	6
15-20	‖‖̸ ‖‖̸	10
20-25	‖‖̸ III	8
	ਕੁੱਲ	40



8. (i) 10 (ii) 6 (iii) 15 (iv) 16

9. (i) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ii) 140-145 (iii) 8

10. (i) 2, 2 (ii) ਵੱਧ ਉਮਰ ਗੁੱਟ 35-40, ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 20-25, 50-55 (iii) 5

11. (A) (i) b (ii) d (iii) a (iv) d (v) c (B) d

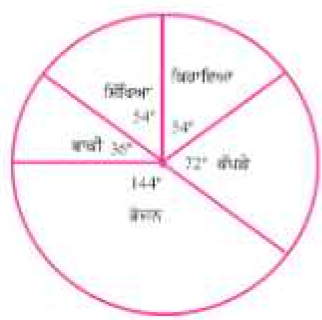
12. (i) ਗਲਤ (ii) ਗਲਤ (iii) ਗਲਤ

ਅਭਿਆਸ 4.3

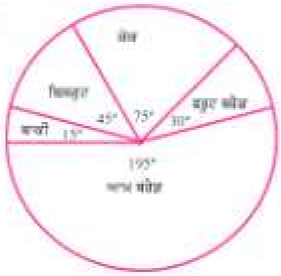
1.

2.

3.



4.



5.

6. ਕਣਕ = 2700 ਟਨ, ਚੀਨੀ = 2250 ਟਨ, ਚਾਵਲ = 1350 ਟਨ, ਦਾਲਾਂ = 1125 ਟਨ, ਮੱਕੀ = 675 ਟਨ

7. ਗਣਿਤ = 264, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ = 176, ਵਿਗਿਆਨ = 198, ਹਿੰਦੀ = 132, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ = 110

8. (i) ₹ 16500 (ii) ਭੋਜਨ = ₹ 4950, ਕਿਰਾਇਆ = ₹ 4125, ਬੱਚਤ = ₹ 2475, ਕੱਪੜੇ = ₹ 1650, ਬਾਕੀ = ₹ 3300

9. (i) 540 (ii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ = 93, ਹਿੰਦੀ = 90, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ = 108, ਵਿਗਿਆਨ = 114, ਗਣਿਤ = 135

ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

10. (i) c (ii) c (iii) a (iv) b (v) a

11. (i) c (ii) a (iii) d (iv) b

ਅਭਿਆਸ 4.4

1. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{1}{6}$

2. (i) $\frac{7}{12}$ (ii) $\frac{5}{12}$

3. (i) $\frac{5}{24}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) $\frac{7}{24}$ (v) $\frac{19}{24}$ (vi) $\frac{5}{6}$

4. (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{5}{9}$

5. (i) $\frac{5}{26}$ (ii) $\frac{21}{26}$

6. (a) (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{7}{15}$

(c) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{3}$

7. (i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{12}{25}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{9}{25}$

8. (i) d (ii) b (iii) b (iv) d (v) b

ਅਧਿਆਇ 5

ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗ ਮੂਲ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ—

- *ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।*
- *ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗੁਣਾਂ ਬਾਰੇ।*
- *ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਬਾਰੇ।*

5.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਭੁਜਾ × ਭੁਜਾ, ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਜਿਥੇ ਭੁਜਾ ਤੋਂ ਭਾਵ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ)

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121......... ਆਦਿ। ਅਵਲੋਕਨ ਕਰੋ। ਕੀ ਖਾਸ ਹੈ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ?

ਕਿਉਂਕਿ $1 = 1 \times 1$; $4 = 2 \times 2$; $9 = 3 \times 3$; $16 = 4 \times 4$; $25 = 5 \times 5$; $36 = 6 \times 6$ .... ਆਦਿ। ਭਾਵ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ **ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਧਾਰਨ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 'm' ਨੂੰ ਅਸੀਂ 'n^2' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋਈਏ, ਜਿਥੇ n ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ 'm' ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ **ਕੀ 49 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?**

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ 49 ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤ੍ਰਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $49 = 7 \times 7$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 49 ਨੂੰ 7 ਦੀ ਖੁਦ ਨਾਲ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ 49 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ **ਕੀ 27 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?**

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 27 ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ :

ਇਸ ਲਈ $27 = 3 \times 9$

$= 1 \times 27$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਕਿ 27 ਨੂੰ ਦੋ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਇਸ ਲਈ 27 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 27 ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 8, 10, 13, 58, 176 ਆਦਿ ਵੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ।

5.2 ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣ : (Properties of Sqaure Numbers)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀਆਂ 30 ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਹਨ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ	ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ	ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	26	676
7	49	17	289	27	729
8	64	18	324	28	784
9	81	19	361	29	841
10	100	20	400	30	900

ਗੁਣ 1 : ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਜਿਸਨੂੰ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਦੇ ਵੀ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 2, 3, 7 ਜਾਂ 8 ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਨਹੀਂ ! ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 10 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ (ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ) 0 (ਸਿਫ਼ਰ) ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 11, 21, 31 ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ (ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ) 1 ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ 14, 15, 24, 26, 29 ਆਦਿ ਕੁੱਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਅੰਕ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ।

ਅੰਕਾਂ 2, 3, 7 ਜਾਂ 8 ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਦੇ ਵੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਤੌਰ ਤੇ 22, 33, 237, 2378, 3542, 15437 ਆਦਿ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.1 ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦੇ ਅੰਕ ਵੱਲ ਵੇਖ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਵਰਗ (ਪੂਰਨ ਵਰਗ) ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ 2, 3, 7 ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇ ਉਹ ਕਦੇ ਵੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ।

ਇਸ ਲਈ 62, 93, 157, 228, 222 ਆਦਿ ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.2 ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦੇ ਅੰਕ ਵੱਲ ਵੇਖ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਉਹ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੋਵੇ, ਉਹ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਸਿਰਫ਼ ਵੇਖ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋਣ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣ ਸੰਬੰਧੀ ਫੈਸਲਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਹਨ : 120, 221, 534, 565, 216, 219 ਆਦਿ।

ਗੁਣ 2 : ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਹਰੇ ਰੰਗ ਵਾਲੀ ਅੰਤਿਮ ਕਤਾਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $10^2 = 10\times10 = 100$

$20^2 = 20\times20 = 400$

$30^2 = 30\times30 = 900$

ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਜਿਵੇਂ—

$60^2 = 60\times60 = 3600$

$100^2 = 100\times100 = 10000$

ਇਸ ਲਈ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

> ਨੋਟ : ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇ ਉਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ।
>
> ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ 400 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਪਰੰਤੂ 300, 500 ਅਤੇ 700 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ 10, 110, 1000, 5000 ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.3. ਨਿਮਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ।

(i) 60 (ii) 200 (iii) 8000

ਹੱਲ : (i) 60 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ।

(ii) 200 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ।

(iii) 8000 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਛੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਗੁਣ 3 : ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹਮੇਸ਼ਾ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਮਜੈਂਟਾ ਰੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਆ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

4^2	=	4×4	=	16
8^2	=	8×8	=	64
12^2	=	12×12	=	144
24^2	=	24×24	=	576

ਗੁਣ 4 : ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹਮੇਸ਼ਾ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

1^2	=	1×1	=	1
5^2	=	5×5	=	25
11^2	=	11×11	=	121
19^2	=	19×19	=	361

ਗੁਣ 5 : ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਅੰਕ

ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦੇ ਅੰਕ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦੇ ਅੰਕ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਕਰੋ, ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ	ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਅੰਕ
1 ਜਾਂ 9	1
2 ਜਾਂ 8	4
3 ਜਾਂ 7	9
4 ਜਾਂ 6	6
5	5

ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.4 : ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਲਿਖੋ।

(i) 211 (ii) 299 (iii) 1018 (iv) 1687 (v) 4204

ਹੱਲ : (i) 211 ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਹੈ, ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) 299 ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 9 ਹੈ, ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) 1018 ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 8 ਹੈ, ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) 1687 ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 7 ਹੈ, ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 9 ਹੋਵੇਗਾ।

(v) 4204 ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਹੈ, ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 6 ਹੋਵੇਗਾ।

ਗੁਣ 6 : ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਅਤੇ $n + 1$ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ $2n$ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $n = 1$ ਅਤੇ $n + 1 = 2$ ਲਓ। ਹੁਣ $(1)^2$ ਅਤੇ $(2)^2$ ਭਾਵ 1 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚ $2 \times n = 2 \times 1 = 2$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਭਾਵ 2 ਅਤੇ 3) ਹਨ।

ਹੁਣ $(4)^2 = 16$ ਅਤੇ $(5)^2=25$ ਵਿਚਕਾਰ $2 \times n = 2 \times 4 = 8$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.5 : ਨਿਮਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ?

(i) 8^2 ਅਤੇ 9^2 (ii) 11^2 ਅਤੇ 12^2

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ n^2 ਅਤੇ $(n+1)^2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ $2n$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ :

(i) $8^2 = 64$ ਅਤੇ $9^2 = 81$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ $2 \times 8 = 16$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ।

[ਇੱਥੇ $n = 8$, $n + 1 = 8 + 1 = 9$]

(ii) $11^2 = 121$ ਅਤੇ $12^2 = 144$ ਵਿਚਕਾਰ $2 \times 11 = 22$ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣਗੀਆਂ।

[ਇੱਥੇ $n = 11$, $n+1 = 12$]

ਗੁਣ 7: ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ n ਦਾ ਵਰਗ, ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= n^2$.

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $2^2 = 4 = 1 + 3$ (ਇੱਥੇ 1 ਅਤੇ 3 ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)

$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$ (ਇੱਥੇ 1, 3, 5 ਪਹਿਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)

$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$ (ਇੱਥੇ 1, 3, 5, 7 ਪਹਿਲੀਆਂ ਚਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)

$5^2 = 25 = 1+3+5+7+9$ (ਇੱਥੇ 1, 3, 5, 7, 9 ਪਹਿਲੀਆਂ ਪੰਜ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + n = n^2$

ਭਾਵ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= n^2$

ਉਦਾਹਰਨ 5.6 : ਬਿਨਾਂ ਅਸਲ ਜੋੜ ਕਰੇ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਿਆਂ 8 ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਨੂੰ 8 ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8^2 = 64$

ਉਦਾਹਰਨ 5.7 : 100 ਨੂੰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $100 = 10^2$

$\therefore$ 100 ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀਆਂ 10 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$\therefore$ $100 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

ਗੁਣ 8 : ਕਿਸੇ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਨੂੰ (1 ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਅਸੀਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਸੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ,

$$n^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right) + \left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)$$

ਉਦਾਹਰਨ 5.8: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) 19^2 (ii) 23^2

ਹੱਲ : (i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, $n^2 = \left(\frac{n^2-1}{2}\right) + \left(\frac{n^2+1}{2}\right)$

ਇੱਥੇ $n = 19$ (ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ)

ਭਾਵ $19^2 = \left(\frac{19^2-1}{2}\right) + \left(\frac{19^2+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{361-1}{2}\right) + \left(\frac{361+1}{2}\right)$

$= \frac{360}{2} + \frac{362}{2}$

$= 180 + 181$

(ii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, $n^2 = \left(\frac{n^2-1}{2}\right) + \left(\frac{n^2+1}{2}\right)$

ਇੱਥੇ $n = 23$ (ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ)

ਭਾਵ $(23)^2 = \left(\frac{23^2-1}{2}\right) + \left(\frac{23^2+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{529-1}{2}\right) + \left(\frac{529+1}{2}\right)$

$= \frac{528}{2} + \frac{530}{2}$

$= 264 + 265$

ਗੁਣ 9 : ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ :

ਜੇ $(n - 1)$ ਅਤੇ $(n + 1)$ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹਨ ਤਾਂ $(n-1) \times (n+1) = n^2-1$,

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ

$5 \times 7 = 35 = (6 - 1) \times (6 + 1)$ ਅਤੇ $5 \times 7 = 35 = 6^2 - 1$

ਇੱਥੇ $n = 6$ ਹੈ।

$10 \times 12 = 120 = (11 - 1) \times (11 + 1)$ ਅਤੇ $10 \times 12 = 120 = (11^2-1)$

ਇੱਥੇ $n = 11$

ਗੁਣ 10 : ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ, ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 5 + 4$

$10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19 = 10 + 9$

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$(n + 1)^2 - (n)^2 = (n + 1) + n$ ਜਾਂ $2n + 1$

ਉਦਾਹਰਨ 5.9 : ਬਿਨਾਂ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ, $21^2 - 20^2$ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore \quad 21^2 - 20^2 = 21 + 20 = 41$

ਗੁਣ 11 : ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$

$(-5)^2 = -5 \times -5 = 25$

$(-10)^2 = -10 \times -10 = 100$

ਗੁਣ 12 : ਉਚਿਤ ਭਿੰਨ ਦਾ ਵਰਗ ਹਮੇਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ ਭਿੰਨ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

ਅਤੇ $\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 0.444... < 0.666......$

ਕੁਝ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ (Some Interesting Pattern)

1. ਤਿਕੋਣੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ

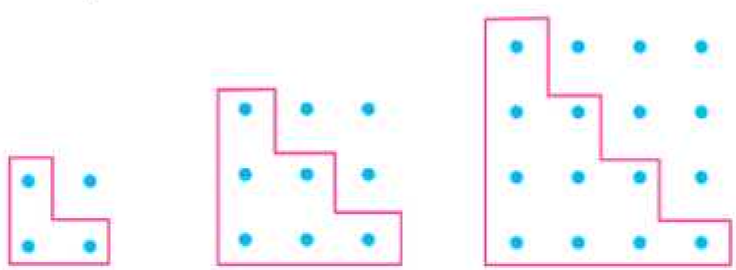
ਤਿਕੋਣੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1 3 6 10 15

ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28................

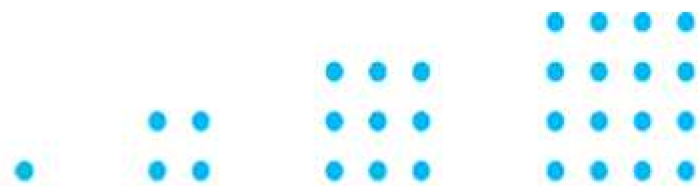
nਵੀਂ ਤਿਕੋਣੀ ਸੰਖਿਆ $= \frac{n(n+1)}{2}$

ਨੋਟ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਤਿਕੋਣੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।



$3+1=4=2^2$ $6+3=9=3^2$ $10+6=16=4^2$

2. n^2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ n ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਕਾਲਮਾਂ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਪੈਟਰਨ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



1^2 $\quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 \quad 4^2 = 16$

3. ਆਓ ਅਸੀਂ 1^2, 11^2, 111^2 ਵਰਗੀਆਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪੈਟਰਨ ਵੇਖੀਏ—

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਅਸੀਂ ਸਮਝ ਗਏ ਹਾਂ ਕਿ 11111....... ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਲਿਖਣੇ ਬਹੁਤ ਆਸਾਨ ਹਨ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ :

(i) ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(ii) ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(iii) ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਬਿਲਕੁਲ ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲਾ ਅੰਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ 1 ਅੰਕ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲਾ ਹੈ।

(iv) ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਹੈ।

4. 7, 67, 667 .... ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਵੇਖੋ। ਇੱਥੇ ਵੀ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ ਵਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

$7^2 = 49$

$67^2 = 4\ 4\ 8\ 9$

$667^2 = 4\ 4\ 4\ 8\ 8\ 9$

$6667^2 = 4\ 4\ 4\ 4\ 8\ 8\ 8\ 9$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਅੰਕ 9 ਹੈ।

(ii) ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 4 ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 6 ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੈ।

(iii) ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 8 ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 6 ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ।

5. 5, 15, 25, 35, 45 (ਭਾਵ ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਹੈ) ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਵੇਖੋ। ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲਦਾ ਹੈ।

$5^2 = 25 = 0 \times 1$(ਸੈਂਕੜਾ) $+ 5^2$

$15^2 = 225 = 1 \times 2$ (ਸੈਂਕੜਾ) $+ 5^2$

$25^2 = 625 = 2 \times 3$ (ਸੈਂਕੜਾ) $+ 5^2$

$35^2 = 1225 = 3 \times 4$ (ਸੈਂਕੜਾ) $+ 5^2$

$105^2 = 11025 = 10 \times 11$ (ਸੈਂਕੜਾ) $+ 5^2$

ਜਾਂ

$(a5)^2 = a \times (a+1)$ ਸੈਂਕੜਾ $+ 5^2$

6. ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਿਮਨ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਵੇਖੋ।

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$ ਆਦਿ

ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਅਣਦੇਖਿਆ ਕਰ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ, ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ, ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੀ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਅਗੇਤਰ ਹੈ।

ਭਾਵ $a^2 + (a+1)^2 + (a(a+1))^2 = [a(a+1)+1]^2$

ਉਦਾਹਰਨ 5.10 : 21^2 ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 21^2 ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ।

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 21^2$

c, 21 ਦਾ ਪਿਛੇਤਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ $c = 20$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ 20 ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਇਹ 4 ਤੇ 5 ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $21^2 = (4)^2 + (5)^2 + (20)^2$

ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ (ਤਿੱਕੜੀ) (Pythagorean Triplets)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ (ਤਿੱਕੜੀ) ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਜਿਹੀ ਤਿੱਕੜੀ ਹੈ ਜੋ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ *a*, *b* ਅਤੇ *c* ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ

$a^2 + b^2 = c^2$ ਹੋਵੇ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3, 4 ਅਤੇ 5 ਲਉ,

ਹੁਣ $(3)^2 = 9$, $(4)^2 = 16$ ਅਤੇ $(5)^2 = 25$

ਇੱਥੇ $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

ਭਾਵ $\quad 9 + 16 = 25$

$\quad 25 = 25$

ਇਸ ਲਈ, 3, 4 ਅਤੇ 5 ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਅਨੰਤ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਮੌਜੂਦ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਕੁ ਹਨ (6, 8, 10), (5, 12, 13) ਆਦਿ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ $n > 1$ ਲਈ

$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$

ਇਸ ਲਈ $(2n, n^2-1, n^2+1)$ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ : ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਾਰੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.11: ਇੱਕ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਲਿਖੋ, ਜਿਸਦੇ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $2n$, n^2-1, n^2+1 ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ $2n = 6 \quad \Rightarrow n = 3$

$\therefore\ n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ ਅਤੇ $n^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$

$\therefore$ 6, 8 ਅਤੇ 10 ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.12: ਇੱਕ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਲਿਖੋ, ਜਿਸ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 15 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $2n$, n^2-1 ਅਤੇ n^2+1 ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ, $2n = 15 \quad \Rightarrow n = \frac{15}{2}$, ਜੋ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\therefore$ ਅਸੀਂ $2n = 15$ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ $n^2 - 1 = 15 \quad \Rightarrow n^2 = 15 + 1 = 16$

$\Rightarrow n = 4$

$\therefore \quad 2n = 2 \times 4 = 8$

ਅਤੇ $n^2 + 1 = (4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

$\therefore$ 8, 15 ਅਤੇ 17 ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁਟ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 19 (ii) 41 (iii) –11 (iv) $\frac{3}{7}$ (v) $1\frac{2}{3}$

(vi) 1.7 (vii) 0.02 (viii) 0.014

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) 177 (ii) 1058 (iii) 7928 (iv) 23453 (v) 42222

(vi) 64000 (vii) 222000 (viii) 42977 (ix) 5000 (x) 100000

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

(i) 90 (ii) 120 (iii) 400 (iv) 6000 (v) 80000

(vi) 1600

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਇਹ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜਿਸਤ ?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004 (v) 473

(vi) 4096 (vii) 9267 (viii) 27916

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(i) 41 (ii) 321 (iii) 89 (iv) 439 (v) 62

(vi)4012 (vii) 88 (viii) 348 (ix) 93 (x) 703

(xi) 57 (xii) 1327 (xiii) 44 (xiv) 1024 (xv) 26
(xvi) 2226 (xvii) 55 (xviii) 125

6. ਨਿਮਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

(i) 14 ਅਤੇ 15 (ii) 21 ਅਤੇ 22 (iii) 30 ਅਤੇ 31 (iv) 10 ਅਤੇ 11

7. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) 81 ਨੂੰ ਪਹਿਲੀਆਂ 9 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(ii) 144 ਨੂੰ ਪਹਿਲੀਆਂ 12 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(iii) 256 ਨੂੰ ਪਹਿਲੀਆਂ 16 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

8. ਬਿਨਾਂ ਅਸਲ ਜੋੜ ਕੀਤੇਂ, ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25$

9. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਨੂੰ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) $(15)^2$ (ii) $(21)^2$ (iii) $(33)^2$ (iv) $(37)^2$

10. ਬਿਨਾਂ ਅਸਲ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $8^2 - 7^2$ (ii) $13^2 - 12^2$ (iii) $25^2 - 24^2$ (iv) $80^2 - 79^2$

(v) $110^2 - 109^2$

11. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਭਰੋ।

(i) $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + \ldots\ldots = 13^2$
$\ldots\ldots + 5^2 + \ldots\ldots = 21^2$
$5^2 + \ldots\ldots + 30^2 = \ldots\ldots$
$6^2 + 7^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

(ii) $1^2 = 1 = 1$
$2^2 = 4 = 1 + 2 + 1$
$3^2 = 9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$
$\ldots\ldots = \ldots\ldots = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$
$\ldots\ldots = \ldots\ldots = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

(iii) $21^2 = 441$
$201^2 = 40401$
$2001^2 = 4004001$
$\square^2 = 400040001$
$(2000001)^2 = 4000004000001$
$(20000001)^2 = \square$

12. $1^2 = 1$, $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$, $1111^2 = 1234321$ ਪੈਟਰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $(1111111)^2$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 5 ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 45 (ii) 75 (iii) 95 (iv) 125 (v) 205

14. ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹਨ ?

(i) 3, 4, 5 (ii) 6, 8, 10 (iii) 8, 15, 17 (iv) 13, 17, 19

15. ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ :

(i) 8 (ii) 12 (iii) 16 (iv) 18 (v) 20

16. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹਮੇਸ਼ਾ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(a) ਜਿਸਤ (b) ਟਾਂਕ (c) ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(ii) 600 ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) 52698 ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 1 (b) 4 (c) 6 (d) 9

(iv) 6^2 ਅਤੇ 7^2 ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

(v) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots + n$

(a) $n^2 - 1$ (b) $n^2 + 1$ (c) $(n + 1)^2$ (d) n^2

(vi) ਇੱਕ ਉਚਿਤ ਭਿੰਨ ਦਾ ਵਰਗ ....

(a) ਭਿੰਨ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (b) ਭਿੰਨ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(c) ਭਿੰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(vii) $(111111)^2 =$

(a) 1234564321 (b) 1234455321

(c) 12345654321 (d) 1234554321

(viii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 =$ ....

(a) $(6)^2$ (b) $(5)^2$ (c) $(7)^2$ (d) $(8)^2$

(ix) ਨਿਮਨ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ?

(a) 4000 (b) 40000 (c) 40 (d) 400000

(x) nਵੀਂ ਤਿਕੋਣੀ ਸੰਖਿਆ :

(a) $\frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\frac{n(n-1)}{2}$ (c) $\frac{n-1}{2}$ (d) $\frac{n}{2}$

5.3 ਵਰਗ ਮੂਲ (Square Root)

ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ (ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ) ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਹ ਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਜਿਸਦਾ ਇਹ ਵਰਗ ਹੈ ?

$\therefore$ ਇਸ ਮੰਤਵ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਵੋ ਸਾਨੂੰ ਇਕ ਸੰਖਿਆ K ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ K ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ। ਸਧਾਰਨ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵਰਤ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੇ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਵੱਜੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਵਰਗਮੂਲ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ $\sqrt{\ }$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਪੂਰਵਕ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇਸ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰੋ।

$2^2 = 4$	4 ਦਾ ਵਰਗ ਮੂਲ = 2	ਭਾਵ $\sqrt{4} = 2$
$6^2 = 36$	36 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ = 6	ਭਾਵ $\sqrt{36} = 6$
$13^2 = 169$	169 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ = 13	ਭਾਵ $\sqrt{169} = 13$
$21^2 = 441$	441 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ = 21	ਭਾਵ $\sqrt{441} = 21$

ਜਿਵੇਂ $4^2 = 16$

ਅਤੇ $(-4)^2 = 16$

$\therefore$ $\sqrt{16}$ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ 4 ਅਤੇ -4 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਅਭਿਆਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਦੀ ਹੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

5.3.1 ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Finding Square Roots)

ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਿੱਖਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਕਿਉਂ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਕਰੋ।

1. ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $(\text{ਭੁਜਾ})^2$
   ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3125cm^2 ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ?
2. ਮੰਨ ਲਵੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਹਨ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦਾ ਵਿਕਰਨ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ?
3. ਮੰਨ ਲਵੋ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣ ਤਿਕੋਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦਾ ਕਰਨ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਅਤੇ ਅਜਿਹੀਆਂ ਹੀ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਨਾਂ ਕਿਸੇ ਥਾਂ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਜਰੂਰ ਪਵੇਗੀ।

ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਿੱਖਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਓ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਗੁਣਾਂ (properties) ਰਾਹੀਂ ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧ ਸਥਾਪਤ ਕਰੀਏ।

1. ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਜਿਸਤ ਅਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   ਭਾਵ $\sqrt{196} = 14$ ਕਿਉਂਕਿ $14^2 = 196$

   ਅਤੇ $\sqrt{225} = 15$ ਕਿਉਂਕਿ $15^2 = 225$

2. ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਜਾਂ 9 ਹੋਵੇਗਾ।

   ਭਾਵ $\sqrt{121} = 11$ ਕਿਉਂਕਿ $11^2 = 121$

   ਅਤੇ $\sqrt{361} = 19$ ਕਿਉਂਕਿ $19^2 = 361$

3. ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 2 ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇਗਾ।

   ਭਾਵ $\sqrt{144} = 12$ ਕਿਉਂਕਿ $12^2 = 144$

   ਅਤੇ $\sqrt{324} = 18$ ਕਿਉਂਕਿ $18^2 = 324$

4. ਇਕਾਈ ਅੰਕ 9 ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 3 ਜਾਂ 7 ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $\sqrt{169} = 13$ ਕਿਉਂਕਿ $13^2 = 169$

ਅਤੇ $\sqrt{729} = 27$ ਕਿਉਂਕਿ $27^2 = 729$

5. ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $\sqrt{225} = 15$ ਕਿਉਂਕਿ $15^2 = 225$

ਅਤੇ $\sqrt{625} = 25$ ਕਿਉਂਕਿ $25^2 = 625$

6. ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 2, 3, 7 ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ, ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।

ਭਾਵ 232, 407, 1603, 1008 ਅਤੇ 1690 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.13 **ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ—**

(i) ਜੇ $11^2 = 121$ ਤਾਂ $\sqrt{121}$ = ... (ii) ਜੇ $14^2 = 196$ ਤਾਂ $\sqrt{......}$ = 14

ਹੱਲ : (i) ਜੇ $11^2 = 121$ ਤਾਂ $\sqrt{121} = 11$

(ii) ਜੇ $14^2 = 196$ ਤਾਂ $\sqrt{196} = 14$

5.3.2 ਘਟਾਉ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (Finding square root by repeated subtraction)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ n^2 ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੁਝ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$\sqrt{49}$ ਲਉ :

ਪਗ (i) $49 - 1 = 48$ ਪਗ (ii) $48 - 3 = 45$ ਪਗ (iii) $45 - 5 = 40$

ਪਗ (iv) $40 - 7 = 33$ ਪਗ (v) $33 - 9 = 24$ ਪਗ (vi) $24 - 11 = 13$

ਪਗ (vii) $13 - 13 = 0$

ਇੱਥੇ $49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 9 + 11 + 13$

ਅਸੀਂ 49 ਵਿੱਚੋਂ ਪਗ ਦਰ ਪਗ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਟਾਉਣੀਆਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸੱਤਵੇਂ ਪਗ ਵਿੱਚ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{49} = 7$

ਉਦਾਹਰਨ 5.14 **ਘਟਾਓ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ਤਾਂ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) 36 (ii) 55 (iii) 121

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ 36 ਹੈ। 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉਣੀਆਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ।

(i) $36 - 1 = 35$ (ii) $35 - 3 = 32$ (iii) $32 - 5 = 27$

(iv) $27 - 7 = 20$ (v) $20 - 9 = 11$ (vi) $11 - 11 = 0$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਈ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 36 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ 0 ਛੇਵੇਂ ਪਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਹੈ।

$\therefore \sqrt{36} = 6$

(ii) (i) 55 – 1 = 54 (ii) 54 – 3 = 51 (iii) 51 – 5 = 46
(iv) 46 – 7 = 39 (v) 39 – 9 = 30 (vi) 30 – 11 = 19
(vii) 19 – 13 = 06 (viii) 6 – 15 = –9

ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਸਿਫਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 55 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) (i) 121 – 1 = 120 (ii) 120 – 3 = 117 (iii) 117 – 5 = 112
(iv) 112 – 7 = 105 (v) 105 – 9 = 96 (vi) 96 – 11 = 85
(vii) 85 – 13 = 72 (viii) 72 – 15 = 57 (ix) 57 – 17 = 40
(x) 40 – 19 = 21 (xi) 21 – 21 = 0

ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਈ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 121 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\therefore \sqrt{121} = 11$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ $\sqrt{625}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਹਾਂ, ਪਰ ਸਮਾਂ ਵਧੇਰੇ ਲੱਗੇਗਾ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵਰਤਾਂਗੇ ਜੋ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

5.3.3 ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Finding square root through prime factorisation)

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

ਸੰਖਿਆ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀ ਕਰਨ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ	ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ
4	2 × 2	16	2 × 2 × 2 × 2
6	2 × 3	36	2 × 2 × 3 × 3
8	2 × 2 × 2	64	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2
9	3 × 3	81	3 × 3 × 3 × 3
10	2 × 5	100	2 × 2 × 5 × 5
12	2 × 2 × 3	144	2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3
15	3 × 5	225	3 × 3 × 5 × 5

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਪੂਰਵਕ ਦੇਖਣ ਨਾਲ ਪਤਾ ਚੱਲੇਗਾ ਕਿ 4 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ 2 ਦੋ ਵਾਰ ਆਈ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ 2 ਚਾਰ ਵਾਰ ਆਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ 6 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ ? ਇਹ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੈ। ਹੁਣ 6 ਦੇ ਵਰਗ 36 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ ? ਇਹ ਦੋ ਵਾਰ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 3 ਦੀ ਆਵਰਤੀ ਵੀ ਵੇਖੋ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਇਸੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੰਖਿਆ 100 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰੀਏ।

100 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ $= 2 \times 2 \times 5 \times 5$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ ਤੇ

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2$

$\therefore \quad \sqrt{100} = 2 \times 5 = 10$

2	100
2	50
5	25
5	5
	1

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ 144 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 2^2 \times 3^2 = (2 \times 2 \times 3)^2$

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

ਕੀ 48 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $48 = 2\times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

ਕਿਉਂਕਿ 48 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 48 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ ਅਸੀਂ 48 ਦਾ ਉਹ ਛੋਟਾ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣਜ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾ ਦੇਵੇ। ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ?

48 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 3 ਇੱਕਲਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਜੋੜਾ ਨਹੀਂ ਬਣ ਰਿਹਾ। ਇਸ ਲਈ ਜੋੜੇ ਪੂਰੇ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ 48 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $48 \times 3 = 144$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 48 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ ? ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ 48 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਦਾ ਜੋੜਾ ਨਹੀਂ ਬਣ ਰਿਹਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ 48 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਾਂਗੇ। $48 \div 3 = 16$ ਜੋ ਕਿ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.15 ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 729 (ii) 9604

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i)

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

(ii)

2	9604
2	4802
7	2401
7	343
7	49
7	7
	1

ਇਸ ਲਈ $729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

ਭਾਵ $729 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$729 = (3 \times 3 \times 3)^2$

$\Rightarrow \sqrt{729} = 3 \times 3 \times 3 = 27$

ਇਸ ਲਈ $9604 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

ਭਾਵ $9604 = 2^2 \times 7^2 \times 7^2$

ਭਾਵ $9604 = (2 \times 7 \times 7)^2$

$\Rightarrow \sqrt{9604} = 2 \times 7 \times 7 = 98$

ਉਦਾਹਰਨ 5.16 ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ, ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(*i*) 180 (*ii*) 768

ਹੱਲ : (i) ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 180 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਾਂਗੇ

2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਲਈ 180 ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

$180 \times 5 = 900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

ਭਾਵ $900 = (2 \times 3 \times 5)^2 = (30)^2$

$\therefore \sqrt{900} = 30$

(ii) ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 768 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਾਂਗੇ।

2	768
2	384
2	192
2	96
2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$768 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 3 ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਲਈ 768 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

$\therefore \quad 768 \times 3 = 2304$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

ਭਾਵ $2304 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2$

$2304 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3)^2 = (48)^2$

$\therefore \sqrt{2304} = 48$

ਉਦਾਹਰਨ 5.17 ਸੰਖਿਆ 9408 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਜੋ ਭਾਜਫਲ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 9408 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

2	9408
2	4704
2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
7	7
	1

$9408 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$

ਇੱਥੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ, ਬਾਕੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 9408 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ।

$\therefore \quad 9408 \div 3 = 3136$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 7^2$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 7)^2$

ਜੋ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ

$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

ਉਦਾਹਰਨ 5.18 ਇੱਕ ਬਾਗ ਵਿੱਚ 2025 ਪੌਦਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੇ ਪੌਦੇ ਹਨ, ਉੱਨੀਆਂ ਹੀ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਉੱਨੇ ਪੌਦੇ ਲਗਾਉਣੇ ਹਨ, ਜਿੰਨੀ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।

ਮੰਨ ਲਉ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = x

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ $x \times x = 2025$

ਭਾਵ $x^2 = 2025$

ਇੱਥੇ, x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਵਰਗ 2025 ਹੈ, ਭਾਵ x , 2025 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਹੈ।

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$2025 = 3\times3\times3\times3\times5\times5 = 3^2 \times 3^2 \times 5^2$

$2025 = (3 \times 3 \times 5)^2$

$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5 = 45$

∴ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 45 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.19: ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 8, 12 ਅਤੇ 50 ਨਾਲ ਪੂਰਨ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ 8, 12 ਅਤੇ 50 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ।

∴ ਅਸੀਂ 8, 12, 50 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ

ਲ. ਸ. ਵ. (8, 12, 50) $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 600$

2	8 - 12 - 50
2	4 - 6 - 25
2	2 - 3 - 25
3	1 - 3 - 25
5	1 - 1 - 25
5	1 - 1 - 5
	1 - 1 - 1

ਪਰ 600 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਉਣਾ ਪਵੇਗਾ।

600 ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਇਸਨੂੰ 2 ਅਤੇ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗੀ।

ਭਾਵ $600 \times 2 \times 3 = 3600$

∴ 3600 ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ 8, 12 ਅਤੇ 50 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਦੱਸੋ।

   (a) 121 (b) 729 (c) 676 (d) 1936

   (e) 484 (f) 2401 (g) 1600 (h) 3025

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ।

   100, 512, 1728, 529, 1024, 441, 1320, 3617

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਟਾਉ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) 64 (b) 49 (c) 121 (d) 100

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) 3600 (b) 676 (c) 9216 (d) 2916

   (e) 6400 (f) 1764 (g) 12100 (h) 1024

5. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਜਾਣ। ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 243 (b) 240 (c) 2662 (d) 972

(e) 3087 (f) 5000

6. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 108 (b) 3125 (c) 2400 (d) 5103

(e) 2205 (f) 12168

7. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ।

(a) 8, 12, 28 (b) 27, 24, 15

8. ਪੌਦੇ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਮੁਹਿੰਮ ਦੌਰਾਨ 256 ਪੌਦਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੇ ਪੌਦੇ ਲਗਾਏ ਹਨ, ਉੱਨੀ ਹੀ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਇੱਕ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸ ਆਇਤ ਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 27 ਸਮ ਅਤੇ 12 ਸਮ ਹਨ। ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਕੁੱਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਇੱਕ ਅਨਾਥ ਆਸ਼ਰਮ ਲਈ ਫੰਡ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ। ਜੇ ਇਕੱਠੀ ਕੀਤੀ ਕੁੱਲ ਰਕਮ 3136 ਰੁਪਏ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਉਨ੍ਹੀ ਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਦਾਨ ਵਿੱਚ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) $\sqrt{961}$ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 1 ਜਾਂ 7 (b) 1 ਜਾਂ 9 (c) 3 ਜਾਂ 6 (d) 7 ਜਾਂ 8

(ii) 625 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉ।

(a) 1 (b) 4 (c) 9 (d) 5

(iii)ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

(a) 625 (b) 728 (c) 729 (d) 144

(iv)144 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 10 (b) 12 (c) 18 (d) 22

(v) 32 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ ?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(vi) 288 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੀਏ ਕਿ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ ?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2

5.3.4 ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Finding square root by long division method)

ਸੰਖਿਆ 16777216 ਲਉ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ 2 ਨਾਲ 24 ਵਾਰੀ ਵੰਡਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਬਹੁਤ ਲੰਬੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਜਿਹੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ।

ਸੰਖਿਆ	ਅੰਕਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ	ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
64	2	8	1
144	3	12	2
961	3	31	2
1024	4	32	2
262144	6	512	3
16777216	8	4096	4

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(a) ਜੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = $\frac{n}{2}$

(b) ਜੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = $\frac{n+1}{2}$

ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (Estimating the number)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ n ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, $\frac{n}{2}$ ਹੈ ਜੇ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{n+1}{2}$ ਹੈ ਜੇ n ਟਾਂਕ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ (bar) ਬਾਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋਏ।

$$\sqrt{\overline{6}\,\overline{25}} = 25 \;;\; \sqrt{\overline{12}\,\overline{96}} = 36$$

ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\overline{6}\,\overline{25}$ ਅਤੇ $\overline{12}\,\overline{96}$ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬਾਰ (bars) ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇੰਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ 2 ਅੰਕ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ 14400 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

14400 ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾ ਕੇ $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ ਇੱਥੇ 3 ਬਾਰ ਹਨ, ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 5.20: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ।

(i) 7744 (ii) 15625 (iii) 25600

ਹੱਲ : (i) ਸੰਖਿਆ 7744 ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 4 (ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ)

$\therefore$ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{4}{2} = 2$

(ii) ਸੰਖਿਆ 15625 ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 5 (ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ)

$\therefore$ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

(iii) ਸੰਖਿਆ 25600 ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = 5 (ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ)

$\therefore$ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਹੇਠਾ ਲਿਖੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ 625 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪਗ 1 : ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆ 'ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉ। ਜੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 'ਤੇ ਇਕੱਲੇ ਅੰਕ 'ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ : $\overline{6}\ \overline{25}$

ਪਗ 2 : ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੀ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ ($2^2 < 6 < 3^2$) ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ (ਭਾਵ 6) ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਜਫਲ ਲਉ। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ 2 ਆਇਆ ਹੈ)।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\,\overline{25} \\ & -4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

ਪਗ 3 : ਬਾਕੀ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਗਲੀ ਬਾਰ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ (ਭਾਵ 25) ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\,\overline{25} \\ & -4 \\ \hline & 2\,25 \end{array}$$

ਪਗ 4 : ਭਾਜਫਲ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਲਗਾਉ।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\,\overline{25} \\ & -4 \\ \hline 4_ & 2\,25 \end{array}$$

ਪਗ 5 : ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ (ਜੋ ਭਾਜਫਲ ਵਿੱਚ ਨਵਾਂ ਅੰਕ ਹੋਵੇਗਾ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਉ ਤਾਂ ਜੋ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਅੰਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇਸ ਪਗ ਦੇ ਭਾਜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ, ਇੱਥੇ $45 \times 5 = 225$, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕ 5 ਲਿਆ ਤਾਂ ਜੋ ਨਵਾਂ ਭਾਜਕ 45 ਨੂੰ 5 ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ 225 ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 5 \\ \hline 2 & \overline{6}\,\overline{25} \\ & -4 \\ \hline 4\underline{5} & 225 \\ & -225 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ਪਗ 6 : ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ ਹੈ '0' ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਕ ਨਹੀਂ ਬਚਿਆ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{625} = 25$

ਉਦਾਹਰਨ 5.21 1296 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ

$$\begin{array}{r|l} & 3\ 6 \\ \hline 3 & \overline{12}\,\overline{96} \\ & 9 \\ \hline 6\underline{6} & 396 \\ & -396 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ਉਦਾਹਰਨ 5.22 ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 1308 ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਬਣੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਓ $\sqrt{1308}$ ਨੂੰ ਲੰਬੀ ਭਾਗ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ।

```
       3 6
   ┌──────
 3 │ 13 08
   │ - 9
───┼──────
66 │  408
   │ -396
   │   12
```

ਸਾਨੂੰ ਬਾਕੀ 12 ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $(36)^2$, 1308 ਤੋਂ 12 ਘੱਟ ਹੈ ਭਾਵ, ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਘਟਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $= 1308 - 12 = 1296$

ਅਤੇ $\sqrt{1296} = 36$

ਉਦਾਹਰਨ 5.23 ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਉਹ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ - 9999

```
        9 9
    ┌──────
  9 │ 99 99
    │ -81
────┼──────
189 │ 1899
    │-1701
    │  198
```

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਨੇੜੇ ਵਾਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ 9999 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 198 ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ 9999 ਵਿੱਚੋਂ 198 ਘਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇਗੀ।

$\therefore$ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $= 9999 - 198 = 9801$

ਅਤੇ $\sqrt{9801} = 99$

ਉਦਾਹਰਨ 5.24 ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 5615 ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

```
        7 4
    ┌──────
  7 │ 56 15
    │-49
────┼──────
144 │  715
    │ -576
    │  139
```

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲੰਬੀ ਭਾਗ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\sqrt{5615}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ $(74)^2 < 5615$

ਅਗਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $= (75)^2 = 5625$

ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ $= (75)^2 - 5615$

$= 5625 - 5615$

$= 10$

ਲੋੜੀਂਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $= 5615 + 10 = 5625$

ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ $= 75$

ਉਦਾਹਰਨ 5.25 ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 1000 ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੀ ਨੇੜੇ ਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਲੰਬੀ ਭਾਗ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਬਾਕੀ 39 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਕਿ 1000 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

```
       3 1
   ┌──────
 3 │ 10 00
   │ - 9
───┼──────
61 │  100
   │ - 61
   │   39
```

$(31)^2 < 1000$

ਅਗਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $= (32)^2 = 1024$

ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ $= 1024 - 1000 = 24$

ਅਤੇ 1024 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ $= \sqrt{1024} = 32$

ਉਦਾਹਰਨ 5.26 ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3136 ਮੀ² ਹੈ। ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

	56
5	$\overline{31}\ \overline{36}$
	-25
106	636
	- 636
	0

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = (ਭੁਜਾ)^2

ਮੰਨ ਲਉ ਪਲਾਟ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = x ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ $x^2 = 3136$ ਭਾਵ $x = \sqrt{3136}$

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ = 56 ਮੀ.

ਉਦਾਹਰਨ 5.27 ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 505 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ। ਪੀ.ਟੀ. ਡਰਿੱਲ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੜ੍ਹਾ ਹੋਣਾ ਹੈ ਕਿ ਜਿੰਨੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਉਨੇ ਹੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਡਰਿੱਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਰਸਾਈ ਤਰਤੀਬ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਰਹਿ ਜਾਣਗੇ ?

	22
2	$\overline{5}\ \overline{05}$
	-4
42	105
	- 84
	21

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਅਜਿਹੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਲੱਭਣੀ ਹੈ ਜੋ 505 ਤੋਂ ਛੋਟੀ (ਨੇੜੇ) ਹੈ। ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ 505 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਲੱਭਣ ਤੇ ਬਾਕੀ 21 ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

$\therefore$ 505 ਵਿੱਚ 21 ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ 505 - 21 = 484 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਤਰਤੀਬ ਅਨੁਸਾਰ ਖੜਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 21 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤਰਤੀਬ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਰਹਿਣਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 12996 (ii) 6084 (iii) 698896 (iv) 72900 (v) 1806336

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 9216 (ii) 8100 (iii) 50176 (iv) 4761

   (v) 421201 (vi) 16900 (vii) 5184 (viii) 86436

   (ix) 16777216 (x) 46656

3. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਣ। ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 540 (ii) 1765 (iii) 3260 (iv) 4000 (v) 5200 (vi) 790

4. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉਣ ਤੇ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇਗੀ। ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 696 (ii) 1140 (iii) 6021 (iv) 10204 (v) 126441 (vi) 788501

5. ਪੰਜ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਦੱਸੋ।
6. ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਦੱਸੋ।
7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੰਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

   (i) 3136m^2 (ii) 7225m^2 (iii) 12100m^2 (iv) 18225m^2

8. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ 6 cm ਅਤੇ 8 cm ਹਨ।

9. ਇਕ ਮਾਲੀ ਕੋਲ 1100 ਪੌਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਤਾਰਾਂ (Rows) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਉਸਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਹੋਰ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ?

10. **ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) 676 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(ii) 186624 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ।

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

(iii) 140 ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀਏ ?

(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 16

(iv) 750 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਈਏ ਕਿ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਜਾਵੇ ?

(a) 11 (b) 21 (c) 31 (d) 41

(v) ਇੱਕ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 384 cm^2 ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 12cm (b) 14cm (c) 16cm (d) 18cm

(vi) ਜੇ 404 ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੜਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ (ਕਾਲਮਾਂ) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਬੱਚੇ ਬਚਣਗੇ ?

(a) 10 (b) 4 (c) 8 (d) 6

5.4 ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ (Square Root of decimal numbers)

ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ 51.84 ਲਓ।

ਪਗ 1 : ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਭਾਗ (51) 'ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਭਾਗ (84) 'ਤੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਜੋੜਿਆ 'ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\overline{51}.\overline{84}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਹੁਣ ਉਸੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੀ ਬਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 51 ਹੈ ਅਤੇ $7^2 < 51 < 8^2$, ਸੰਖਿਆ 7 ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਲਓ ਅਤੇ 51 ਨੂੰ ਭਾਜਫਲ ਲਓ ਵੰਡੋਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ & -49 \\ \hline & \ \ 2 \end{array}$$

ਪਗ 3 : ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 2 ਹੈ, ਅਗਲੀ ਬਾਰ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ (84) ਨੂੰ ਬਾਕੀ 2 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖੋ। ਭਾਵ 284

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ & -49 \\ \hline 14_ & \ \ 284 \end{array}$$

ਪਗ 4 : ਭਾਜਕ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਲਓ। ਕਿਉਂਕਿ 84 ਦਸ਼ਮਲਵ ਭਾਗ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਭਾਗਫਲ 7 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾਉ।

$$\begin{array}{r|l} & 7. \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ & -49 \\ \hline 14_ & \ \ 284 \end{array}$$

ਪਗ 5 : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $142 \times 2 = 284$, ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅੰਕ 2 ਹੈ। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

$$\begin{array}{r|l} & 7.2 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ & -49 \\ \hline 142 & 284 \\ & -284 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ਪਗ 6 : ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਈ ਬਾਰ (bar) ਨਹੀਂ ਬਚੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{51.84} = \mathbf{7.2}$

ਉਦਾਹਰਨ 5.28: 31.36 ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\begin{array}{r|l} & 5.6 \\ \hline 5 & \overline{31}.\overline{36} \\ & -25 \\ \hline 106 & 636 \\ & -636 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\sqrt{31.36} = 5.6$

> ਨੋਟ — ਆਓ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਭਾਗ ਅਤੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਭਾਗ ਉੱਪਰ ਬਾਰ ਲਗਾਉਣਾ ਸਿੱਖੀਏ। ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 325.732 ਲਓ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਅਤੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਾਲੇ 2 ਭਾਗ ਹਨ। ਸੰਪੂਰਨ ਭਾਗ 325 ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ, ਅਸੀਂ ਇਕਾਈ ਅੰਕ (5) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੀ ਬਾਰ 25 'ਤੇ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਬਾਰ 3 ਉੱਪਰ ਹੈ। ਦਸ਼ਮਲਵ ਭਾਗ 732 ਲਈ, ਅਸੀਂ ਬਾਰ ਦਸ਼ਮਲਵ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੀ ਬਾਰ 73 ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਬਾਰ 2 ਤੋਂ ਬਾਅਦ 0 ਲਗਾ ਕੇ ਭਾਵ 20 ਉੱਪਰ ਹੈ ਭਾਵ $.\overline{73}\,\overline{20}$

ਅਭਿਆਸ 5.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 9.61 (ii) 11.56 (iii) 466.56 (iv) 1.4641 (v) 1354.24

(vi) 1.218816

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{64}{169}$ (ii) $\frac{144}{441}$ (iii) $\frac{81}{784}$ (iv) $\frac{196}{625}$

3. 2, 3 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬਾਰ ਦੀ ਸਹੀ ਤਰਤੀਬ ਚੁਣੋ।

(a) $\sqrt{15625}$ (b) $\sqrt{15625}$ (c) $\sqrt{15625}$ (d) $\sqrt{15625}$

(ii) 24.01 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕਾਂ ਬਾਦ ਦਸ਼ਮਲਵ ਆਵੇਗਾ?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) 39.0625 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 6.25 (b) 62.5 (c) 0.625 (d) 6.6251

(iv) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 6cm ਅਤੇ 8 cm ਹਨ।

(a) 6cm (b) 8cm (c) 10cm (d) $10cm^2$

ਕਿਰਿਆਵਾਂ

ਮੰਤਵ : ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਖਿਆ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਅਗਲੇ 3 ਪਗ ਲਿਖੋ।

ਉਦੇਸ਼ : ਸੰਖਿਆ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਸਮਝ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ।

ਪੂਰਵ ਗਿਆਨ—ਸੰਖਿਆ ਪੈਟਰਨਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ

ਵਿਧੀ : 1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੰਖਿਆ ਪੈਟਰਨਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ।

ਵਿਧੀ :

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ।

(a)
$1^2 = 1$
$(11)^2 = 121$
$(111)^2 = 12321$

(b)
$1^2 = 1$
$2^2 = 1 + 3$
$3^2 = 1 + 3 + 5$

2. ਹਰੇਕ ਪੈਟਰਨ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

3. ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਸੰਖਿਆ ਪੈਟਰਨ ਦੇ ਅਗਲੇ 3 ਪਗ ਪੂਰੇ ਕਰੋ।

ਨਿਰੀਖਣ (observations) :

(i) ਪੈਟਰਨ (a) ਦੀ ਚੋਥੀ ਕਤਾਰ $(1111)^2$ = 1234321

ਪੈਟਰਨ (a) ਦੀ ਪੰਜਵੀਂ ਕਤਾਰ $(11111)^2$ = ...

ਪੈਟਰਨ (a) ਦੀ ਛੇਵੀਂ ਕਤਾਰ .... = 123456....................

(ii) ਪੈਟਰਨ (b) ਦੀ ਚੋਥੀਂ ਕਤਾਰ 4^2 = 1+3+5+7

ਪੈਟਰਨ (b) ਦੀ ਪੰਜਵੀਂ ਕਤਾਰ .... = 1+3+5+7+9

ਪੈਟਰਨ (b) ਦੀ ਛੇਵੀਂ ਕਤਾਰ .... = 1+3+5+7+..............

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. $(111111)^2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ : 12345678654321

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. 12^2 ਨੂੰ ਪਹਿਲੀਆਂ 12 ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਉੱਤਰ : $12^2 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. $1+3+5+7+9+11+13+15$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ : $(8)^2 = 64$

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਕੱਢਣ ਦੇ।*
- *ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਵਰਤਨ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. (i) 361 (ii) 1681 (iii) 121 (iv) $\frac{9}{49}$

(v) $\frac{25}{9}$ (vi) 2.89 (vii) 0.004 (viii) 0.000196

2. (i) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 7 (ii) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 8 (iii) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 8

(iv) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 3 (v) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 2 (vi) ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(vii) ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। (viii) ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 7 (ix) ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(x) ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

3. (i) ਦੋ ਸਿਫਰਾਂ (ii) ਦੋ ਸਿਫਰਾਂ (iii) ਚਾਰ ਸਿਫਰਾਂ

(iv) ਛੇ ਸਿਫਰਾਂ (v) ਅੱਠ ਸਿਫਰਾਂ (vi) ਚਾਰ ਸਿਫਰਾਂ

4. (i), (iii), (v), (vii) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ

(ii), (iv), (vi), (vii) ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ

5. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1 (v) 4 (vi) 4 (vii) 4

(viii) 4 (ix) 9 (x) 9 (xi) 9 (xii) 9 (xiii) 6 (xiv) 6

(xv) 6 (xvi) 6 (xvii) 5 (xviii) 5

6. (i) 28 (ii) 42 (iii) 60 (iv) 20

7. (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11+13+15+17+19+21+23$

(iii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31$

8. (i) $(5)^2$ (ii) $(13)^2$

9. (i) (112, 113) (ii) (220, 221) (iii) (544, 545)

(iv) (684, 685)

10. (i) 15 (ii) 25 (iii) 49 (iv) 159 (v) 219

11. (i)

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + \underline{12}^2 = 13^2$

$\underline{4}^2 + 5^2 + \underline{20}^2 = 21^2$

$5^2 + \underline{6}^2 + 30^2 = \underline{31}^2$

$6^2 + 7^2 + \underline{42}^2 = \underline{43}^2$

(ii)

$1^2 = 1 = 1$

$2^2 = 4 = 1 + 2 + 1$

$3^2 = 9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$

$\underline{4}^2 = \underline{16} = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$

$\underline{5}^2 = \underline{25} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

(iii)

$21^2 = 441$

$201^2 = 40401$

$2001^2 = 4004001$

$\underline{(20001)}^2 = 400040001$

$(2000001)^2 = 4000004000001$

$(20000001)^2 = \underline{400000040000001}$

12. 1234567654321'

13. (i) 2025 (ii) 5625 (iii) 9025 (iv) 15625 (v) 42025

14. a, b, c

15. (i) 8, 15, 17 (ii) 12, 35, 37 (iii) 16, 63, 65 (iv) 18, 80, 82

(v) 20, 99, 101

16. (i) b (ii) d (iii) b (iv) d (v) d

(vi) a (vii) c (viii) d (ix) b (x) a

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. (i) 1 ਜਾਂ 9 (ii) 3 ਜਾਂ 7 (iii) 4 ਜਾਂ 6 (iv) 4 ਜਾਂ 6

(v) 2 ਜਾਂ 8 (vi) 1 ਜਾਂ 9 (vii) 0 (viii) 5

2. 512, 1320, 3617

3. (i) 8 (ii) 7 (iii) 11 (iv) 10

4. (i) 60 (ii) 26 (iii) 96 (iv) 54

(v) 80 (vi) 42 (vii) 110 (viii) 32

5. (i) 3, 27 (ii) 15, 60 (iii) 22, 242 (iv) 3, 54

(v) 7, 147 (vi) 2, 100

6. (i) 3, 6 (ii) 5, 25 (iii) 6, 20 (iv) 7, 27

(v) 5, 21 (vi) 2, 78

7. (i) 7056 (ii) 32400

8. 16 ਕਤਾਰਾਂ **9.** 18cm **10.** 56

11. (i) b (ii) d (iii) b (iv) b (v) a (vi) d

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 3 (v) 4

2. (i) 96 (ii) 90 (iii) 224 (iv) 69 (v) 649

(vi) 130 (vii) 72 (viii) 294 (ix) 4096 (x) 216

3. (i) 36, 24 (ii) 84, 43 (iii) 104, 58 (iv) 96, 64 (v) 129, 73

(vi) 51, 29

4. (i) 20, 26 (ii) 51, 33 (iii) 92, 77 (iv) 3, 101 (v) 416, 355

(vi) 1732, 887

5. 99856, 316 **6.** 1024, 32

7. (i) 56cm (ii) 85m (iii) 110m (iv) 135m

8. 10cm **9.** 56 ਪੌਦੇ

10. (i) b (ii) b (iii) a (iv) b (v) d (vi) b

ਅਭਿਆਸ 5.4

1. (i) 3.1 (ii) 3.4 (iii) 21.6 (iv) 1.21

(v) 36.8 (vi) 1.104

2. (i) $\frac{8}{13}$ (ii) $\frac{12}{21}$ (iii) $\frac{9}{28}$ (iv) $\frac{14}{25}$

3. (i) 1.414, 1.732, 2.236

4. (i) a (ii) a (iii) a (iv) c

ਅਧਿਆਇ 6

ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ।

- *ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।*
- *ਘਣਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਬਾਰੇ।*

6.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਭਾਰਤ ਦੇ ਮਹਾਨ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਐੱਸ. ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੇ ਆਪਣੇ ਪੂਰੇ ਜੀਵਨ ਦੌਰਾਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਬਹੁਤ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਪਿਆਰ ਸੀ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ ਜੀ. ਐੱਚ. ਹਾਰਡੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਇੱਕ ਟੈਕਸੀ ਵਿੱਚ ਆਏ ਜਿਸਦਾ ਨੰਬਰ 1729 ਸੀ। ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨਾਲ ਗੱਲਬਾਤ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਹਾਰਡੀ ਨੇ ਇਸ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨੀਰਸ (Dull) ਨੰਬਰ ਦੱਸਿਆ। ਪਰ ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੇ ਜਲਦੀ ਹੀ ਇੱਕ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕੀਤਾ ਕਿ ਨੰਬਰ 1729 ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਹੀ ਦਿਲਚਸਪ ਨੰਬਰ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਇਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੋ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ :—

$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$ ਅਤੇ $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

1729 ਨੂੰ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹਾਰਡੀ-ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੰਬਰ ਨਾਮ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਹਨ, 4104 {(2, 16) ; (9, 15)}, 13892 {(18, 20) ; (2, 24)} ਆਦਿ।

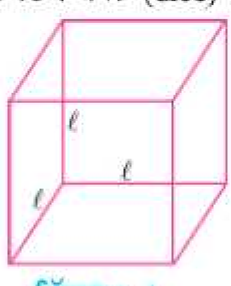
6.2 ਘਣ (Cube) :

ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਘਾਤ 3 ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਦੋ ਦੇ ਘਣ ਨੂੰ 2^3 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ $2 \times 2 \times 2$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

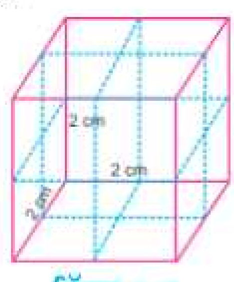
ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੇ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$8^3 = 8\times8\times8 = 512$$
$$12^3 = 12\times12\times12 = 1728$$
$$7^3 = 7\times7\times7 = 343$$

ਰੇਖਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਘਣ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਘਣ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਠੋਸ ਅਕਾਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 6.2) ਇਸ ਦੇ ਛੇ ਫਲਕ, ਜੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ (dice) ਘਣ ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.1



ਚਿੱਤਰ 6.2

1ਸਮ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਨਾਲ 2ਸਮ ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਬਣੇਗਾ ? ਚਿੱਤਰ 6.2 ਦੇਖੋ, 1ਸਮ, ਦੇ 8 ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ 2 ਸਮ ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ 1 ਘਣ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 8, 27, 64, 125 .... ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ,

1, 8, 27, 64, 125, ...

$1 = 1 \times 1 \times 1$; $8 = 2 \times 2 \times 2$; $27 = 3 \times 3 \times 3$

$64 = 4 \times 4 \times 4$; $125 = 5 \times 5 \times 5$; ਅਤੇ ਹੋਰ ਵੀ

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਸ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੇ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪੂਰਨ ਘਣ (perfect cubes) ਜਾਂ ਘਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (cube numbers) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਕੀ 9 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ ?

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $9 = 3 \times 3$ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਉਸੇ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ 9 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 9 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ : (ਸਾਰਨੀ 6.1)

ਸੰਖਿਆ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	20
ਘਣ	1^3 $=1\times1\times1$ $=1$	2^3 $=2\times2\times2$ $=8$	3^3 $=3\times3\times3$ $=27$	4^3 $=4\times4\times4$ $=64$	5^3 $=5\times5\times5$ $=125$	6^3 $=6\times6\times6$ $=216$	7^3 $=7\times7\times7$ $=343$	8^3 $=8\times8\times8$ $=512$	9^3 $=9\times9\times9$ $=729$	10^3 $=10\times10\times10$ $=1000$	...	20^3 $=20\times20\times20$ $=8000$

ਸਾਰਨੀ 6.1

ਹੁਣ ਵੇਖੋ, ਕੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਜਿਸਤ ਹੈ ? ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਟਾਂਕ ਹਨ ? ਸਾਰਨੀ 6.1 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਕਿ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਣ ਜਿਸਤ ਹੈ, ਅਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖੋਗੇ 1 ਤੋਂ 1000 ਤੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਕੁਝ ਕੁ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ। 1 ਤੋਂ 2000 ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ।

ਹੁਣ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ 1, 11, 12, 31, 41 .... 111 ਆਦਿ)

ਸੰਖਿਆ	1	11	21	31	41	...	111	...
ਘਣ	1^3 $=1\times1\times1$ $=1$	11^3 $=11\times11\times11$ $=1331$	21^3 $=21\times21\times21$ $=9261$	31^3 $=31\times31\times31$ $=29791$	41^3 $=41\times41\times41$ $=68921$	...	111^3 $=111\times111\times111$ $=1367631$	...

ਸਾਰਨੀ 6.2

ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 1 ਹੈ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 1 ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਵੀ 1 ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ 2, 3, 4 .... ਆਦਿ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 2 ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 8 ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 3 ਹੈ ਉਸ ਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 7 ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.1 : **ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) 2561 (ii) 342 (iii) 463 (iv) 1264

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਉੱਤੇ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ:

(i) 2561 ਲਈ 1 ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) 342 ਲਈ 8 ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) 463 ਲਈ 7 ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) 1264 ਲਈ 4 ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.2: **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) 13 (ii) –4 (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) 2.1

ਹੱਲ : (i) 13 ਦਾ ਘਣ $= 13^3 = 13 \times 13 \times 13 = 2197$

(ii) –4 ਦਾ ਘਣ $= (-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

(iii) $\frac{3}{8}$ ਦਾ ਘਣ $= \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{27}{512}$

(iv) 2.1 ਦਾ ਘਣ $= (2.1)^3 = 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 9.261$

ਉਦਾਹਰਨ 6.3: **ਇੱਕ 3cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ = 3 cm

ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = (ਭੁਜਾ)^3

ਇਸ ਲਈ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(3\text{cm})^3 = 27 \text{ cm}^3$

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਅਸਲ ਗਣਨਾ ਕਿਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 231 (ii) 4584 (iii) 6259 (iv) 105 (v) 17 (vi) 120

2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਘਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) –9 (ii) 16 (iii) –14 (iv) $\frac{1}{13}$ (v) $\frac{8}{7}$

   (vi) 2.4 (vii) 0.002 (viii) 9.9 (ix) 1.01

3. ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਭੁਜਾ ਹੋਵੇ :

(i) 4 cm (ii) 15cm (iii) 17cm (iv) 2.3 cm (v) 7.2 m

4. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) 7 ਦੇ ਘਣ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ :

(a) 7 (b) 3 (c) 5 (d) 6

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 2 ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਹੋਵੇਗਾ :

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

(iii) 5 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ :

(a) 15cm (b) $125cm^3$ (c) $45cm^3$ (d) 50cm

(iv) 1823^3 ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 3 (b) 9 (c) 7 (d) 6

(v) 1cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿਨ੍ਹੇ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕਿ 2cm ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

(vi) 626^3 ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6

6.2.1 ਕੁਝ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ : (Some Interesting Patterns)

1. (a) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨਾ

ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3$$

ਕੀ ਇਹ ਰੋਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪੈਟਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਘਟਾਉ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 1 + 6 = 7$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 1 + 18 = 19$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 1 + 36 = 37$$
$$5^3 - 4^3 = 1 + 5 \times 4 \times 3 = 1 + 60 = 61$$

ਕੀ ਇਹ ਰੋਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪੈਟਰਨ ਤੋਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

2. ਘਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ	ਉਸਦੇ ਘਣ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ
$10 = 2 \times 5$	$10^3 = 1000 = 2\times2\times2\times5\times5\times5 = 2^3 \times 5^3$
$18 = 2 \times 3 \times 3$	$18^3 = 5832 = 2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times3\times3 = 2^3\times3^3\times3^3$
$14 = 2 \times 7$	$14^3 = 2744 = 2\times2\times2\times7\times7\times7 = 2^3 \times 7^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3\times3\times3\times5\times5\times5 = 3^3 \times 5^3$
$20 = 2\times2\times5$	$20^3 = 8000 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5\times5 = 2^3\times2^3\times5^3$

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.4: **ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ?**

(i) 512 (ii) 5000 (iii) 1372 (iv) 1331

ਹੱਲ : (i) 512

512 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ $512 = \underbrace{2\times2\times2} \times \underbrace{2\times2\times2} \times \underbrace{2\times2\times2}$

ਇਥੇ ਅਸੀ 512 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(ii) 5000

5000 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ $= \underbrace{2\times2\times2}\times5\times\underbrace{5\times5\times5}$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ 5000 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2	5000
2	2500
5	625
5	125
5	25
5	5
	1

(iii) 1372

1372 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ = $2 \times 2 \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

ਇੱਥੇ 1372 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੰਡ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2	1372
2	686
7	343
7	49
7	7
	1

(iv) 1331

1331 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 1331 = $\underline{11 \times 11 \times 11}$

ਇੱਥੇ 1331 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

11	1331
11	121
11	11
	1

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
   (i) 7^3 (ii) 8^3 (iii) 9^3
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਢੁੱਕਵੇਂ ਪੈਟਰਨ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $12^3 - 11^3$ (ii) $20^3 - 19^3$ (iii) $51^3 - 50^3$
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ ?
   (i) 225 (ii) 10648 (iii) 1125 (iv) 2744

6.2.2 ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣਜ ਜੋ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.5 : **ਕੀ 243 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ 243 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : 243 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

$$243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3 = 3^3 \times 3^2$$

3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 3, ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 243 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਹੋਰ 3 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 243 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਪਵੇਗਾ।

$$243 \times 3 = 729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} = 729$$

ਹੁਣ ਇਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 3 ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ਅਤੇ 729 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.6 : ਕੀ 675 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ 675 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : 675 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 5 ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 675 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਹੋਰ 5 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $675 \times 5 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3375$

ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 5 ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ 675 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.7 : ਕੀ 31944 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਤਾਂ 31944 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਆਉ 31944 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੀਏ।

ਹੁਣ $31944 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 11$

2	31944
2	15972
2	7986
3	3993
11	1331
11	121
11	11
	1

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 31944 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 3 ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਏ, ਤਾਂ ਭਾਗਫਲ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ

ਇਸ ਲਈ $31944 \div 3 = 10648$, ਇਸ ਲਈ 3 ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 31944 ਨੂੰ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 10648 ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ।

   (i) 81 (ii) 100 (iii) 72 (iv) 625 (v 2916 (vi) 41503

2. ਉਹ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਣ ਤੇ ਭਾਜਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ।

   (i) 2187 (ii) 78125 (iii) 16384 (iv) 19773 (v) 36501 (vi) 23625

3. ਪਤਾ ਕਰੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ-ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ ?

   (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 8000 (iv) 27000 (v) 125000 (vi) 15125

   ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪੈਟਰਨ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

4. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

   (i) 108 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਕਿ ਉਹ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ ?

   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6

   (ii) 625 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਉਹ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ ?

   (a) 5 (b) 8 (c) 6 (d) 9

(iii) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ?

(a) 16 (b) 27 (c) 64 (d) 125

(iv) ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨੂੰ 500 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਉੱਤਰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ?

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 6

(v) $7^3 - 6^3$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(a) 127 (b) 397 (c) 1141 (d) 200

6.3 ਘਣਮੂਲ (Cube root)

ਕਈ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਘਣ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ $64 cm^3$ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ? ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਸਦਾ ਘਣ 64 ਹੋਵੇ।

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ, ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ, ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਣਮੂਲ (cube root) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ, ਘਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ, ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $4^3 = 64$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 64 ਦਾ ਘਣਮੂਲ 4 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $\sqrt[3]{64} = 4$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$\sqrt[3]{64} = 4$. ਚਿੰਨ '$\sqrt[3]{\ }$' ਘਣਮੂਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਘਣਮੂਲ ਨੂੰ $(\ )^{1/3}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੜ੍ਹੋ (ਸਾਰਨੀ 6.3) :

$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = (2^3)^{1/3} = 2$	$\sqrt[3]{27} = (3^3)^{1/3} = 3$	$\sqrt[3]{64} = (4^3)^{1/3} = 4$	$\sqrt[3]{125} = (5^3)^{1/3} = 5$	$\sqrt[3]{216} = (6^3)^{1/3} = 6$

ਸਾਰਨੀ 6.3

6.3.1 ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਘਣਮੂਲ (Cube Root through Prime factorisation method)

ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਕਿਸੇ ਘਣ ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

ਉਦਾਹਰਨ 6.8 : 42875 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 42875 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$42875 = \underline{5 \times 5 \times 5} \times \underline{7 \times 7 \times 7}$$

ਤਾਂ $\sqrt[3]{42875} = \sqrt[3]{\underline{5\times5\times5}\times\underline{7\times7\times7}}$

$= 5 \times 7 = 35$

5	42875
5	8575
5	1715
7	343
7	49
7	7
	1

ਉਦਾਹਰਨ 6.9 : 175616 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 175616 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

$175616 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

2	175616
2	87808
2	43904
2	21952
2	10976
2	5488
2	2744
2	1372
2	686
7	343
7	49
7	7
	1

ਇਸ ਲਈ $\sqrt[3]{175616} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ 64 ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ 3375 ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 5832 (ii) 216000 (iii) 456533 (iv) 729000

   (v) 85184 (vi) 328509
4. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :

   (i) 512 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਕੀ ਹੈ ?

   (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

   (ii) $\sqrt[3]{1728}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

   (iii) 1331 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) 11 (b) 21 (c) 31 (d) 23

   (iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 2 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

   (a) 4 (b) 2 (c) 6 (d) 8

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਘਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਘਣ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 9 (iv) 5 (v) 3 (vi) 0

2. (i) –729 (ii) 4096 (iii) –2744 (iv) $\frac{1}{2197}$ (v) $\frac{512}{343}$

(vi) 13.824 (vii) 0.000000008 (viii) 970.299 (ix) 1.030301

3. (i) 64 cm^3 (ii) 3375cm^3 (iii) 4913cm^3 (iv) 12.167 cm^3 (vi) 373.248 cm^3

4. (i) b (ii) d (iii) b (iv) c (v) d (vi) d

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. (i) $7^3 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55$

(ii) $8^3 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71$

(iii) $9^3 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89$

2. (i) $12^3 - 11^3 = 1 + 12 \times 11 \times 3$; (ii) $20^3 - 19^3 = 1 + 20 \times 19 \times 3$

(iii) $51^3 - 50^3 = 1 + 51 \times 50 \times 3$

3. (ii) ਅਤੇ (iv)

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. (i) 9 (ii) 10 (iii) 3 (iv) 25 (v) 2 (vi) 11

2. (i) 3 (ii) 5 (iii) 4 (iv) 9 (v) 3 (vi) 7

3. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਹਾਂ (iv) ਹਾਂ (v) ਹਾਂ (vi) ਨਹੀਂ

$[(a \times b)^m = a^m \times b^m,\ \sqrt[3]{ab} = (a)^{1/3} \times b^{1/3}]$

4. (i) a (ii) a (iii) a (iv) b (v) a

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. 4 **2.** 15

3. (i) 18 (ii) 60 (iii) 77 (iv) 90 (v) 44 (vi) 69

4. (i) d (ii) b (iii) a (iv) d

ਅਧਿਆਇ 7

ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਬਾਰੇ।*
- *ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ, ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤਤਾ ਅਤੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ।*
- *ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਵਿਵਹਾਰਕ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ।*
- *ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ, ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਵਾਹਰਕ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ।*
- *ਬੈਂਕ ਦੀ ਪਾਸ ਬੁੱਕ ਬਾਰੇ ਅਤੇ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਅਤੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਪਰਚੀ ਭਰਨ ਬਾਰੇ।*

7.1 ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ (Recalling ratios and percentage)

ਸੱਤਵੀਂ ਕਲਾਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਅਰਥ, ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲ ਸੇਬ ਅਤੇ ਕੇਲੇ ਹਨ : ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 40 ਅਤੇ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 10 ਹੈ, ਤਾਂ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ 40 : 10 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਤੁਲਨਾ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ

$$\frac{40}{10} = \frac{4}{1}.$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ 10 : 40 ਹੈ।

ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ ਭਾਵ 1 : 4 ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ 4 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 1 ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਤੁਲਨਾ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 50 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚ 40 ਸੇਬ ਹਨ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੁੱਲ ਫਲਾਂ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{40}{50}$ ਹੈ, ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਨੂੰ 100 ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{40}{50} = \frac{40}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{80}{100}$

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਫਲਾਂ ਵਿੱਚ 80% ਸੇਬ ਹਨ

ਜਾਂ

ਅਸੀਂ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ
ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ 50 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 40 ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ 100 ਫਲਾਂ ਵਾਲੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ

ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= \frac{40}{50} \times 100$

$= 80$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲ, ਸੇਬ ਅਤੇ ਕੇਲੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ :
ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ + ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ = 100
ਭਾਵ 80 + ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ = 100
ਇਸ ਲਈ ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ 100−80 = 20
ਇਸ ਲਈ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 80% ਸੇਬ ਅਤੇ 20% ਕੇਲੇ ਹਨ।

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ 50 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੀ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ 100 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{10}{50} \times 100$ = 20 ਇਸ ਲਈ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 20% ਕੇਲੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਪੁੱਛਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਆਪਣੀ ਪਿਛਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।
ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

ਉਦਾਹਰਨ 7.1 : **ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) ਇੱਕ ਸਾਈਕਲ ਦੀ 20 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਕਾਰ ਦੀ 60 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਨਾਲ।

(ii) 5m ਦਾ 20m ਨਾਲ **(iii) 50 ਪੈਸੇ ਦਾ ₹5 ਨਾਲ**

ਹੱਲ : (i) ਸਾਈਕਲ ਦੀ ਗਤੀ = 20 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ
ਕਾਰ ਦੀ ਗਤੀ = 60 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ
ਸਾਈਕਲ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਕਾਰ ਦੀ ਗਤੀ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ = 20 : 60

ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ ਭਾਵ 1:3

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਇਕਲ ਦੀ ਗਤੀ ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ, ਕਾਰ ਦੀ ਗਤੀ ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ ਦਾ $\frac{1}{3}$ ਹੈ।

(ii) 5 m ਦਾ 20 m ਨਾਲ 5 : 20.

ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$,ਭਾਵ 1 : 4

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ 1 ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਵਿੱਚ 4, ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

(iii) 50 ਪੈਸੇ ਦਾ ₹ 5 ਨਾਲ
= 50 ਪੈਸੇ ਦਾ 500 ਪੈਸਿਆਂ ਨਾਲ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ₹ 1 = 100 ਪੈਸੇ, ₹ 5 = 500 ਪੈਸੇ)
= 50 : 500

ਭਿੰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ = $\frac{50}{500}=\frac{1}{10}$ ਭਾਵ 1 : 10

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ 1 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 10 ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.2: ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ?

(i) 1 : 4 **(ii) 3 : 4** **(iii) 2 : 5**

ਹੱਲ : (i) $1 : 4 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\times\frac{25}{25} = \frac{25}{100}$ ਭਾਵ 25% (ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹਰ ਨੂੰ 100 ਬਣਾਉ)

(ii) $3 : 4 = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\times\frac{25}{25} = \frac{75}{100}$ ਭਾਵ 75%

(iii) $2 : 5 = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\times\frac{20}{20} = \frac{40}{100}$ ਭਾਵ 40%

ਉਦਾਹਰਨ 7.3 : ਕਿਸੇ ਕਲਾਸ (ਜਮਾਤ) ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 40% ਲੜਕੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 12 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ii) ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

(iii) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = x

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ x ਦਾ 40% = 12

$$= x \times \frac{40}{100} = 12$$

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{12\times100}{40} = 30$

(i) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ = 30

(ii) ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 30 - ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 30 – 12 = 18

(iii) ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ = $18 : 12 = \frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ 3 : 2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ 3 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 2 ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦਾ ਮਤਲਬ 100 ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ (ਹੱਲ ਕਰਨਾ)
ਇਸ ਲਈ 40% ਲੜਕੇ ਮਤਲਬ, 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ 40 ਲੜਕੇ,
ਪਰ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 12,

ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{100}{40}\times 12 = 30.$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰਲੀ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.4 : ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਨੇ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 38 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪਿਕਨਿਕ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧ ਕੀਤਾ। ਪਿਕਨਿਕ ਸਥਾਨ ਸਕੂਲ ਤੋਂ 60 ਕਿ. ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਕੰਪਨੀ ₹ 8 ਪ੍ਰਤੀ ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਿਰਾਇਆ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋ ਅਧਿਆਪਕ ਵੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਨਾਲ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ ਅਤੇ ਖਾਣ ਪੀਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ₹ 3840 ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ (i) ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਲਾਗਤ (ਖਰਚਾ) (ii) ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ

ਠਹਿਰਾਅ ਸਕੂਲ ਤੋਂ 18 ਕਿ. ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਹਿਲੇ ਠਹਿਰਾਅ ਲਈ ਕੁੱਲ ਦੂਰੀ ਦਾ ਕਿੰਨ੍ਹਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਤੈਅ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨਾ ਬਾਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : (i) ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਪਿਕਨਿਕ ਦਾ ਸਾਰਾ ਖਰਚਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

∴ ਪਿਕਨਿਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ = ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਖਰਚ + ਖਾਣ ਪੀਣ ਦਾ ਖਰਚ

$= (60 \times 2) \times 8 + 3840$

$= 960 + 3840 = ₹\ 4800$

ਕੁੱਲ ਵਿਅਕਤੀ = ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀ + ਅਧਿਆਪਕ

$= 38 + 2 = 40$

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਖਰਚ $= 4800 \div 40 = ₹120$

(ii) ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਠਹਿਰਾਅ ਸਕੂਲ ਤੋਂ 18km ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ

ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ ਠਹਿਰਾਅ ਲਈ ਕੁੱਲ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚੋਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ $= \frac{18}{120} \times 100 = 15\%$

ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ $= 100 - 15 = 85\%$

ਬਾਕੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਬਾਕੀ ਦੂਰੀ $= 120 - 18 = 102$km

ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ $= \frac{102}{120} \times 100 = 85\%$

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਦੀ 12 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਇਕ ਕਾਰ ਦੀ 36 ਕਿ. ਮੀ. ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਨਾਲ

   (ii) 10m ਦਾ 10km ਨਾਲ (iii) 1.5m ਦਾ 10cm ਨਾਲ (iv)1 ਘੰਟੇ ਦਾ 300 ਸੈਕਿੰਟਾਂ ਨਾਲ

   (v) 80 ਪੈਸੇ ਦਾ ₹4 ਨਾਲ (vi) 200g ਦਾ 8kg ਨਾਲ

2. ਕੁੱਲ 20 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ, 50% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਹਨ। ਜਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 35% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਹਨ। ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅੰਕੜਾਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ?
4. 1 ਤੋਂ 50 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ?
5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

   (i) 1 : 3 (ii) 4 : 5 (iii) 1 : 2 (iv) 2 : 5 (v) 5 : 4 (vi) 1 : 5

6. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਆਪਣੀ ਆਮਦਨ ਦਾ 87% ਖਰਚ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ₹ 325 ਬੱਚਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਕਬੱਡੀ ਟੀਮ ਨੇ 15 ਮੈਚ ਖੇਡੇ ਅਤੇ 60% ਮੈਚ ਜਿੱਤੇ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਮੈਚ ਹਾਰੇ ?
8. 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚੋਂ 40% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸ਼ਤਰੰਜ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 15% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕੈਰਮ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੇ ਕੈਰਮ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਸ਼ਤਰੰਜ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

9. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) 6km ਦਾ 600m ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ :

(a) 1:100 (b) 10:1 (c) 1:10 (d) 100:1

(ii) 3: 4 ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ :

(a) 75% (b) 50% (c) 25% (d) 100%

(iii) 200 ਪੈਸੇ ਦਾ ₹3 ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ :

(a) 2 : 3 (b) 3 : 2 (c) 200 : 3 (d) 3 : 200

(iv) 80 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ 48 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ :

(a) 50% (b) 80% (c) 75% (d) 60%

(v) 3 : 5 ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ :

(a) 30% (b) 50% (c) 60% (d) 80%

7.2 ਕਟੌਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Finding discount)

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਖਰੀਦਦਾਰ ਦਾ ਧਿਆਨ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਜਾਂ ਸਾਮਾਨ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਕਸਰ ਹੀ ਕੰਪਨੀਆਂ ਵੱਲੋਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕਮੀ ਨੂੰ ਕਟੌਤੀ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਵੇਚ ਮੁੱਲ

$$\text{ਕਟੌਤੀ \%} = \frac{\text{ਕਟੌਤੀ}}{\text{ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ}} \times 100$$

ਉਦਾਹਰਨ 7.5 : ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ 20% ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(i) ₹ 300 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਪੋਸ਼ਾਕ (ii) ₹ 750 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਜੁੱਤੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਾ

ਹੱਲ : (i) ਪੋਸ਼ਾਕ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ = ₹300

$$\text{ਕਟੌਤੀ} = 300 \text{ ਦਾ } 20\% = 300 \times \frac{20}{100}$$

$$= ₹\ 60$$

ਇਸ ਲਈ ਪੋਸ਼ਾਕ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਕਟੌਤੀ

$$= ₹\ 300 - ₹\ 60 = ₹\ 240$$

(ii) ਜੁੱਤੀਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ = ₹ 750

$$\text{ਕਟੌਤੀ} = 750 \text{ ਦਾ } 20\% = ₹\left(750 \times \frac{20}{100}\right)$$

$$= ₹\ 150$$

ਇਸ ਲਈ ਜੁੱਤੀਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਕਟੌਤੀ

$$= ₹\ 750 - ₹\ 150$$

$$= ₹\ 600$$

ਉਦਾਹਰਨ 7.6 : ₹ 600 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਫੋਟੋ ਫਰੇਮ ₹ 450 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਵੇਚ ਮੁੱਲ

ਇਸ ਲਈ ਕਟੌਤੀ $= ₹(600 - 450)$
$= ₹150$

$$\text{ਕਟੌਤੀ \%} = \frac{\text{ਕਟੌਤੀ}}{\text{ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ}} \times 100$$ (ਕਟੌਤੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ)

ਹੁਣ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ $= \frac{150}{600} \times 100 = 25\%$

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. ₹ 1920 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪੈਕੇਟ ₹ 1840 ਵਿੱਚ ਵੇਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ₹ 791 ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ₹ 678 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਬੈਗ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 220 ਹੈ। ਸੇਲ ਵਿੱਚ 15% ਕਟੌਤੀ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬੈਗ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇੱਕ ਛੱਤ ਵਾਲੇ ਪੱਖੇ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 720 ਹੈ। ਮੌਸਮ ਲੰਘਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇਹ ₹ 684 ਵਿੱਚ ਵੇਚਿਆਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਸਾਰੀਆਂ ਨਕਦ ਖਰੀਦਦਾਰੀਆਂ ਉੱਤੇ 4% ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਵਸਤੂ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਨਕਦ ਅਦਾਇਗੀ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ਜਿਸਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 650 ਹੈ।
6. ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਉੱਤੇ 20% ਕਟੌਤੀ ਦੇਣ ਉਪਰੰਤ, ਇੱਕ ਸਾੜੀ ₹ 720 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਅੰਕੁਸ਼ ਨੂੰ ₹ 400 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਵਸਤੂ ਉੱਤੇ 8% ਕਟੌਤੀ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਵਸਤੂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਰਚਨਾ ਨੂੰ 100 ਰੁਪਏ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀਆਂ 3 ਕਿਤਾਬਾਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10%, 15% ਅਤੇ 20% ਕਟੌਤੀ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਰਚਨਾ ਨੇ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਕਮ ਅਦਾ ਕੀਤੀ।
9. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

   (i) ਕਟੌਤੀ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਿਸ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

   (a) ਵੇਚ ਮੁੱਲ (b) ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ (c) ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ (d) ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ

   (ii) ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

   (a) $\frac{\text{ਕਟੌਤੀ}}{\text{ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ}} \times 100$ (b) $\frac{\text{ਕਟੌਤੀ}}{\text{ਵੇਚ ਮੁੱਲ}} \times 100$

   (c) ਵੇਚ ਮੁੱਲ – ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ (d) ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ

   (iii) ₹ 15000 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ₹ 14,400 ਵਿੱਚ ਉਪਲਬੱਧ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ :

   (a) 2% (b) 4% (c) 5% (d) 7%

   (iv) ₹ 900 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ₹ 873 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਹੈ :

   (a) 72 (b) 27 (c) 29 (d) 24

(v) ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ 4% ਕਟੌਤੀ ਤੇ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕੁਰਸੀ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 450 ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(a) ₹ 412 (b) ₹ 425 (c) ₹ 432 (d) ₹ 440

7.2.1 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਗਣਨਾ (ਅੰਦਾਜ਼ਨ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰਨਾ) (Estimation in Percentage)

ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੀ ਕੁੱਲ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ₹ 1157.80 ਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ 30% ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਵੋਗੇ ?

ਪਗ 1 : ਬਿੱਲ ਨੂੰ ₹ 1157.80 ਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਓ ਭਾਵ ₹ 1160

ਪਗ 2 : 1160 ਦਾ 30% ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$= 1160 \times \frac{30}{100} = 348$$

ਜੋ ਕਿ ਨਿਕਟਤਮ ਦਹਾਈ ਵਿੱਚ ਅੰਦਾਜ਼ਨ 350 ਰੁਪਏ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਦਾਇਗੀ ਯੋਗ ਰਕਮ = 1160 – 350 = ₹810

ਉਦਾਹਰਨ 7.7: **ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ, ਜੇਕਰ**

(i) ਬਿੱਲ ₹ 669.70 ਹੈ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ 10% ਹੈ।

(ii) ਬਿੱਲ ₹ 1008 ਹੈ, ਕਟੌਤੀ 10% ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਬਿੱਲ ਨੂੰ ਨਿਕਟਤਮ ਦਹਾਈ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਓ, ਇੱਥੇ ਬਿੱਲ ₹669.70 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ਰੁਪਏ ₹670 ਹੈ।

ਕਟੌਤੀ = 670 ਦਾ 10%

$= 670 \times \frac{10}{100} = 67$, (ਇਸਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ₹ 70 ਹੈ।)

ਇਸ ਲਈ ਭੁਗਤਾਨ ਯੋਗ ਅੰਦਾਜ਼ਨ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹670 – ₹ 70 = ₹600

(ii) ਬਿੱਲ ਨੂੰ ਨਿਕਟਤਮ ਦਹਾਈ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਓ, ਇੱਥੇ ਬਿੱਲ ₹ 1008 ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ₹ 1010 ਹੈ।

ਕਟੌਤੀ = 1010 ਦਾ 10%

$= 1010 \times \frac{10}{100}$

= 101, ਇਸਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ₹ 100 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅੰਦਾਜ਼ਨ ਅਦਾਇਗੀ ਯੋਗ ਬਿਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ = ₹1010 – ₹100 = ₹910

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 598.80 ਹੈ ਅਤੇ ਦੁਕਾਨਦਾਰ 20% ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ।
2. ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ ਜੇਕਰ ਬਿੱਲ ₹ 378 ਹੈ ਅਤੇ ਦੁਕਾਨਦਾਰ 15% ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

7.3 ਵਿਕਰੀ ਕਰ (Sales Tax)

ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਲਈ ਸਰਕਾਰ ਨੂੰ ਧਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਰਕਾਰ ਇਹ ਧਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਰ ਲਗਾ ਕੇ ਇਕੱਠਾ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਤੇ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਵਸੂਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਗ੍ਰਾਹਕ ਤੋਂ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਰਕਾਰ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਦੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਰ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. (GST) ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜੁੜਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.8 : **ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ 5% ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :**

(i) ਇੱਕ ਤੋਲੀਆ ₹ 120 ਮੁੱਲ ਉੱਤੇ

(ii) ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਰੋਲਰ ਸਕੇਟਸ ₹ 450 ਮੁੱਲ ਉੱਤੇ

ਹੱਲ : (i) ਤੋਲੀਏ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹120

ਵਿਕਰੀ ਕਰ = 5%

₹ 100 ਉੱਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ = ₹ 5

₹ 1 ਉੱਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ = ₹$\frac{5}{100}$

₹ 120 ਉੱਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ = ₹$\left(\frac{5}{100}\times 120\right)$ = ₹ 6

ਇਸ ਲਈ ਬਿਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ (ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ) = ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ + ਵਿਕਰੀ ਕਰ

= ₹120 + ₹ 6 = ₹126

(ii) ਰੋਲਰ ਸਕੇਟਸ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 450

ਵਿਕਰੀ ਕਰ = 5%

₹ 100 ਉੱਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ = ₹ 5

₹ 450 ਉੱਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ = ₹$\left(\frac{5}{100}\times 450\right)$ = ₹22.50

ਇਸ ਲਈ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ (ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ) = ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ + ਵਿਕਰੀ ਕਰ

= ₹450 + ₹22.50

= ₹472.50

ਉਦਾਹਰਨ 7.9 : **ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੇ ਇੱਕ LED ਟੀ.ਵੀ. ₹5400, 8% ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸਮੇਤ ਖਰੀਦਿਆ। ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ LED ਟੀ.ਵੀ. ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : LED ਟੀ. ਵੀ. ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 8% ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਮੁੱਲ ₹ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸਮੇਤ ਮੁੱਲ ਰੁ. 108 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸਮੇਤ ਮੁੱਲ ₹ 108 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਲ ਮੁੱਲ = ₹100

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸਮੇਤ ₹5400 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਲ ਮੁੱਲ = ₹$\left(\frac{100}{108}\times 5400\right)$

= ₹5000

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. ਇੱਕ ਸ਼ੋਅ-ਰੂਮ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 36500 ਹੈ। ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ 8% ਹੈ। ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸਮੇਤ ਇੱਕ LED ਟੀ. ਵੀ. ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 26880 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ LED ਟੀ. ਵੀ. ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 24000 ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ 8% ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰਾਹੁਲ ਨੇ ਇੱਕ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਖਰੀਦਣ ਤੇ ₹ 1920 ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵਿੱਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਾਸ਼ਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਸੀਮਾ ਨੇ ₹ 904 ਵਿੱਚ ਬਿਸਕੁੱਟਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਡੱਬਾ ਖਰੀਦਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 13% ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਿਸਕੁੱਟਾਂ ਦੇ ਡੱਬੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਜੋੜੀ ਦੀ ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 440 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ 5% ਹੈ ਤਾਂ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

6. (i) ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਉੱਤੇ ਵਿੱਕਰੀ ਕਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ = ₹ 200 ਅਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ = 5%

   (a) ₹5 (b) ₹10 (c) ₹15 (d) ₹20

   (ii) ਇੱਕ ਜੁੱਤੀਆਂ ਦੀ ਜੋੜੀ ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਭੁਗਤਾਨ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਇਸ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 2000 ਅਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦੀ ਦਰ 15% ਹੈ।

   (a) ₹2500 (b) ₹2015 (c) ₹2300 (d) ₹2500

   (iii) 10% ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਜੋੜਣ ਤੇ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ₹ 165 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕਿਤਾਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

   (a) ₹100 (b) ₹150 (c) ₹160 (d) ₹140

   (iv) ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਬੈਟ ਜਿਸਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 5000 ਹੈ, 8% ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਵੇਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) ₹5200 (b) ₹5600 (c) ₹6000 (d) ₹5400

7.4 ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ

ਬੈਂਕ ਜਾਂ ਡਾਕਖਾਨੇ ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਜਮਾਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਰਕਮ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਾਧੂ ਰਕਮ ਨੂੰ ਵਿਆਜ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਵਿਅਕਤੀ ਰਕਮ ਉਧਾਰ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਵਿਆਜ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੱਤਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਸ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਬੈਂਕ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਸੁਣਨ ਨੂੰ ਮਿਲ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜਮ੍ਹਾ (Fixed deposit) ਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ 8% ਸਾਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਜਾਂ ਬੱਚਤ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 4% ਸਾਲਾਨਾ। ਆਓ! ਪਹਿਲਾਂ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਲਈ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.10 : **8% ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ₹ 5000 ਉਧਾਰ ਲਏ ਗਏ। 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਅਦਾਇਗੀ ਯੋਗ ਰਕਮ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ :

$$\text{ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ} = \frac{\text{ਮੂਲਧਨ} \times \text{ਦਰ} \times \text{ਸਮਾਂ}}{100}$$

$$\text{ਇਸ ਲਈ } \frac{\text{ਮੂਲਧਨ} \times \text{ਦਰ} \times \text{ਸਮਾਂ}}{100} = ₹\left(\frac{5000 \times 8 \times 2}{100}\right) = ₹800$$

ਇੱਥੇ ਮੂਲਧਨ = ₹ 5000, ਦਰ = 8% ਸਲਾਨਾ ਅਤੇ ਸਮਾਂ = 2 ਸਾਲ

ਇਸ ਲਈ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ = ₹800

ਦੋ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਦਾਇਗੀ ਯੋਗ ਰਕਮ (ਮਿਸ਼ਰਤਧਨ) = ਮੂਲਧਨ + ਵਿਆਜ

= ₹5000 + ₹800

∴ ਮਿਸ਼ਰਤਧਨ = ₹5800

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

₹ 100 ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ = ₹ 8

$$\text{ਇਸ ਲਈ ₹ 5000 ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ} = ₹\left(\frac{8}{100} \times 5000\right) = ₹400$$

2 ਸਾਲ ਲਈ ਵਿਆਜ = ₹400 × 2 = ₹800

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਤਧਨ = ਮੂਲਧਨ + ਵਿਆਜ

= ₹5000 + ₹800 = ₹5800

ਅਭਿਆਸ 7.5

1. ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ₹ 1600 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 5% ਸਾਲਾਨ ਦਰ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਨਾਲ ₹ 1760 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ?
2. ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੀ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਕੋਈ ਰਾਸ਼ੀ 2 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਆਪ ਦੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ?
3. ₹15000 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਉੱਤੇ 5% ਸਾਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ 2 ਸਾਲ ਲਈ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਧਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.5 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ (Calculating Compound Interest)

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਅਦਾ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਜਾਂ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਿਆਜ ਕਦੀ ਸਧਾਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਆਜ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (C.I.) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਰਕਮ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰ ਸਾਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵਿਆਜ ਜੁੜ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਪਾਸ ਬੁੱਕ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੁੜਨ ਵਾਲਾ ਇਹ ਵਿਆਜ ਹਰ ਸਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਗੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਤਹਿਤ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਮੂਲਧਨ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਤਹਿਤ ਇਹ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਤਹਿਤ, ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਸਲਾਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਦੇਣ ਯੋਗ ਰਾਸ਼ੀ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਓ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਮੂਲਧਨ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.11 : ਸ਼ਾਮ ਨੇ ₹ 5000 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 2 ਸਾਲਾਂ ਲਈ 4% ਸਲਾਨਾ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਈ। ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਅਤੇ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲਧਨ = ₹5000, ਦਰ = 4% ਸਲਾਨਾ, ਸਮਾਂ = 1 ਸਾਲ

ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ = ₹ $\left(\frac{5000 \times 4 \times 1}{100}\right)$ = ₹200

ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ 'ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ = ਮੂਲਧਨ + ਵਿਆਜ

= ₹5000 + ₹200 = ₹5200

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ = ₹ $\left(\frac{5200 \times 4 \times 1}{100}\right)$ = ₹208

ਹੁਣ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ = ₹5200 + ₹208

= ₹5408

ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ - ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ - ਮੂਲਧਨ

= ₹5408– ₹5000

= ₹408

ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਮੂਲਧਨ ₹ 200 ਅਤੇ ਦਰ 20% ਸਲਾਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

		ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ	**ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ**
ਪਹਿਲਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹200.00	₹200.00
	20% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹40.00	₹40.00
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹240.00	₹240.00
ਦੂਜਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹200.00	₹240.00
	20% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹40.00	₹48.00
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹240.00 + ₹40.00 = ₹280.00	₹288.00
ਤੀਜਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹200.00	₹288.00
	20% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹40.00	₹57.60
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹280 + ₹40.00 = ₹320	₹345.60

ਸਾਰਨੀ 7.1

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 3 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ

ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵਿਆਜ = ₹320 – ₹200 = ₹120

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵਿਆਜ = ₹345.60 – ₹200 = ₹145.60

ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਤਹਿਤ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਮੂਲਧਨ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਤਹਿਤ ਇਹ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਤਹਿਤ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ, ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

7.6 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Deducing a formula for compound Interest)

ਇਸ ਅਨੁਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਬਣਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ R% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਮੂਲਧਨ P_1 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਜੁੜਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ A_1 ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ A_1 ਅਗਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਬਣ ਜਾਏਗੀ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ P_2 ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ।

$SI_1 = ₹\ \dfrac{P_1 \times R \times 1}{100}$ (ਇੱਥੇ SI_1 ਦਾ ਮਤਲਬ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ)

$$A_1 = P_1 + SI_1 = ₹\left(P_1 + \frac{P_1R}{100}\right) = ₹\ P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_2 \qquad ...(1)$$

(ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਹੈ।)

ਹੁਣ, $SI_2 = \dfrac{P_2 \times R \times 1}{100} = P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right) \times \dfrac{R}{100}$ $\left[\because P_2 = P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)\right.$ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਤੋਂ]

$$= \frac{P_1R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right) \qquad ...(2)$$

ਹੁਣ $A_2 = P_2 + SI_2$

$= P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right) + P_1\dfrac{R}{100}\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)$ [(1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੁਆਰਾ]

$$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = P_3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ 'T' ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ

$$A_T = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = P\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)^T$

ਜਿੱਥੇ A ਮਿਸ਼ਰਧਨ ਹੈ, P ਮੂਲਧਨ ਹੈ, R ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਹੈ ਅਤੇ T ਸਮਾਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (C.I.) = ਮਿਸ਼ਰਤਧਨ (A) − ਮੂਲਧਨ (P)

ਉਦਾਹਰਨ 7.12 : **ਮੂਲਧਨ ₹ 10,500 ਦਾ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ।**

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$$

ਇੱਥੇ A = ਮਿਸ਼ਰਤਧਨ (ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ), P = ਮੂਲਧਨ R = ਸਲਾਨਾ ਦਰ, T = ਸਮਾਂ

ਸਾਡੇ ਕੋਲ P = ₹ 10,500, R = 5% ਸਲਾਨਾ, T = 2 ਸਾਲ

ਇਸ ਲਈ $A = ₹10,500 \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = ₹10500 \times \left(\frac{21}{20}\right)^2$

$$= ₹10500 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = ₹11576.25$$

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (C.I.) = ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ − ਮੂਲਧਨ = (A – P)

$$= ₹11576.25 - ₹10,500.00$$
$$= ₹1076.25$$

ਅਭਿਆਸ 7.6

1. ₹ 14000 ਦੀ ਰਕਮ ਉੱਤੇ 2 ਸਾਲਾਂ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ₹ 1000 ਦੀ ਰਕਮ ਉੱਤੇ 20% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 'ਤੇ 3 ਸਾਲਾਂ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ $= \frac{P\times......\times.......}{100}$

(a) R, S (b) R, T (c) A, T (d) A, R

(ii) ₹ 2000 ਉੱਤੇ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ 1 ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ

(a) ₹2000 (b) ₹200 (c) ₹20 (d) ₹2

(iii) ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ- ਮਿਸ਼ਰਧਨ (ਰਾਸ਼ੀ) = ...

(a) ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (b) ਲਾਭ (c) ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ (d) ਮੂਲਧਨ

(iv) ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਧਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਹੀ ਸੂਤਰ ਚੁਣੋ।

(a) $P\left(1+\frac{T}{100}\right)^R$ (b) $R\left(1+\frac{P}{100}\right)^T$ (c) $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ (d) $R\left(1+\frac{T}{100}\right)^P$

(v) ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ S.I. ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (C.I.) ਲਈ 1 ਸਾਲ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮੇਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

(a) S.I. < C.I. (b) C.I > S.I

(c) S.I. = C.I. (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

7.7 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ (Applications of compound Interest Formula)

ਕੁੱਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ—

(i) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਕਮੀ

(ii) ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਕਮੀ

(iii) ਜੇਕਰ ਬੈਕਟਰੀਆ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਕੁੱਲ ਵਾਧਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.13. **ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ 15,000 ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 4% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?**

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 4% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਨਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਨਵੀਂ ਜਨਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਮਿਸ਼ਰਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ।

$$\text{ਤਾਂ ਦੋ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ} = 15000\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

$$= 15000\left(1+\frac{1}{25}\right)^2$$

$$= 15000\left(\frac{26}{25}\right)^2$$

$$= 15000\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25} = 16224$$

ਉਦਾਹਰਨ 7.14. **ਇੱਕ ਪੁਰਾਣਾ ਸਕੂਟਰ ₹24000 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ। 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਗਈ। 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(ਇੱਥੇ ਕਮੀ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਅਤੇ ਉਮਰ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣੀ)

ਹੱਲ : ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ (P) = ₹24000

ਸਮਾਂ = 2 ਸਾਲ

ਕਮੀ ਦੀ ਦਰ = 5% ਸਲਾਨਾ

(ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਸਕੂਟਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 5% ਦੀ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਇੱਕ ਗੱਲ ਨੋਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰ - 5% ਹੋਵੇਗੀ)

$$\text{ਤਾਂ ਸਕੂਟਰ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦੋ ਸਾਲ ਬਾਅਦ} = ₹24000\left(1-\frac{5}{100}\right)^2 \qquad \left[\begin{array}{c}\text{ਨੋਟ}: A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T \\ \text{ਇੱਥੇ } R = -5\end{array}\right]$$

$$= ₹24000\left(1-\frac{1}{20}\right)^2$$

$$= ₹24000 \left(\frac{19}{20}\right)^2$$

$$= ₹24000 \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20}$$

$$= ₹21660$$

ਅਭਿਆਸ 7.7

1. ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 10% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਅੱਜ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 10,00,000 ਹੈ ਤਾਂ ਦੋ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਸ ਦਾ ਕੀ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ? ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਪਲਾਟ ਦੀ ਕੀਮਤ ₹ 6,40,000 ਹੈ। ਇਸਦੇ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਮੁਤਾਬਕ 5% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਇਸ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?
3. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਪੁਰਾਣੀ ਮੋਟਰਸਾਈਕਲ ₹ 16,000 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਗਈ। 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਮੋਟਰ ਸਾਈਕਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. 2018 ਵਿੱਚ ਇੱਕ (LED) TV ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 16,000 ਸੀ। ਅਗਲੇ ਸਾਲ (2019) ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ 5% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋ ਗਿਆ। ਫਿਰ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੇ ਸਾਲ (2020) ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 4% ਦੀ ਕਮੀ ਹੋ ਗਈ। 2020 ਵਿੱਚ (LED) TV ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ ?
5. ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ 1,50,000 ਹੈ। ਇਸਦੀ ਸਲਾਨਾ ਜਨਮ ਦਰ 5% ਅਤੇ ਮਰਨ ਦਰ 3% ਹੈ। ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਜਨਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.8 'ਵਿੱਤੀ ਜਾਗਰੂਕਤਾ' (Financial Awareness)

ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਨੇ ਆਪਣੇ ਪਰਿਵਾਰ ਲਈ ਰਾਤ ਦੇ ਖਾਣੇ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਈ ਰਾਤ ਦੇ ਖਾਣੇ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਛੋਟੀ ਬੇਟੀ ਤਵਲੀਨ (ਜੋ ਕੀ 8ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੀ ਸੀ) ਬਹੁਤ ਉਤਸਕ ਸੀ ਕਿ ਉਸਦੇ ਪਿਤਾ ਨੇ ਖਾਣ ਦੀ ਮੂਲ ਰਕਮ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪੈਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸਨ। ਫਿਰ ਉਸਦੇ ਪਿਤਾ ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਰਕਾਰ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਟੈਕਸ (ਦਰ) ਅਦਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਰਕਾਰ ਸੜਕਾਂ ਬੁਨਿਆਦੀ ਢਾਂਚੇ ਅਤੇ ਵਿਦਿਅਕ ਅਦਾਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਲਈ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ 2 ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਰ ਹਨ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧਾ ਕਰ ਅਤੇ ਅਸਿੱਧਾ ਕਰ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਸਿੱਧਾ ਕਰ ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਆਮਦਨ ਉੱਤੇ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਮਦਨ ਕਰ ਅਤੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਪੂੰਜੀ ਕਰ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਅਸਿੱਧਾ ਕਰ ਆਮਦਨ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਵਸਤੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਵਲੀਨ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਾਰੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਜਾਨਣ ਲਈ ਉਤਸਕ ਸੀ। ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਸਿੱਧੇ ਕਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਆਬਕਾਰੀ ਕਰ, ਵੈਟ ਅਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਅਦਾ ਕਰਦੇ ਸੀ। ਜੋ ਕਿ ਖਪਤਕਾਰ ਕਰ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ ਹਨ। ਹਾਲਾਂਕਿ ਖਪਤਕਾਰਾਂ 'ਤੇ ਲਗਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਤਰੀਕੇ ਅਤੇ ਰੂਪ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ ਹਨ। ਅੱਜ ਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕਰ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ (ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ.) GST ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. (ਗੁਡਜ਼ ਐਂਡ ਸਰਵਿਸ ਕਰ) — ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਭਾਰਤ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਭਾਰਤ ਦੇ ਸੰਵਿਧਾਨ ਵਿੱਚ 101 ਵੀਂ ਸੋਧ ਦੁਆਰਾ 1 ਜੁਲਾਈ 2017 ਤੋਂ ਲਾਗੂ ਹੋਇਆ। ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਨੇ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਰਾਜ ਸਰਕਾਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਏ ਗਏ ਕਈ ਪੁਰਾਣੇ ਕਰਾਂ ਦੀ ਥਾਂ ਲੈ ਲਈ ਹੈ। ਇਹ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸਪਲਾਈ ਅਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੇਵਾਵਾਂ 'ਤੇ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਅਸਿੱਧਾ ਜਾਂ ਖਪਤ ਅਧਾਰਿਤ ਕਰ ਹੈ। ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ

ਹਰ ਇੱਕ ਪੜਾਅ 'ਤੇ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅੰਤਿਮ ਉਪਭੋਗਤਾ ਜੋ ਕਿ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਸਹਿਣ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪੜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਰਟੀਆਂ ਨੂੰ ਵਾਪਸ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਰ ਦੀ ਵਸੂਲੀ ਲਈ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਦੀਆਂ ਦਰਾਂ ਨੂੰ ਪੰਜ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਟੈਕਸ ਸਲੈਬਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਹੜੀਆਂ ਕਿ 0%, 5% 12%, 18% ਅਤੇ 28% ਹਨ ਜਦਕਿ ਪੈਟਰੋਲੀਅਮ, ਅਲਕੋਹਲ ਵਾਲੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਬਿਜਲੀ ਵਰਗੇ ਕੁੱਝ ਉਤਪਾਦ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਦੇ ਦਾਇਰੇ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ।

ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਬਾਰੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਸਮਝਾਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਰੈਸਟੋਰੈਂਟ ਦਾ ਬਿੱਲ ਦਿਖਾਇਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰਾਤ ਦੇ ਖਾਣ ਲਈ ਆਰਡਰ ਕੀਤੇ ਖਾਣੇ 'ਤੇ 5% ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਤਵਲੀਨ ਨਵੀਂ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸਿੱਖ ਕੇ ਬਹੁਤ ਖੁਸ਼ ਸੀ।

ਅਭਿਆਸ 7.8

ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ..........
   (a) ਵਸਤੂ ਅਤੇ ਵਿਕਰੀ ਕਰ (b) ਕੁੱਲ ਵਿਕਰੀ ਕਰ
   (c) ਵਸਤੂ ਅਤੇ ਸੇਵਾ ਕਰ (d) ਕੁੱਲ ਸੇਵਾ ਕਰ
2. ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਕਦੋਂ ਲਾਗੂ ਹੋਇਆ ?
   (a) 1 ਜੁਲਾਈ 2010 (b) 1 ਜੁਲਾਈ 2017
   (c) 1 ਜੁਲਾਈ 2019 (d) 1 ਜੁਲਾਈ 2018
3. ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਟੈਕਸ ਸਲੇਬਾਂ ਹਨ ?
   (a) 1 (b) 8
   (c) 3 (d) 5
4. ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਅਧੀਨ ਟੈਕਸ ਸਲੈਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ?
   (a) 0% (b) 6%
   (c) 5% (d) 12%
5. ਸੰਵਿਧਾਨ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਸੋਧ ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਹੈ ?
   (a) 91ਵੀਂ (b) 102ਵੀਂ
   (c) 101ਵੀਂ (d) 100ਵੀਂ
6. ਜੀ. ਐੱਸ. ਟੀ. ਅਧੀਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ 'ਤੇ ਕਰ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ?
   (a) ਭੋਜਨ (b) ਪੈਟਰੋਲੀਅਮ ਉਤਪਾਦ
   (c) ਐਲਕੋਹਲਿਕ ਡਰਿੰਕ (d) ਬਿਜਲੀ

'ਆਪਣੇ ਖਾਤੇ ਦਾ ਸੰਚਾਲਨ ਕਰਨਾ' (Operating your Account)

ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਤੁਹਾਡੇ ਸਖਤ ਮਿਹਨਤ ਨਾਲ ਕਮਾਏ ਪੈਸੇ ਨੂੰ ਸੁਰੱਖਿਆ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਬੈਂਕ ਤੁਹਾਡੀ ਜਮ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀ ਉੱਤੇ ਕੁੱਝ ਵਿਆਜ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡੀ ਬੱਚਤ ਉੱਤੇ ਆਮਦਨ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬੈਂਕ ਇੱਕ ਖਾਤੇ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ, ਖਾਤਾ ਧਾਰਕ ਦੀਆਂ ਹਦਾਇਤਾਂ ਅਨੁਸਾਰ, ਧਨ ਸਥਾਨ-ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਹੂਲਤ ਵੀ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਬੈਂਕ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਖਰਚ ਨੂੰ ਨਿਯੰਤਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਬੈਂਕ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖਾਤਿਆਂ ਦੀ ਪੇਸ਼ਕਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੱਚਤ ਅਤੇ ਚਾਲੂ ਖਾਤਾ ਆਦਿ।

- ਬਚਤ ਖਾਤਾ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂ ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਂਝੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪੈਸੇ ਬਚਾਉਣ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਖੋਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਚਾਲੂ ਖਾਤਾ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਕਾਰੋਬਾਰੀਆਂ ਅਤੇ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਖੋਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

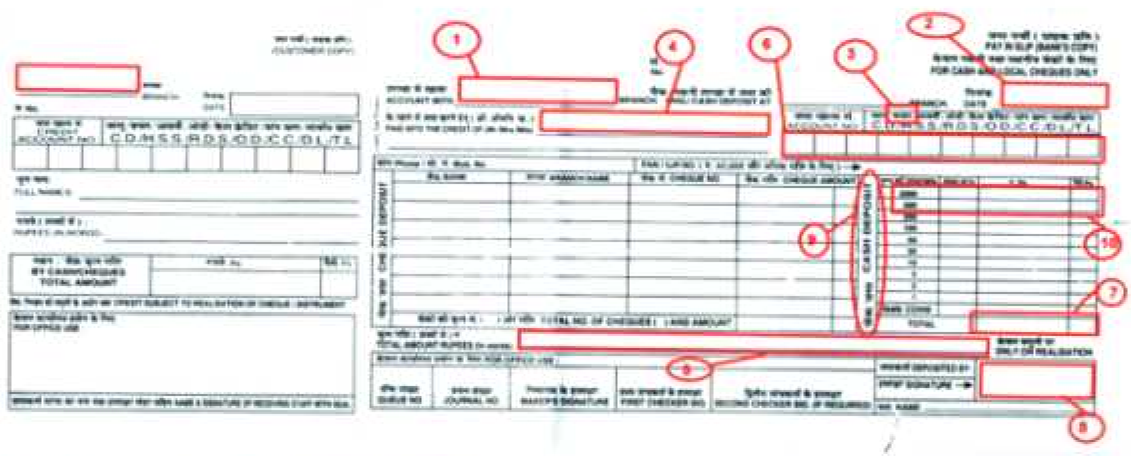
ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਢਵਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਪੈਸੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਉਣਾ ਅਤੇ ਪੈਸੇ ਕਢਵਾਉਣਾ : (Depositing and withdrawing money)

ਕਿਸੇ ਚਾਲੂ ਜਾਂ ਬੱਚਤ ਖਾਤੇ ਦਾ ਸੰਚਾਲਨ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਸੌਖਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬੈਂਕ ਜਾ ਕੇ ਜਾਂ A.T.M. ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਪੈਸੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪੈਸੇ ਕਢਵਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੰਟਰਨੈੱਟ ਅਤੇ ਮੋਬਾਈਲ ਬੈਂਕਿੰਗ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਅਜਿਹਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅੱਜ ਅਸੀਂ ਬੈਂਕ ਦੀ ਕਿਸੇ ਬ੍ਰਾਂਚ ਵਿੱਚੋਂ ਪੈਸੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਅਤੇ ਕਢਵਾਉਣ ਦੇ ਮੁੱਢਲੇ ਪਗਾਂ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣਾ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚੈੱਕ ਜਾਂ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੋਈ ਚੈੱਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਬੈਂਕ 'ਕਲੀਅਰਿੰਗ ਸਿਸਟਮ, ਰਾਹੀਂ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਲਈ ਬੈਂਕ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ ਨੂੰ ਭਰਨਾ : ਸਵੇਤਾ ਆਪਣੇ ਪੁੱਤਰ ਆਰਿਅਨ ਜੋ ਕਿ ਅੱਠਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ, ਨਾਲ ਕੁੱਝ ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਲਈ ਬੈਂਕ ਗਈ। ਆਰਿਅਨ ਬਹੁਤ ਉਤਸੁਕ ਸੀ ਕਿਉਂਕਿ ਉਹ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਬੈਂਕ ਜਾ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਬੈਂਕ ਪਹੁੰਚਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਵੇਤਾ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਬੈਂਕ ਪਰਚੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ ਅਤੇ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਵਿਖਾਈਆ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੱਤੀ।



ਚੱਕਰ	ਲਗਾਇਆ ਅੰਕ ਵੇਰਵੇ
1.	ਬੈਂਕ ਦੀ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਨਾਂ
2.	ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਦੀ ਮਿਤੀ
3.	ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਏ ਗਏ (ਖਾਤੇ ਦੀ ਕਿਸਮ)
4.	ਖਾਤਾਧਾਰਕ ਦਾ ਨਾਂ
5.	ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਰਕਮ (ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ)
6.	ਖਾਤਾ ਨੰਬਰ (A/c No.)
7.	ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਰਕਮ (ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ)
8.	ਜਮਾਂ ਕਰਤਾ ਦੇ ਦਸਤਖ਼ਤ
9.	ਨਗਦ/ਚੈੱਕ (ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ)
10.	ਸੰਪਰਦਾ (ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਕਿਸਮਾਂ)

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਉਸ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ (ਡਿਪਾਜ਼ਿਟ ਸਲਿੱਪ) ਦਿਖਾਈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ (ਡਿਪਾਜ਼ਿਟ ਸਲਿੱਪ) ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਜਿਹਾ ਟੁਕੜਾ ਹੈ। ਜੋ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਜਮਾਂ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਬੈਂਕ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ ਦੇ ਦੋ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ—ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਬੈਂਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਲਈ ਹੈ ਅਤੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਜਮਾਂ ਕਰਤਾ ਦੇ ਰਿਕਾਰਡ ਲਈ ਹੈ।

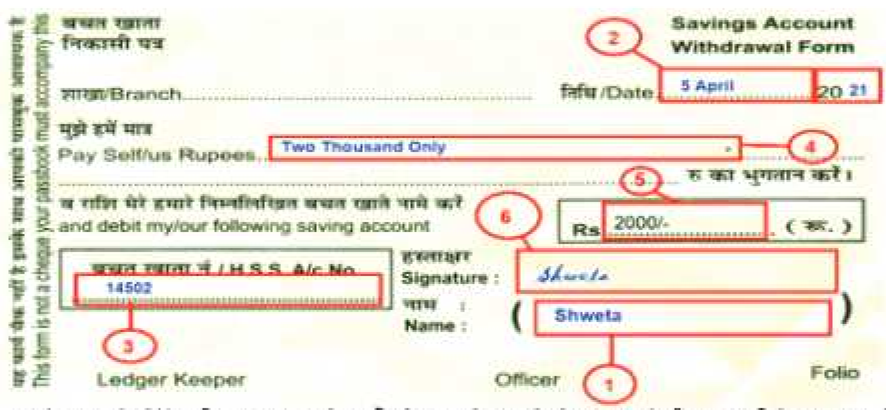
ਆਓ ਬੈਂਕ ਕਾਪੀ ਤੇ ਭਰੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵੇਰਵਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ, ਜਿਆਦਾਤਰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ : ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਅਧਿਕਾਰ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਦੇ ਵੀ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜਮਾਂ ਪਰਚੀ (ਡਿਪਾਜ਼ਿਟ ਸਲਿੱਪ) ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕੈਸ਼ੀਅਰ ਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪੈਸੇ ਕਿਸ ਬੈਂਕ ਖਾਤਾ ਨੰਬਰ ਵਿੱਚ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਉਣੇ ਹਨ।

ਪੈਸੇ ਕਢਵਾਉਣਾ—ਪੈਸੇ ਕਢਵਾਉਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕੈਸ਼ ਲਈ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਇੱਕ ਚੈੱਕ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਮਿਤੀ ਪਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਦਸਤਖਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਚੈੱਕ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਬੈਂਕ ਟੈਲਰ ਨੂੰ ਦੇਵਾਂਗੇ, ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਨਗਦ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇਵੇਗਾ।

ਬੈਂਕ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀਆਂ—ਬੈਂਕ ਜਮਾਂ ਪਰਚੀਆਂ (ਡਿਪਾਜ਼ਿਟ ਸਲਿੱਪ) ਬਾਰੇ ਦੱਸਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਉਸਨੇ ਆਪਣੀ ਬੈਂਕ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਦਿਖਾਈ।



ਇੱਕ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਦਸਤਾਵੇਜ਼ ਹੈ ਜਿਸ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਬੈਂਕ ਤੋ ਪੈਸੇਂ ਕਢਵਾਉਣ ਲਈ ਮਿਤੀ, ਖਾਤਾ ਨੰਬਰ ਅਤੇ ਪੈਸੇ ਦੀ ਰਕਮ ਲਿਖਦਾ ਹੈ।

ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ 'ਤੇ ਕੁੱਝ ਪਾਬੰਦੀਆਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ।

- ਇਹ ਸਲਿੱਪ ਸਿਰਫ਼ ਖਾਤਾ ਧਾਰਕ ਆਪਣੀ ਰਕਮ ਕਢਵਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਇਹ ਸਲਿੱਪ/ਫਾਰਮ ਦੂਜਿਆਂ ਨੂੰ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨ ਲਈ ਨਹੀਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਚੱਕਰ ਲਗਾਇਆ ਅੰਕ	ਵੇਰਵੇ
1.	ਖਾਤਾਧਾਰਕ ਦਾ ਨਾਂ
2.	ਨਿਕਾਸੀ ਦੀ ਮਿਤੀ
3.	ਖਾਤਾ ਨੰਬਰ
4.	ਨਿਕਾਸੀ ਰਕਮ (ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ)
5.	ਨਿਕਾਸੀ ਰਕਮ (ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ)
6.	ਖਾਤਾ ਧਾਰਕ ਦੇ ਦਸਤਖ਼ਤ

ਅਸੀਂ ATM ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪੈਸੇ ਕਢਵਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪੈਸੇ ਕਢਵਾਉਣ ਲਈ, ਆਪਣਾ ਏਟੀਐੱਮ ਕਾਰਡ ਮਸ਼ੀਨ ਵਿੱਚ ਪਾਓ, ਆਪਣਾ ਪਿੰਨ (ਪਰਸਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਫਿਕੇਸ਼ਨ ਨੰਬਰ) ਦਰਜ਼ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਨਕਦ ਰਾਸ਼ੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਦੱਸੋ। ਸ਼ਵੇਤਾ ਨੇ ਅੱਗੇ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਅੱਜਕੱਲ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਲੋਕ ਮੋਬਾਈਲ ਫੋਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਇਸ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਖਾਤੇ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਫੰਡ ਟ੍ਰਾਂਸਫਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪਾਸ ਬੁੱਕ — ਇਸ ਰਾਹੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਜਮ੍ਹਾ ਅਤੇ ਕਢਵਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਐਂਟਰੀਆਂ ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਪਾਸਬੁੱਕ "ਉੱਤੇ ਛਾਪੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਖਾਤਾ ਖੋਲ੍ਹਣ ਦੇ ਸਮੇਂ ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।"

ਅਭਿਆਸ 7.9

ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਖਾਤਾ ਦੋ ਨਾਂਵਾਂ ਵਿੱਚ ਖੋਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ, ਉਸ ਨੂੰ ਖਾਤਾ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
   a) ਦੋ ਖਾਤੇ b) ਦੋਹਰਾ ਖਾਤਾ
   c) ਡੂਓ ਖਾਤਾ d) ਸਾਂਝਾ ਖਾਤਾ
2. ਕਿਸੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਪੈਸੇ ਕਢਵਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ .... ਪਰਚੀ ਭਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
   a) ਪਾਸ ਬੁੱਕ b) ਚੈੱਕ
   c) ਨਿਕਾਸੀ d) ਜਮ੍ਹਾਂ
3. ATM ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ....
   a) ਆਟੋਮੇਟਿਡ ਟੈਲਰ ਮਸ਼ੀਨ b) ਆਟੋ ਟੈਲਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ
   c) ਆਟੋ ਟੈਲਰ ਮਸ਼ੀਨ d)ਆਟੋਮੇਟਿਡ ਟੈਲਿੰਗ ਮਸ਼ੀਨ
4. PIN ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ.............
   a) ਪਰਸਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਨੰਬਰ b)ਪਰਸਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਫਿਕੇਸ਼ਨ ਨੰਬਰ
   c) ਪਰਸਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਨੰਬਰ d)ਪਰਸਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਫਿਕੇਸ਼ਨ ਨੰਬਰ
5. ਕਿਸੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਪੈਸੇ ਜਮ੍ਹਾ ਕਰਵਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ .... ਪਰਚੀ ਭਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
   a) ਪਾਸ ਬੁੱਕ b) ਚੈੱਕ
   c) ਨਿਕਾਸੀ d) ਜਮ੍ਹਾਂ
6. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਖਾਤੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਲੇਣ-ਦੇਣ (ਟਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ) ਬਾਰੇ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।
   a) ਜਮ੍ਹਾ ਪਰਚੀ b) ਪਾਸ ਬੁੱਕ
   c) ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ d) ਚੈੱਕ

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।
- ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।
- ਕਟੌਤੀ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅਤੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦੇ।
- ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਅਤੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦੇ।
- ਸਧਾਰਨ ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦੇ।
- ਬੈਂਕ ਪਾਸ ਬੁੱਕ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਜਮਾਂ ਅਤੇ ਨਿਕਾਸੀ ਪਰਚੀ ਨੂੰ ਭਰਨ ਦੇ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. (i) 1 : 3 (ii) 1 : 1000 (iii) 15 : 1 (iv) 12 : 1 (v) 1:5 (vi) 1:40
2. 10 3. 26 4. 30%
5. (i) $33\frac{1}{3}\%$ (ii) 80% (iii) 50% (iv) 40% (v) 125% (vi) 20%
6. ₹2500 7. 6 ਮੈਚ 8. (i) ਕੈਰਮ = 24 (ii) ਸ਼ਤਰੰਜ = 9, ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ = 27
9. (i) b (ii) a (iii) a (iv) d (v) c

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. ₹80, $41\frac{2}{3}\%$ 2. ₹113, 14.29% 3. ₹32, ₹188 4. 5%
5. ₹624 6. ₹900 7. ਕਟੌਤੀ = ₹32, ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = ₹368
8. ₹255
9. (i) b (ii) a (iii) b (iv) b (v) c

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. ₹480 2. ₹32

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. ₹39420 2. 12% 3. ₹24000 4. ₹800
5. ₹462
6. (i) b (ii) c (iii) b (iv) d

ਅਭਿਆਸ 7.5

1. 2 ਸਾਲ 2. 50% 3. ₹1500, ₹16500

ਅਭਿਆਸ 7.6

1. ₹2940 2. ₹728
3. (i) b (ii) b (iii) d (iv) c (v) b

ਅਭਿਆਸ 7.7

1. ₹ 8,10,000; ₹1,90,000 2. ₹705600 3. 14440
4. ₹16128 5. 156060

ਅਭਿਆਸ 7.8

1. c 2. b 3. d 4. c 5. c
6. a

ਅਭਿਆਸ 7.9

1. d 2. c 3. a 4. b 5. d
6. b

ਅਧਿਆਇ 8

ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਤਤਸਮਕ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਦ ਅਤੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਚਲ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ।*
- *ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਬਾਰੇ।*
- *ਇਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਬਹੁਪਦ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ, ਘਟਾਉਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੁਆਰਾ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਬਾਰੇ।*
- *ਤਤਸਮਕਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਬਾਰੇ।*

8.1 ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮਤਲਬ (ਭੂਮਿਕਾ) Meaning of expressions (Introduction)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ (ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਵਿਅੰਜਕਾਂ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ, ਚਲਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਦੇ ਹਨ। $2x + 7$, $7xy - 8$, $\sqrt{x+5}$, $y + 8$, $x^2 + 7$ ਆਦਿ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਹਨ।

ਵਿਅੰਜਕ $2x + 7$ ਨੂੰ ਚਲ x ਅਤੇ ਅਚਲ 2, 7 ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਕ $7xy - 8$ ਨੂੰ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਤੇ ਅਚਲ 7, 8 ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਵੀ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

8.1.1 ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ (Value of an Algebraic Expression)

ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ ਵਿੱਚ ਚਲ ਜਾਂ ਅਚਲ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਵੀ ਮੁੱਲ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ, ਵਿਅੰਜਕ $2x + 7$ ਲਈ ਜੇਕਰ $x = 2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11$ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $2x + 7 = 2 \times 0 + 7 = 7$ ਹੋਵੇਗਾ ਆਦਿ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ਵੱਖਰੇ-ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $2x + 7$ ਦੇ ਵੱਖਰੇ-ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

8.1.2 ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਕ (x ਚਲ ਵਿੱਚ) (Number line and an expression)

ਮੰਨ ਲਉ ਵਿਅੰਜਕ $x + 3$. ਹੈ। ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਚਲ x, ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਮੰਨਣਾ ਹੈ, ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤੀ X ਹੈ।

X, ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x + 3$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ A, X ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ 3 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x-2$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ, x ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 2 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਹੁਣ $3x+2$ (ਜਿੱਥੇ x ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ 3x ਦੀ ਸਥਿਤੀ (ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ x) B 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ $3x+2$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ C, B ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ 2 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ।

8.2 ਪਦ, ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕ (Terms, Factors and Coefficients)

ਪਦ ਇਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਚਲ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਚਲਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਵਿਅੰਜਕ ਬਣਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 4, x, 4x ਅਤੇ 4xy ਪਦ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਪਦ 4x, 3y ਅਤੇ 8 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $4x+3y+8$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਦ 4x, 4 ਅਤੇ x ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ 4 ਅਤੇ *x*, 4x ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ। ਜਦਕਿ ਪਦ *3y*, ਆਪਣੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 3 ਅਤੇ y ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਪਦ 8 ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 8 ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਵਿਅੰਜਕ $9xy-3x$ ਦੇ ਦੋ ਪਦਾਂ 9xy ਅਤੇ $-3x$ ਹੈ। ਪਦ 9xyਗੁਣਨਖੰਡ 9, x ਅਤੇ y ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਪਦ $-3x$, ਗੁਣਨਖੰਡ -3 ਅਤੇ x ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪਦ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਗੁਣਾਂਕ ਜਾਂ ਗੁਣਾਂਕ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਪਦ 9xy ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 9 ਹੈ ਅਤੇ ਪਦ $-3x$ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -3 ਹੈ।

8.3 ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ, ਤਿੰਨ ਪਦੀ (Monomials, Binomials, Trinomials)

ਉਹ ਵਿਅੰਜਕ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਦ ਹੋਣ, ਜਿਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੋਣ ਅਤੇ ਘਾਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ, ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ :

$3x+2y$, x^2+3x+5, $ax+by+cz+d$ ਆਦਿ।

- ਉਹ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਦ ਹੋਵੇ, ਨੂੰ **ਇੱਕ-ਪਦੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ 4, 3x, 4y, 7xy, $8x^2y$, $-4xy^2$ ਆਦਿ।
- ਉਹ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਦੋ ਪਦ ਹੋਣ, ਨੂੰ **ਦੋ-ਪਦੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ : $3x+4y$, $x-2y$, $ax+by$ ਆਦਿ।
- ਉਹ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹੋਣ, ਨੂੰ **ਤਿੰਨ ਪਦੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ x^2-3x+5, $ax+by+cz$ ਆਦਿ।

8.4 ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨ ਪਦ (Like and Unlike Terms)

ਜੇਕਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਚਲ ਅਤੇ ਘਾਤਾਂ ਸਮਾਨ (ਬਰਾਬਰ) ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਪਦ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾਂਕ ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ **3y, –4y,** $\frac{21}{8}y$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $3t^2$ ਅਤੇ $-11t^2$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ ਅਤੇ 4ab, $-21ab$ ਅਤੇ 11ab ਵੀ ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ।

ਜਿਹੜੇ ਪਦ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਉਹ ਅਸਮਾਨ ਪਦ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ 7x ਅਤੇ 4y ਅਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਚਲ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $7x^2$ ਅਤੇ 4x ਵੀ ਅਸਮਾਨ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵੱਖਰੀਆਂ ਹਨ।

8.5 ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਓ (Addition and Subtraction of Algebraic Expressions)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਿਆ ਅਤੇ ਘਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੋੜਫਲ ਲਈ ਜੋੜੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ ਜੋੜ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ ਉਸਦੇ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਰਗਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ -4 ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ $+4$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $5y$ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ $-5y$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। $-3x^2$ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ $3x^2$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਿਹੜੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਘਟਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਉਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੋਂ ਇਹ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਕਿਰਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੇਖੋ।

ਉਦਾਹਰਨ 8.1. **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :**

(i) $x + y - 2z$ ਅਤੇ $2x - 2y + 3z$

(ii) $2x + 3y - 4z$ ਅਤੇ $x + y - 4$

(iii) $7xy + 5yz - 3zx$, $4xy + 7zx$ ਅਤੇ $3yz + 4$

ਹੱਲ : ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

(i)
$$\begin{array}{rrr} x & +\ y & -\ 2z \\ 2x & -\ 2y & +\ 3z \\ \hline 3x & -\ y & +\ z \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rrrr} 2x & +\ 3y & -\ 4z & \\ x & +\ y & & -\ 4 \\ \hline 3x & +\ 4y & -\ 4z & -\ 4 \end{array}$$

ਇਸ ਵਿੱਚ $-4z$ ਅਤੇ -4 ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮਾਨ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii)
$$\begin{array}{rrrr} 7xy & +\ 5yz & -\ 3zx & \\ 4xy & & +\ 7zx & \\ & 3yz & & +\ 4 \\ \hline 11xy & +\ 8yz & +\ 4zx & +\ 4 \end{array}$$

ਉਦਾਹਰਨ 8.2. **ਘਟਾਓ**

(i) $8a^2 - 3b^2 - 8ab + 9a - 7b$ ਵਿੱਚੋਂ $5a^2 - 3ab + 4b - 7$

(ii) $8x + 5z - x^2 - y^2 + 7$ ਵਿੱਚੋਂ $x + 3y - 4z + x^2 - y^2$

ਹੱਲ : ਜੋੜ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ ਘਟਾਓ ਕਰਾਂਗੇ।

(i)
$$\begin{array}{rrrrrr} 8a^2 & -\ 3b^2 & -\ 8ab & +\ 9a & -\ 7b & \\ 5a^2 & & -\ 3ab & & +\ 4b & -\ 7 \\ - & & + & & - & + \\ \hline 3a^2 & -\ 3b^2 & -\ 5ab & +\ 9a & -\ 11b & +\ 7 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rrrrrr} 8x & +\ 5z & -\ x^2 & -\ y^2 & +\ 7 & \\ x & -\ 4z & +\ x^2 & -\ y^2 & & +\ 3y \\ - & + & - & + & & - \\ \hline 7x & +\ 9z & -\ 2x^2 & & +7 & -\ 3y \end{array}$$

ਉਦਾਹਰਨ 8.3. $2x - 3y + 4z - 2$ **ਅਤੇ** $-3x + 8y + 12z - 4$ **ਦੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚੋਂ** $x + 3y - 5z + 7$ **ਨੂੰ ਘਟਾਓ।**

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ $2x - 3y + 4z - 2$ ਅਤੇ $-3x + 8y + 12z - 4$, ਨੂੰ ਜੋੜਾਂਗੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜੋੜਦੇ ਹਨ।

$$\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z - 2 \\ -3x + 8y + 12z - 4 \\ \hline -x + 5y + 16z - 6 \\ \hline \end{array}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਾਓ ਕਰਾਂਗੇ $-x + 5y + 16z - 6$ ਅਤੇ $x + 3y - 5z + 7$

$$\begin{array}{r} -x + 5y + 16z - 6 \\ x + 3y - 5z + 7 \\ - \quad - \quad + \quad - \\ \hline -2x + 2y + 21z - 13 \\ \hline \end{array}$$

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਇੱਕ ਚਲ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਜ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਲਿਖੋ।
2. ਬਣਾਓ :
   (i) x ਚਲ ਲੈ ਕੇ 3 ਬਹੁਪਦ ਬਣਾਓ :
   (ii) x ਅਤੇ y ਚਲ ਲੈ ਕੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ 3 ਬਹੁਪਦ ਬਣਾਓ।
   (iii) x ਅਤੇ y ਚਲ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਪਦ ਦੇ 3 ਬਹੁਪਦ ਬਣਾਓ।
   (iv) ਚਾਰ ਜਾਂ ਚਾਰ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਦਾਂ ਨਾਲ 3 ਬਹੁਪਦ ਬਣਾਓ।
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਦੋ ਹੋਰ ਸਮਾਨ ਪਦ ਲਿਖੋ ।
   (i) $7x$ (ii) $3ab$ (iii) $7x^2y$ (iv) $2lm$
4. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।
   (i) $5xy - 3zy$ (ii) $2 + 2x - 3x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4z^2 + 3xy$
   (iv) $ab + bc + abc + 7$ (v) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + 2xz$ (vi) $0.3a - 0.5ab$
   (vii) $\frac{xy}{2} + 7x + \frac{3}{2}y$ (viii) $0.4a - 0.6ab + 3b^2$ (ix) $3xy^2 + 5xyz - 6y^2$
5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ, ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰੋ। ਕਿਹੜਾ ਬਹੁਪਦ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?
   (i) $3x$ (ii) y (iii) 4
   (iv) $3x - 2y$ (v) $\frac{y}{2} + z$ (vi) $x + y + 2z$
   (vii) $2x - y + 7$ (viii) $a + b + c$ (ix) $x - y + 2z$
   (x) $14x^2yz$ (xi) $x^2 - y^2$ (xii) $a^2 + b^2 + c^2$
6. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ।
   (i) $ab + a^2b - 3abc$ ਅਤੇ $4abc - 7a^2b + 2ab + 3$
   (ii) $x + y + 3z - 2xyz$ ਅਤੇ $-2x + 3y + 4z - 8$
   (iii) $x^2 - y^2$, $y^2 - z^2$, $z^2 - x^2$
   (iv) $x - y$, $-y + z$, $z - x$
   (v) $2x^2y^2 - 3xy + 4$ ਅਤੇ $5 + 7xy - 3x^2y^2$
   (vi) $x^2 + y^2 - z^2$, $x^2 - y^2 + z^2$, $-x^2 + y^2 + z^2$

7. ਘਟਾਓ :

(i) $13x - 7xy - 6y + 8$ ਵਿੱਚੋਂ $5x - 3xy + 7y + 18$

(ii) $9\ell m + 7mn + 13n\ell$ ਵਿੱਚੋਂ $2\ell m + 3mn - 8n\ell$

(iii) $3ab - 2bc - 4abc$ ਵਿੱਚੋਂ $ab + bc + ca + abc$

(iv) $4x - 7xyz$ ਵਿੱਚੋਂ $2x + 3y + 4z + 3xyz$

(v) $0.7x + 0.8y - 9xyz$ ਵਿੱਚੋਂ $0.3x + 0.2y + 2xyz$

(vi) $2ab - 2bc + 2cd - 2abc$ ਵਿੱਚੋਂ $ab + bc - cd + abc$

8. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚੋਂ ਤੀਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

(i) $2ab + bc - cd$, $abc + ab - 2bc$, $-2bc + 3ab$

(ii) $2x + 3y - 2z$, $x - y + 3xyz$, $4x + 3y - 4z + 7xyz$

(iii) $0.2x + 0.3y + 0.4xy$, $0.8x + 0.7y$, $x + y - 0.6xy$

(iv) $7xy + 3x + 2y - 3z$, $x + y + 2z$, $4xy - x - y + 4z$

(v) $0.3xy + 0.2yz$, $0.4xy + 0.3zx$, $0.2xy + 0.2yz$

(vi) $0.4xyz + 0.3xy^2$, $0.7xyz + 0.2xy^2$, $xyz + 0.4xy^2$

9. **ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ $x^2 - 5x + 6$, $3 - 3x^2 + 7x$ ਅਤੇ $11x^2 + 8x - 11$ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

10. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) $7y-5$ ਵਿੱਚ y ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਦੱਸੋ।

(a) 7 (b) -5 (c) 5 (d) 12

(ii) ਕਿਹੜਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਹੈ ?

(a) $7x + 5$ (b) $x + y + z$ (c) $3x^3$ (d) $5x^2 - 7x + 6$

(iii) ਦੋ ਪਦੀ ਪਹਿਚਾਣੋ।

(a) $5x + 2$ (b) $x + x + 1$ (c) $6z$ (d) $\sqrt{t}$

(iv) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੱਸੋ।

(a) $5xy-3zy$ (b) $2x-y+7$ (c) $x-y+2z+4$ (d) x^3+3

(v) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵਿਅੰਜਕ ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ ?

(a) $7x$ ਅਤੇ $7y$ (b) $3x$ ਅਤੇ $3x^2$ (c) x^2 ਅਤੇ $3x^2$ (d) $x^3 + 3$

(vi) $2a - b$ ਅਤੇ $a - 2b$ ਦਾ ਜੋੜ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) $a - b$ (b) $2a - 2b$ (c) $3a - 3b$ (d) $a + b$

(vii) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ?

(a) $x + 3$ (b) $2x + 3$ (c) $2x - 3$ (d) $x^2 + 3$

(viii) ਵਿਅੰਜਕ $3x - 5$ .... ਹੈ।

(a) ਇੱਕ ਪਦੀ (b) ਦੋ ਪਦੀ (c) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (d) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(ix) $-5x + 7xy$ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਦ ਕਿਹੜੇ ਹਨ ?

(a) -5 ਅਤੇ 7 (b) $-5x$ ਅਤੇ $7x$ (c) $-5x$ ਅਤੇ $7xy$ (d) $-5x$ ਅਤੇ $7y$

(x) $ab - bc, bc - ac, ac - ab$ ਨੂੰ ਜੋੜੋ।

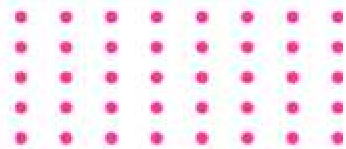
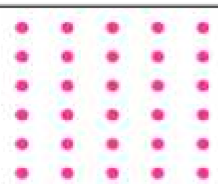
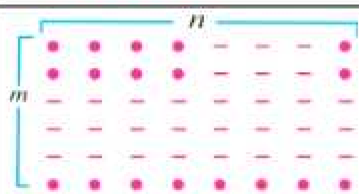
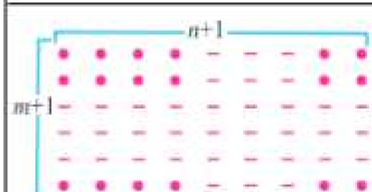
(a) 0 (b) $ab + bc + ac$ (c) abc (d) $a + b + c$

(xi) ਵਿਅੰਜਕ $3x-5$ ਦਾ ਮੁੱਲ $x = 5$ 'ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20

8.6 ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ : (Multiplication of Algebraic Expression)

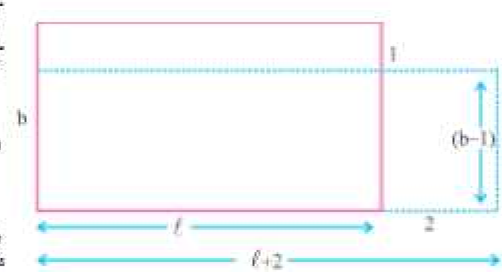
(i) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

ਪੈਟਰਨ	ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ
	5	8	5×8 (ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।
	6	5	6×5
	m	n	$m \times n$ ਇੱਥੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ m ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ n ਹੈ।
	$m + 1$	$n + 1$	$(m + 1)(n + 1)$ ਇੱਥੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(m + 1)$ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(n + 1)$ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਆਇਤ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕੀ $\ell \times b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ℓ ਲੰਬਾਈ b ਚੌੜਾਈ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 2 ਇਕਾਈ ਵਧਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ, ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 1 ਇਕਾਈ ਘੱਟ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੀਂ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $(\ell + 2) \times (b - 1)$ ਹੋਵੇਗਾ।



(iii) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਕਾਪੀ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ p

ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਾਪੀਆ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ = q

ਸਾਨੂੰ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ = ₹ $(p \times q)$

ਮੰਨ ਲਵੋ, ਇੱਕ ਕਾਪੀ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 1 ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਪੀਆ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ 2 ਵੱਧ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਕਾਪੀ ਦਾ ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ = ₹ $(p + 1)$

ਸਮਾਨ ਕਾਪੀਆ ਦੀ ਨਵੀਂ ਜ਼ਰੂਰਤ = $q + 2$

ਤਾਂ ਹੁਣ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ = ₹ $(p + 1)(q + 2)$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ, ਪਰ ਇੱਥੇ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਦੇ ਹਾਂ।

8.7 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ (Multiplying a monomial by a monomial)

8.7.1 ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੁਣਾ, ਵਾਰ-ਵਾਰ ਜੋੜ ਦਾ ਰੂਪ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ 4×3 ਦਾ ਮਤਲਬ 4 ਵਾਰ 3

ਭਾਵ $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $4 \times (5y) = 5y + 5y + 5y + 5y = 20y$

ਅਤੇ $5 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x + 3x = 15x$

ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) $y \times 3x = y \times 3 \times x = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 4y = 5 \times x \times 4 \times y = 5 \times 4 \times x \times y = 20xy$

(iii) $3x \times (-2y) = 3 \times x \times (-2) \times y = 3 \times (-2) \times x \times y = -6xy$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਵੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

(iv) $5x \times 3x^2 = 5 \times x \times 3 \times x^2$

$= (5 \times 3) \times (x \times x^2) = 15 \times x^3 = 15x^3$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ,ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਲਈ $(a^m \times a^n = a^{m+n})$

(v) $5x^3 \times (-4x^4yz) = (5 \times -4) \times (x^3 \times x^4) \times (yz)$

$= -20\, x^7yz$

8.7.2 ਤਿੰਨ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(i) $2x \times 3y \times 4z = (2x \times 3y) \times 4z = 6xy \times 4z = 24xyz$

(ii) $2xy \times 5x^2y^2 \times 6xy^2 = (2xy \times 5x^2y^2) \times 6xy^2$

$= 10x^3y^3 \times 6xy^2$

$= (10 \times 6)\, x^3y^3 \times xy^2$

$= 60\, (x^3 \times x) \times (y^3 \times y^2) = 60x^4y^5$

ਇੱਥੋਂ ਇਹ ਸੱਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਤੀਸਰੀ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪੂਰਨ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ : ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹਰ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਉੱਤਰ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 8.4. ਇੱਕ ਆਇਤ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਖੇਤਰਫਲ
3x	**5y**	
4x	**2x**	
2xy	**3x**	

ਹੱਲ :

ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਖੇਤਰਫਲ
3x	5y	$3x \times 5y = (3 \times 5) \times x \times y = 15xy$
4x	2x	$4x \times 2x = (4 \times 2) \times (x \times x) = 8x^2$
2xy	3x	$2xy \times 3x = (2 \times 3) \times (x \times x) \times y = 6x^2y$

ਉਦਾਹਰਨ 8.5. ਘਣਾਵ (ਆਇਤਕਾਰ ਬਕਸਾ) ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਹੈ।

(i) 2x, 3y, 4z

(ii) 2ax, 3by, 7cz

(iii) 2pq, 3qr, 4rp

ਹੱਲ : ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ $= l \times b \times h$

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਕਾਰ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

(i) $2x \times 3y \times 4z = (2 \times 3 \times 4) \times (x) \times (y) \times (z) = 24xyz$

(ii) $2ax \times 3by \times 7cz = (2 \times 3 \times 7) \times (ax) \times (by) \times (cz) = 42abcxyz$

(iii) $2pq \times 3qr \times 4rp = (2 \times 3 \times 4) \times (p \times p) \times (q \times q) \times (r \times r) = 24p^2q^2r^2$

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. **(i)** ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ....

   (ii) ਤਿੰਨ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ....

2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) 8x, 3y (ii) 4, 2x (iii) –4p, 3q (iv) 8p, –3pq

   (v) 3xy, 0 (vi) p^2, 2pq (vii) 2p, 3pr (viii) r, 2p

3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਆਇਤਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (x, y), (2ℓ, 4m), (10m, 6n), (3mn, 4n), ($9a^2b$, 13abc)

   (2ax, 3pr), (3mn, 4np), (2p, pqr), ($3x^3y$, $7xy^2$)

4. ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਪਹਿਲੀ ਇਕ ਪਦੀ ⟶ ਦੂਸਰੀ ਇਕ ਪਦੀ ↓	$2x$	$-5y$	$2x^2$	$-3xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$-2y$						
$3x$						
y^2						
$-4xy$						
$2x^2y^2$						

5. ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $3x, 4x^2, -7x^3$ (ii) $2zx, 3y, 4z$ (iii) $\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{c}{4}$

(iv) $ab, abc, abcd$ (v) $\frac{x^2y}{3}, 9y^2z, -8z^2x$ (vi) $-3pq, 4p^2x^2$

6. ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਕਸਿਆਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ।

(i) x, y, z (ii) $2x, 3y, 3z$ (iii) $2a, 7b, c$

(iv) $4l, 5m, 6n$ (v) ab^2, bc^2, ca^2 (vi) $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}$

7. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਇਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

(a) ਇੱਕ ਪਦੀ (b) ਦੋ ਪਦੀ (c) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (d) ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ

(ii) ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

(a) ਇੱਕ ਪਦੀ (b) ਦੋ ਪਦੀ (c) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (d) ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ

(iii) $3x$ ਅਤੇ $5y$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $3xy$ (b) $15x$ (c) $15xy$ (d) $15y$

(iv) $3a$ ਅਤੇ $7ab$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $21a^2+b$ (b) $15a+21ab$ (c) $21a^2b$ (d) $21ab$

(v) ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $2ab$ ਅਤੇ $3bc$ ਹੋਣ।

(a) $6abc$ (b) $6ab^2c$ (c) $2ab+3bc$ (d) $6+ab+bc$

(vi) ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ a^2b, b^2c ਅਤੇ c^2a.

(a) abc (b) $a^2b^2c^2$ (c) $a^3b^3c^3$ (d) $a^2b + b^2c + c^2a$

8.8 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ (Multiplying a monomial by a polynomial)

8.8.1 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀ $4x$ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ $(5x + 2y)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

ਭਾਵ $4x \times (5x + 2y)$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਗੁਣਾ ਦੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $4x \times (5x + 2y) = (4x \times 5x) + (4x \times 2y)$

$= 20x^2 + 8xy$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਪਦੀ ਅਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦੋ ਪਦੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(-4x) \times (-5y + 2x) = (-4x \times -5y) + (-4x \times 2x)$

$= 20xy - 8x^2$

ਨੋਟ— ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਦੋ ਪਦੀ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਗੁਣਾ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $(a-7b) \times 2b = 2b \times (a-7b)$

$= 2b \times a + 2b \times (-7b) = 2ba - 14b^2$

$= 2ab - 14b^2 \quad [\because ab = ba]$

8.8.2 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

$5a\,(a^2 + 2a + 3)$ ਲਵੋ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਗੁਣਾ ਉੱਪਰ ਜੋੜ ਦੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

$5a\,(a^2 + 2a + 3) = (5a \times a^2) + (5a \times 2a) + (5a \times 3)$

$= 5a^3 + 10a^2 + 15a$

ਉਦਾਹਰਨ 8.6. ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $x\,(x + 3) - 2$ $x = 2$ ਦੇ ਲਈ (ii) $2y\,(3y - 7) - 2\,(y + 4) + 5$, $y = -3$ ਦੇ ਲਈ

ਹੱਲ : (i) $x\,(x + 3) - 2 = x^2 + 3x - 2$

$x = 2$; ਦੇ ਲਈ $= (2)^2 + 3 \times 2 - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$

(ii) $2y\,(3y - 7) - 2\,(y + 4) + 5 = 6y^2 - 14y - 2y - 8 + 5$

$= 6y^2 - 16y - 3$ (ਸਮਾਨ ਪਦ ਇੱਕਠੇ ਕਰੋ)

$y = -3$; ਦੇ ਲਈ $= 6\,(-3)^2 - 16 \times (-3) - 3$

$= 6 \times 9 + 48 - 3$

$= 54 + 48 - 3 = 99$

ਉਦਾਹਰਨ 8.7. ਜੋੜੋ।

(i) $2y\,(5 - y)$ ਅਤੇ $6y^2 + 14y + 7$ ਨੂੰ।

(ii) $3x\,(x^2 + 2x - 5)$ ਅਤੇ $2\,(x^2 + 7x - 2)$ ਨੂੰ।

ਹੱਲ : (i) ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਅੰਜਕ $= 2y\,(5 - y) = 2y \times 5 - 2y \times y = 10y - 2y^2 = -2y^2 + 10y$

ਹੁਣ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$\begin{array}{rrr} -2y^2 & +10y & \\ +6y^2 & +14y & +7 \\ \hline 4y^2 & +24y & +7 \\ \hline \end{array}$$

(ii) ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਅੰਜਕ $= 3x(x^2 + 2x - 5)$ $= 3x \times x^2 + 3x \times 2x + 3x \times (-5)$

$= 3x^3 + 6x^2 - 15x$

ਦੂਸਰਾ ਵਿਅੰਜਕ $= 2(x^2 + 7x - 2)$ $= 2 \times x^2 + 2 \times 7x + 2 \times (-2)$

$= 2x^2 + 14x - 4$

ਹੁਣ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 6x^2 - 15x \\ + 2x^2 + 14x - 4 \\ \hline 3x^3 + 8x^2 - x \quad - 4 \\ \hline \end{array}$$

ਉਦਾਹਰਨ 8.8. **$2pq(3p - 2q)$ ਨੂੰ $3pq(p + q)$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਓ।**

ਹੱਲ :

$3pq(p + q) = 3pq \times p + 3pq \times q$

$= 3p^2q + 3pq^2$ ________(i)

$2pq(3p - 2q) = 2pq \times 3p - 2pq \times 2q$

$= 6p^2q = 4pq^2$ ________(ii)

ਹੁਣ (ii) ਨੂੰ (iii), ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

$$\begin{array}{r} 3p^2q + 3pq^2 \\ 6p^2q - 4pq^2 \\ - \quad + \\ \hline -3p^2q + 7pq^2 \\ \hline \end{array}$$

ਅਭਿਆਸ 8.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $4x, x + y$ (ii) $(x-3y), x^2$ (iii) $(x + y), 7xy$

(iv) $(x^2 - 9x), 4x$ (v) $(a + b), 0$ (vi) $(ab + bc), ab$

2. ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਪਹਿਲਾ ਵਿਅੰਜਕ	ਦੂਸਰਾ ਵਿਅੰਜਕ	ਗੁਣਨਫਲ
(i) $a^2b^2c^2$	$ab + bc + ca$	
(ii) $x + y + z$	$2xy$	
(iii) $p + q - 2r$	$2p$	
(iv) $b + c - a$	abc	

3. ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

(i) a^2 **ਅਤੇ** $(a^2 - b^2)$ (ii) $4xy$ **ਅਤੇ** $-(2x - 3y)$

(iii) a **ਅਤੇ** $(a^2 - 2ab + b^2)$ (iv) $4x^2$ **ਅਤੇ** $(-x^2 - y^2 + 2x)$

4. ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $x(3x + 2) - 7$, ਜੇ $x = 1$ ਅਤੇ $x = \frac{1}{2}$ (iii) $xy(x^2y - xy^2)$, ਜੇ $x = 1, y = 2$

(ii) $y(2y^2 - 7y) + 8$, ਜੇ $y = 0$ ਅਤੇ $y = -1$ (iv) $ab(a + ab + abc)$ ਜੇ $a = 2, b = 1, c = 0$

5. ਜੋੜੋ : (i) $x(x - y)$, $y(y - z)$ ਅਤੇ $z(z - x)$

(ii) $2x(x - y - z)$ ਅਤੇ $2y(z - y - x)$

6. ਘਟਾਓ : (i) $9l(10n - 3m + 2l)$ ਵਿੱਚੋਂ $8l(l - 4m + 5n)$

(ii) $2c(-a + b + c)$ ਵਿੱਚੋਂ $2a(a + b - c) - 2c(a + b - c)$

7. $7x - 1$ ਵਿੱਚੋਂ $x(2x + 7) - 2$ ਅਤੇ $3x(x - 2) + 7$ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

8. ਵਿਅੰਜਕ $2xy(x + y + z)$ ਅਤੇ $3y(x^2 - xy + xz)$ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ $5x(xy + y^2 - 4yz)$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਓ।

9. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :-

(i) pqr ਅਤੇ $p + q + r$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ :

(a) pqr (b) $p^2qr + pq^2r + pqr^2$

(c) $pq + qr + pr$ (d) $p^2qr + pqr^2$

(ii) $x = 2$ ਦੇ ਲਈ $x^2 + x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10

(iii) $y \times y^2 \times y^3 \times y^4$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) y (b) y^6 (c) y^{10} (d) y^{25}

(iv) $xy + 4z + 3x$ ਅਤੇ 0 ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $xy+yz+3x$ (b) xyz (c) 0 (d) $x^2y^2z^2$

8.9 ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ (Multiplying a polynomial by a polynomial)

8.9.1 ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਆਓ, ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ $(3a + 3b)$ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਪਦੀ $(7a + 4b)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$(3a + 3b) \times (7a + 4b) = 3a \times (7a + 4b) + 3b \times (7a + 4b)$

$= (3a \times 7a) + (3a \times 4b) + (3b \times 7a) + (3b \times 4b)$

$= 21a^2 + 12ab + 21ba + 12b^2$ ($\because$ ab ਅਤੇ ba ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਨ ਪਦ ਇਕੱਠੇ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$= 21a^2 + 12ab + 21ab + 12b^2$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $= 21a^2 + 33ab + 12b^2$

ਜਦੋਂ ਦੋ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 8.9. **ਗੁਣਾ ਕਰੋ :**

(i) $(7a + b)$ ਅਤੇ $(a + 3b)$ ਨੂੰ।

(ii) $(2x - y)$ ਅਤੇ $(x + 3y)$ ਨੂੰ।

ਹੱਲ : (i) $(7a + b)(a + 3b)$

$= 7a(a + 3b) + b(a + 3b)$

$= (7a \times a) + (7a \times 3b) + (b \times a) + (b \times 3b)$

$= 7a^2 + 21ab + ba + 3b^2$

$= 7a^2 + 21ab + ab + 3b^2$ [$\because$ ba = ab]

$= 7a^2 + 22ab + 3b^2$

(ii) $(2x - y) \times (x + 3y) = 2x \times (x + 3y) - y\,(x + 3y)$

$= (2x \times x) + (2x \times 3y) - (y \times x) - (y \times 3y)$

$= 2x^2 + 6xy - yx - 3y^2$

$= 2x^2 + 6xy - xy - 3y^2$ [$\because$ yx = xy]

$= 2x^2 + 5xy - 3y^2$ (ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਉਦਾਹਰਨ 8.10. ਗੁਣਾ ਕਰੋ

(i) $(a + 6)$ ਅਤੇ $(b - 8)$ ਨੂੰ।

(ii) $(2a^2 + 3b)$ ਅਤੇ $(5a - 3b)$ ਨੂੰ।

ਹੱਲ : (i) $(a + 6) \times (b - 8) = a \times (b - 8) + 6 \times (b - 8)$

$= ab - 8a + 6b - 48$

(ii) $(2a^2 + 3b) \times (5a - 3b) = 2a^2 \times (5a - 3b) + 3b \times (5a - 3b)$

$= (2a^2 \times 5a) + (2a^2 \times -3b) + (3b \times 5a) + (3b \times -3b)$

$= 10a^3 - 6a^2b + 15ba - 9b^2$

8.8.2 ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਇਸ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਦਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਉਪਰੰਤ 6 ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਪਦ ਬਣਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਕੇ 5 ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੀ ਘੱਟ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$(2x + 3y) \times (x + 2y + 5) = 2x \times (x + 2y + 5) + 3y\,(x + 2y + 5)$ (ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ)

$= 2x^2 + 4xy + 10x + 3yx + 6y^2 + 15y$

$= 2x^2 + 7xy + 10x + 6y^2 + 15y$ (ਕਿਉਂਕਿ xy = yx)

ਉਦਾਹਰਨ 8.11. ਸਰਲ ਕਰੋ $(a + b)\,(2a + 3b - 2c)$

ਹੱਲ : $(a + b)\,(2a + 3b - 2c)$

$= a\,(2a + 3b - 2c) + b\,(2a + 3b - 2c)$

$= 2a^2 + 3ab - 2ac + 2ab + 3b^2 - 2cb$

$= 2a^2 + 5ab + 3b^2 - 2ac - 2cb$

ਅਭਿਆਸ 8.4

1. **ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) $(x + 5)$ ਅਤੇ $(x + 4)$ (ii) $(2x + 3)$ ਅਤੇ $(x - 7)$

(iii) $(x - 8)$ ਅਤੇ $(x + 3)$ (iv) $(2x - 3)$ ਅਤੇ $(x - 4)$

(v) $(2x + 3y)$ ਅਤੇ $(x + 2y)$ (vi) $(x + y)$ ਅਤੇ $(x - 3y)$

(vii) $(p - q)$ ਅਤੇ $(p + 3q)$ (viii) $(2p - 3q)$ ਅਤੇ $(4p - 3q)$

(ix) $(a^2 - b)$ ਅਤੇ $(a + b^2)$ (x) $\left(\frac{7}{2}x + y^2\right)$ ਅਤੇ $\left(x^2 - \frac{2}{7}y\right)$

(xi) $(0.2x + 0.5y)$ ਅਤੇ $(3xy - 5y^2)$ (xii) $(p^2 - q)$ ਅਤੇ $(p^2 + q)$

2. **ਸਰਲ ਕਰੋ।**

(i) $(y - 3)(y + 3) + 28$ (ii) $(a^2 - 3)(b^2 + 5) - 8$

(iii) $(y^2 - 7)(x + y) + 13y$ (iv) $(3x - y)(x + 5y) - 14xy$

(v) $(a + b)(a - b) + (b + c)(b - c) + (c + a)(c - a)$

(vi) $\left(\frac{3}{2}x + y\right)\left(x + \frac{1}{2}y\right) - \left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(x + \frac{3}{2}y\right)$

(vii) $(p - q)(p + q) + (p + q + r)(p + q - r)$

(viii) $(x+y)(x-y + xy) - 3xy(x+y)$ (ix) $(\ell + m)(\ell - m + n) - (\ell^2 + m^2)$

(x) $(2x^2 - 5x + 7)(x - 6) + 42$

8.10 ਤਤਸਮਕ ਕੀ ਹੈ ? (What is an Identity ?)

ਸਮਤਾ $(x-5)(x+1) = x^2 - 4x - 5$ ਲਵੋ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ, ਮੰਨ ਲਵੋ $x = 7$ ਲਈ **ਸਮਤਾ** ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

$x = 7$, ਦੇ ਲਈ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (7 - 5)(7 + 1) = 2 \times 8 = 16$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= (7)^2 - 4 \times 7 - 5 = 49 - 28 - 5$

$= 49 - 33$

$= 16$

ਇਸ ਲਈ $x = 7$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ **ਸਮਤਾ** ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਹੁਣ x ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮੁੱਲ $x = -3$ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮਤਾ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (-3 - 5)(-3 + 1) = -8 \times -2 = 16$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= (-3)^2 - 4(-3) - 5 = 9 + 12 - 5 = 16$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = -3$; ਦੇ ਲਈ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਅਸੀਂ x, ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸਮਤਾ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਸਮਤਾ ਜੋ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $(x-5)(x+1) = x^2 - 4x - 5$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।

ਤਤਸਮਕ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ

ਸਮੀਕਰਨ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ਲਓ

ਅਤੇ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ $x = 1$ ਨਾਲ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (1)^2 - 5 \times 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 7 - 5 = 2$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= 0$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $\neq$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਹੁਣ $x = 2$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (2)^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= 0$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ

ਹੁਣ $x = 3$ ਲਵੋ।

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (3)^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 15 - 15 = 0$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= 0$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਹੁਣ $x = 0$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (0)^2 - 5 \times 0 + 6 = 6$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= 0$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $\neq$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ $x^2-5x+6=0$ ਕੇਵਲ $x = 2$ ਅਤੇ 3 ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਹ x ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਮੁੱਲ ਵਾਸਤੇ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਆਪਣੇ ਚਲ ਦੇ ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਨਾ ਕਿ ਇਹ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

8.11 ਮਿਆਰੀ ਤਤਸਮਕ (Standard Identities)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਤਤਸਮਕਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹਨ। ਇਹ ਤਤਸਮਕ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਉਸੇ ਦੋ ਪਦੀ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(a) ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਅਸੀਂ $(a + b)(a + b)$ ਜਾਂ $(a + b)^2$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਹੁਣ $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 \quad (\because ab = ba)$

ਇਸ ਲਈ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ __________ (I)

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਹ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਤਤਸਮਕ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(b) ਹੁਣ ਅਸੀਂ $(a - b)^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ਇਸ ਲਈ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ __________(II)

(c) ਹੁਣ ਅਸੀਂ $(a + b)(a - b)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਲਈ $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ba - b^2$

ਇਸ ਲਈ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ _________(III)

ਤਤਸਮਕ (I), (II) ਅਤੇ (III) ਨੂੰ **ਮਿਆਰੀ ਤਤਸਮਕ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(d) ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਤਤਸਮਕ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ,

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

ਜਾਂ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ____________(IV)

ਕਿਰਿਆ : ਪੇਪਰ ਕਟਿੰਗ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ।

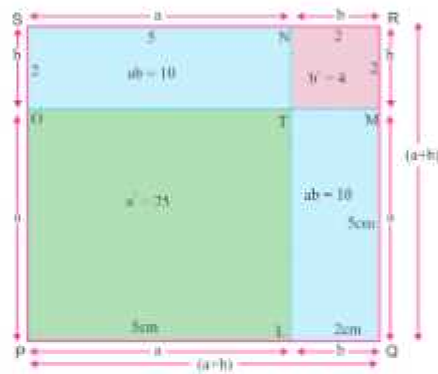
ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਨ: ਰੰਗਦਾਰ ਪੇਪਰ, ਕੈਂਚੀ, ਗੱਤਾ, ਜਿਓਮੈਟਰੀ ਬਾੱਕਸ, ਗੂੰਦ ਆਦਿ।

ਵਿਧੀ : 1. ਰੰਗਦਾਰ ਪੇਪਰ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਕੁੱਝ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਚੁਣੋ।

(i) a = 5cm ਭੁਜਾ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ

(ii) 5cm ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ 2cm ਚੌੜਾਈ ਆਕਾਰ ਦੇ ਦੋ ਆਇਤ

(iii) b = 2cm ਭੁਜਾ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ



2. ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਅਨੁਸਾਰ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਆਇਤ ਨੂੰ ਗੱਤੇ ਤੇ ਚਿਪਕਾਓ

3. ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦਾਂ ਹਾਂ ਕਿ

ਵਰਗ PQRS ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਵਰਗ PLTO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= a \times a = a^2$

2 ਆਇਤਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2 \times a \times b = 2ab$

ਵਰਗ MTNR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= b \times b = b^2$

ਸਾਰੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= a^2 + 2ab + b^2$

ਵਰਗ PQRS ਦੀ ਭੁਜਾ $= a+b$

ਵਰਗ PQRS ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (a+b)(a+b) = (a+b)^2$

$\therefore$ ਇਸ ਲਈ ਵਰਗ PQRS ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$\therefore \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ਨਿਰੀਖਣ : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਪ੍ਰ.1. $(a+b)^2$ ਦਾ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਲਿਖੋ।

ਉੱਤਰ- $a^2 + 2ab + b^2$

ਪ੍ਰ.2. $(3x+2y)^2$ ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ਦੀ ਵਰਤੋ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਉੱਤਰ- $9x^2 + 12xy + 4y^2$

ਪ੍ਰ.3. 101^2 ਦਾ ਤਤਸਮਕ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ਦੀ ਵਰਤੋ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ- 10201

8.12 ਤਤਸਮਕ ਦੇ ਉਪਯੋਗ (Applying Identities)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਹੀ ਅਸਾਨ ਅਤੇ ਵਧੀਆ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 8.12. ਤਤਸਮਕ (I) ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $(x + 2y)^2$ (ii) $(107)^2$ (iii) $(2x + 2y)^2$ (iv) $(10.1)^2$

ਹੱਲ : (i) $(x + 2y)^2 = (x)^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2$ $[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= x^2 + 4xy + 4y^2$

(ii) $(107)^2 = (100 + 7)^2 = (100)^2 + 2 \times 100 \times 7 + (7)^2$ $[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= 10000 + 1400 + 49$

$= 11449$

(iii) $(2x + 2y)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x)(2y) + (2y)^2$ $[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= 4x^2 + 8xy + 4y^2$

(iv) $(10.1)^2 = (10+0.1)^2 = (10)^2 + 2 \times 10 \times 0.1 + (0.1)^2$ $[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= 100 + 2 + 0.01$

$= 102.01$

ਨੋਟ : ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਤਤਸਮਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ, ਸਿੱਧੀ ਗੁਣਾ ਨਾਲੋਂ ਬਹੁਤ ਸੌਖਾ ਅਤੇ ਅਸਾਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 8.13. ਤਤਸਮਕ (II) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $(2p - 3q)^2$ (ii) $(x - 3y)^2$ (iii) $(98)^2$ (iv) $(9.9)^2$

ਹੱਲ : (i) $(2p - 3q)^2 = (2p)^2 - 2(2p)(3q) + (3q)^2$ $[(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= 4p^2 - 12pq + 9q^2$

(ii) $(x - 3y)^2 = (x)^2 - 2(x)(3y) + (3y)^2$ $[(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= x^2 - 6xy + 9y^2$

(iii) $(98)^2 = (100-2)^2 = (100)^2 - 2(100)(2) + (2)^2$ $[(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

(iv) $(9.9)^2 = (10-0.1)^2 = (10)^2 - 2 \times 10 \times 0.1 + (0.1)^2$ $[(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= 100 - 2 + 0.01$

$= 98.01$

ਉਦਾਹਰਨ 8.14. ਤਤਸਮਕ (III), ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $991^2 - 9^2$ (ii) 198×202

(iii) $(3 + 2x)(3 - 2x)$ **(iv)** $\left(\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}n\right)\left(\frac{3}{4}m - \frac{3}{2}n\right)$

ਹੱਲ : (i) $991^2 - 9^2 = (991 + 9)(991 - 9)$ $[(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 1000 \times 982$

$= 982000$

(ii) $198 \times 202 = (200 - 2)(200 + 2)$

$= (200)^2 - (2)^2$ $[(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 40000 - 4$

$= 39996$

(iii) $(3 + 2n)(3 - 2n) = (3)^2 - (2n)^2$ $[(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 9 - 4n^2$

(iv) $\left(\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}n\right)\left(\frac{3}{4}m - \frac{3}{2}n\right)$

$= \left(\frac{3}{4}m\right)^2 - \left(\frac{3}{2}n\right)^2$ $[(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \frac{9}{16}m^2 - \frac{9}{4}n^2$

ਉਦਾਹਰਨ 8.15. ਤਤਸਮਕ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 104×107 **(ii)** 501×503 **(iii)** 97×104 **(iv)** $(2y + 3)(2y + 6)$

(v) $(3p - 7)(3p + 8)$

ਹੱਲ : (i) $104 \times 107 = (100 + 4)(100 + 7)$

$= (100)^2 + (4 + 7) \times 100 + 4 \times 7$ ਇੱਥੇ $x = 100, a = 4, b = 7]$

$= 10000 + 1100 + 28$

$= 11128$

(ii) $501 \times 503 = (500 + 1) \times (500 + 3)$

$= (500)^2 + (1 + 3) \times 500 + 1 \times 3$ [ਇੱਥੇ $x = 500, a = 1, b = 3$]

$= 250000 + 2000 + 3$

$= 252003$

(iii) $97 \times 104 = (100 - 3) \times (100 + 4)$

$= (100)^2 + (-3 + 4) \times 100 + (-3)(4)$ [ਇੱਥੇ $x = 100, a = -3, b = 4$]

$= 10000 + 100 - 12$

$= 10088$

(iv) $(2y+3)(2y+6) = (2y)^2 + (3+6)(2y) + 3 \times 6$ [ਇੱਥੇ $x = 2y, a = 3, b = 6$]

$= 4y^2 + 9 \times 2y + 18$

$= 4y^2 + 18y + 18$

(v) $(3p-7)(3p+8) = (3p)^2 + (-7+8)(3p) + (-7) \times (8)$ [ਇੱਥੇ $x = 3p, a=-7, b= 8$]

$= 9p^2 + 1 \times 3p - 56$

$= 9p^2 + 3p - 56$

ਉਦਾਹਰਨ 8.16. ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $(3p+2q)^2 - (3p-2q)^2$ (ii) $(2ab + 3bc)^2 - 12ab^2c$ (iii) $(x+5y)^2 - (x+y)(x-y)$

ਹੱਲ : (i) $(3p+2q)^2 - (3p-2q)^2$

$= [(3p)^2 + (2q)^2 + 2 \times 3p \times 2q] - [(3p)^2 + (2q)^2 - 2 \times 3p \times 2q]$

$= [9p^2 + 4q^2 + 12pq] - [9p^2 + 4q^2 - 12pq]$

$= 9p^2 + 4q^2 + 12pq - 9p^2 - 4q^2 + 12pq$

$= 24pq$

(ii) $(2ab + 3bc)^2 - 12ab^2c$

$= (2ab)^2 + (3bc)^2 + 2 \times 2ab \times 3bc - 12ab^2c$

$= 4a^2b^2 + 9b^2c^2 + 12ab^2c - 12ab^2c$

$= 4a^2b^2 + 9b^2c^2$

(iii) $(x+5y)^2 - (x+y)(x-y)$

$= x^2 + (5y)^2 + 2 \times x \times 5y - [x^2 - y^2]$

$= x^2 + 25y^2 + 10xy - x^2 + y^2$

$= 26y^2 + 10xy$

ਅਭਿਆਸ 8.5

1. ਢੁੱਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $(x + y)(x + y)$ (ii) $(y + 2x)(y + 2x)$ (iii) $(a + 7b)(a + 7b)$

(iv) $(2a - b)(2a - b)$ (v) $(2x - 3y)(2x - 3y)$ (vi) $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right)$

(vii) $(2x + 3y)(2x + 3y)$ (viii) 101×99 (ix) $\left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$

(x) $61^2 - 39^2$ (xi) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (xii) 54×46

(xiii) $(q + p)(p - q)$

2. ਤਤਸਮਕ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $(x + 2)(x + 3)$ (ii) $(x + 2)(x - 5)$ (ii) $(x - 7)(x + 3)$

(iv) $(4x + 5)(4x + 1)$ (v) $(7p + 6)(7p - 3)$ (vi) $(5y^2 - 1)(5y^2 + 2)$

3. ਢੁੱਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $(xy + 3z)^2$ (ii) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right)^2$

(iii) $(-a + c)(-a + c) = (-a + c)^2$ (iv) $(1.2p - 1.5q)^2$

(v) $(x^2 + 3y^2)^2$ (vi) $(x - y^2z)^2$

4. ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $(x^2 + 3y)^2 + (3 + x^2y)^2$ (ii) $(2m + 5n)^2 + (2n + 5m)^2$

(iii) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (iv) $(9p - 5q)^2 - (9p + 5q)^2$

5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

(i) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

(ii) $(2x+3y)(2x-3y) + (3y - 5z)(3y + 5z) + (5z - 2x)(5z + 2x) = 0$

(iii) $(2x + 5)^2 - 40x = (2x - 5)^2$

(iv) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

6. ਢੁੱਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ?

(i) 99^2 (ii) 103^2 (ii) 5.1^2

(iv) 9.8^2 (v) 71×69 (vi) 1.02×0.98

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) $153^2 - 147^2$ (ii) $64^2 - 36^2$

(iii) $(1.05)^2 - (.95)^2$ (iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(i) 105×102 (ii) 5.1×5.2 (iii) 46×49

(iv) 103×94 (v) 9.3×9.2 (vi) 10.3×9.8

9. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਤਤਸਮਕ ਪੂਰਾ ਕਰੋ $(a + b)^2 =$

(a) $a^2 - b^2$ (b) $a^2 + b^2 + 2ab$ (c) $a^2 + b^2 - 2ab$ (d) $a^2 + b^2$

(ii) ਤਤਸਮਕ ਪੂਰਾ ਕਰੋ: $a^2 - 2ab + b^2 =$ ....

(a) $(a-b)^2$ (b) $a-b^2$ (c) $a-b$ (d) a^2-b^2

(iii) ਤਤਸਮਕ ਪੂਰਾ ਕਰੋ : $(a+b)(a-b)$:

(a) a^2+b^2 (b) a^2-b (c) a^2-b^2 (d) $a-b$

(iv) ਤਤਸਮਕ ਪੂਰਾ ਕਰੋ : $(x+a)(x+b) = x^2 +$ .... $x +$ ....

(a) $a^2b, a+b$ (b) $(a+b), ab$ (c) a^2+b^2, a^2b^2 (d) $a-b, ab$

(v) $(y+5)(y-5)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ, ਢੁੱਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਚੁਣੋ।

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (b) $(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$

(c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (d) $a^2 + b^2 = ab$

(vi) $\left(\frac{3}{2}p + \frac{2}{3}q\right)\left(\frac{3}{2}p - \frac{2}{3}q\right)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(a) $\frac{3}{2}p^2 - \frac{2}{3}q^2$ (b) $\frac{9}{4}p^2 - \frac{4}{9}q^2$ (c) $\frac{3}{2}p^2 - \frac{2}{3}q$ (d) $\frac{9}{4}p^2 + \frac{4}{9}q^2$

(vii) $(2x-3)(2x+5)$, ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹੜੇ ਢੁੱਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(a) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(c) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ (d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(viii) ਜੇਕਰ $(2p+3q)$ ਅਤੇ $(2p-3q)$ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਸ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $2p^2+3q^2$ (b) $4p^2+3q^2$ (c) $4p^2-9q^2$ (d) $6p^2q^2$

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ :

- *ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ, ਇਸਦੇ ਪਦ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਅਚਲ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੱਸਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਬਹੁਪਦ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ, ਘਟਾਉਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੁਆਰਾ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ।*
- *ਤਤਸਮਕਾ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਅਤੇ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਆਮ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤਣ ਯੋਗ ਹਨ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 8.1

4.

(i)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
5xy	5
–3zy	–3

(ii)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
2	2
2x	2
$-3x^2$	–3

(iii)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
$4x^2y^2$	4
$-4z^2$	–4
3xy	3

(iv)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
ab	1
bc	1
abc	1
7	7

(v)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
$\frac{x}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{y}{6}$	$\frac{1}{6}$
2xz	2

(vi)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
0.3a	0.3
–0.5ab	–0.5

(vii)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
$\frac{xy}{2}$	$\frac{1}{2}$
7x	7
$\frac{3}{2}y$	$\frac{3}{2}$

(viii)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
0.4a	0.4
–0.6ab	–0.6
$3b^2$	3

(ix)

ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
$3xy^2$	3
5xyz	5
$-6y^2$	–6

5. (i) ਇੱਕ ਪਦੀ (ii) ਇੱਕ ਪਦੀ (iii) ਇੱਕ ਪਦੀ (iv) ਦੋ ਪਦੀ (v) ਦੋ ਪਦੀ
(vi) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (vii) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (viii) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (ix) ਤਿੰਨ ਪਦੀ (x) ਇੱਕ ਪਦੀ
(xi) ਦੋ ਪਦੀ (xii) ਤਿੰਨ ਪਦੀ

6. (i) $3ab - 6a^2b + abc + 3$

(ii) $-x + 4y + 7z - 2xyz - 8$

(iii) 0

(iv) $-2y + 2z$

(v) $-x^2y^2 + 4xy + 9$

(vi) $x^2 + y^2 + z^2$

7. (i) $8x - 4xy - 13y - 10$
   (ii) $7\ell m + 4mn + 21n\ell$
   (iii) $2ab - 3bc - ca - 5abc$
   (iv) $2x - 3y - 4z - 10xyz$
   (v) $0.4x + 0.6y - 11xyz$
   (vi) $ab - 3bc + 3cd - 3abc$

8. (i) $abc + bc - cd$ (ii) $-x - y + 2z - 4xyz$ (iii) xy
   (iv) $3xy + 5x + 4y - 5z$ (v) $0.5xy + 0.3zx$ (vi) $0.1xyz + 0.1xy^2$

9. $9x^2 + 10x - 2$

10. (i) a (ii) c (iii) a (iv) b (v) c (vi) c (vii) b
    (viii) b (ix) c (x) a (xi) b

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. (i) ਇੱਕ ਪਦੀ (ii) ਇੱਕ ਪਦੀ

2. (i) $24xy$ (ii) $8x$ (iii) $-12pq$ (iv) $-24p^2q$ (v) 0 (vi) $2p^3q$ (vii) $6p^2r$ (viii) $2pr$

3. xy ; $8\ell m$; $60mn$; $12mn^2$; $117\ a^3b^2c$; $6axpr$; $12mn^2p$; $2p^2qr$; $21x^4y^3$

4.

ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਪਦੀ → / ਦੂਸਰੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ↓	$2x$	$-5y$	$2x^2$	$-3xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$-2y$	$-4xy$	$10y^2$	$-4x^2y$	$6xy^2$	$-14x^2y^2$	$18x^2y^3$
$3x$	$6x^2$	$-15xy$	$6x^3$	$-9x^2y$	$21x^3y$	$-27x^3y^2$
y^2	$2xy^2$	$-5y^3$	$2x^2y^2$	$-3xy^3$	$7x^2y^3$	$-9x^2y^4$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-8x^3y$	$12x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$2x^2y^2$	$4x^3y^2$	$-10x^2y^3$	$4x^4y^2$	$-6x^3y^3$	$14x^4y^3$	$-18x^4y^4$

5. (i) $-84x^6$ (ii) $24xyz^2$ (iii) $\frac{abc}{24}$ (iv) $a^3b^3c^2d$ (v) $-24x^3y^3z^3$ (vi) $-12p^3qx^2$

6. (i) xyz (ii) $24xyz$ (iii) $14abc$ (iv) $120lmn$ (v) $a^3b^3c^3$ (vi) $\frac{abc}{24}$

7. (i) a (ii) b (iii) c (iv) c (v) b (vi) c

ਅਭਿਆਸ 8.3

1. (i) $4x^2 + 4xy$ (ii) $x^3 - 3x^2y$ (iii) $7x^2y + 7xy^2$ (iv) $4x^3 - 36x^2$ (v) 0 (vi) $a^2b^2 + ab^2c$

2. (i) $a^3b^3c^2 + a^2b^3c^3 + a^3b^2c^3$ (ii) $2x^2y + 2xy^2 + 2xyz$
   (iii) $2p^2 + 2pq - 4pr$ (iv) $ab^2c + abc^2 - a^2bc$

3. (i) $a^4 - a^2b^2$ (ii) $-8x^2y - 12xy^2$ (iii) $a^3 - 2a^2b + ab^2$ (iv) $-4x^4 - 4x^2y^2 + 8x^3$

4. (i) $3x^2 + 2x - 7$; -2 ; $\frac{-21}{4}$ (iii) $x^3y^2 - x^2y^3$; -4

(ii) $2y^3 - 7y^2 + 8$; 8 ; -1 (iv) $a^2b + a^2b^2 + a^2b^2c$; 8

5. (i) $x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 - xz$

(ii) $2x^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 2y^2$

6. (i) $10l^2 + 50ln + 5lm$

(ii) $4bc - 2ab + 2ac - 2a^2$

7. (i) $-5x^2 + 6x - 6$ 8. $6xy^2 - 25xyz$

9. (i) b (ii) b (iii) c (iv) c

ਅਭਿਆਸ 8.4

1. (i) $x^2 + 9x + 20$ (vi) $x^2 - 2xy - 3y^2$

(ii) $2x^2 - 11x - 21$ (vii) $p^2 + 2pq - 3q^2$

(iii) $x^2 - 5x - 24$ (viii) $8p^2 - 18pq + 9q^2$

(iv) $2x^2 - 11x + 12$ (ix) $a^3 + a^2b^2 - ab - b^3$

(v) $2x^2 + 7xy + 6y^2$ (x) $\frac{7}{2}x^3 - xy + x^2y^2 - \frac{2}{7}y^3$

(xi) $0.6x^2y + 0.5xy^2 - 20y^3$ (xii) $p^4 - q^2$

2. (i) $y^2 + 19$ (ii) $a^2b^2 + 5a^2 - 3b^2 - 23$

(iii) $y^2x + y^3 - 7x + 6y$ (iv) $3x^2 - 5y^2$

(v) 0 (vi) $x^2 - y^2$

(vii) $2p^2 + 2pq - r^2$ (viii) $x^2 - y^2 - 2x^2y - 2xy^2$

(ix) $ln + mn - 2m^2$ (x) $2x^3 - 17x^2 + 37x$

ਅਭਿਆਸ 8.5

1. (i) $x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $y^2 + 4xy + 4x^2$

(iii) $a^2 + 14ab + 49b^2$ (iv) $4a^2 - 4ab + b^2$

(v) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (vi) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$

(vii) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (viii) 9999

(ix) $x^2 - \frac{y^2}{100}$ (x) 2200

(xi) $\frac{x^2}{4}+\frac{3xy}{4}+\frac{9y^2}{16}$ (xii) 2484

(xiii) $p^2 - q^2$

2. (i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 - 3x - 10$

(iii) $x^2 - 4x - 21$ (iv) $16x^2 + 24x + 5$

(v) $49p^2 + 21p - 18$ (vi) $25y^4 + 5y^2 - 2$

3. (i) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$ (ii) $\frac{4}{9}x^2 - 2xy + \frac{9}{4}y^2$

(iii) $a^2 - 2ac + c^2$ (iv) $1.44p^2 - 3.6pq + 2.25q^2$

(v) $x^4 + 9y^4 + 6x^2y^2$ (vi) $x^2 + y^4 z^2 - 2xy^2z$

4. (i) $x^4 + x^4y^2 + 12x^2y + 9y^2 + 9$ (ii) $29m^2 + 29n^2 + 40mn$

(iii) $a^2b^2 + b^2c^2$ (iv) $-180pq$

6. (i) 9801 (ii) 10609

(iii) 26.01 (iv) 96.04

(v) 4899 (vi) 0.9996

7. (i) 1800 (ii) 2800

(iii) 0.20 (iv) 84

8. (i) 10710 (ii) 26.52

(iii) 2254 (iv) 9682

(v) 85.56 (vi) 100.94

9. (i) b (ii) a (iii) c (iv) b (v) c (vi) b

(vii) c (viii) c

ਅਧਿਆਇ 9

ਖੇਤਰਮਿਤੀ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ

- *ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ, ਚਤੁਰਭੁਜ, ਪੰਤਭੁਜ ਆਦਿ) ਅਤੇ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤਿਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਜਾਣਨਾ।*
- *ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤਿਆਂ (ਚਤੁਰਭੁਜ) ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।*
- *ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।*
- *ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ (ਘਣਾਵ, ਘਣ, ਸਿਲੰਡਰ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।*

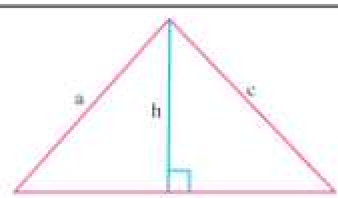
9.1 ਜਾਣ-ਪਛਾਣ (Introduction)

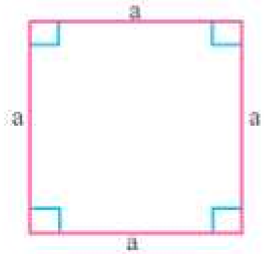
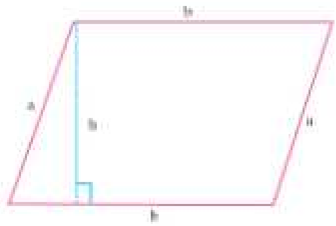
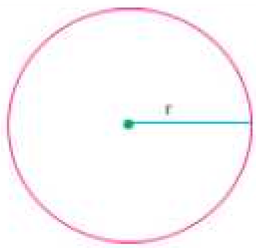
ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿਚ, ਅਸੀਂ ਸਮਤਲ ਬੰਦ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ, ਉਸਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਕੁੱਲ ਲੰਬਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਵੱਲੋਂ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਕੁੱਝ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ, ਆਇਤ, ਵਰਗ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਆਇਤਕਾਰ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਰਸਤੇ, ਚੁਰੱਸਤੇ ਅਤੇ ਬਾਰਡਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਧਾਰਨ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਆਦਿ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

9.2 ਆਓ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (Let us recall)

ਪੂਰਵ ਗਿਆਨ ਦੀ ਸਮੀਖਿਆ ਕਰਨ ਲਈ ਆਓ ਕੁੱਝ ਜਿਮਾਇਤੀ ਆਕਾਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰੀਏ

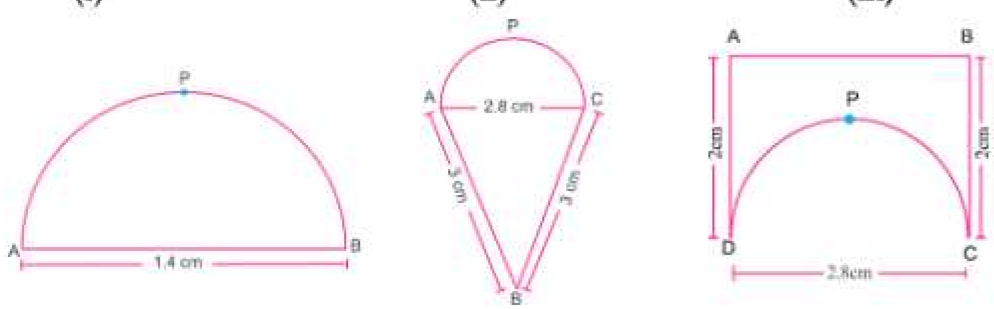
ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਨਾਂ	ਆਕ੍ਰਿਤੀ	ਪਰਿਮਾਪ	ਖੇਤਰਫਲ
ਤ੍ਰਿਭੁਜ		$a + b + c$	$\frac{1}{2} \times b \times h$
ਆਇਤ		$a + b + a + b$ $= 2(a + b)$	$a \times b$

ਵਰਗ		a + a + a + a = 4a	a × a
ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ		a + b + a + b = 2(a + b)	a × h
ਚੱਕਰ		$2\pi r$	πr^2

ਚੱਕਰ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਰਿਮਾਪ ਦੀ ਥਾਂ ਘੇਰਾ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ **9.1** **ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(i) **(ii)** **(iii)**



ਚਿੱਤਰ 9.1

ਹੱਲ : (i) ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ $= 1.4$ cm

$\therefore$ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{1.4}{2} = 0.7$ cm

ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ

$= \pi r + 2r$

$= \frac{22}{7} \times 0.7 + 2 \times 0.7 = 2.2 + 1.4 = 3.6$cm

(ii) ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $=$ AB + BC + ਚਾਪ APC

$= 3 + 3 + \pi r$

$= 6 + \frac{22}{7} \times 1.4$ [∴ ਵਿਆਸ = 2.8 cm; ਅਰਧ ਵਿਆਸ = $\frac{2.8}{2}$ = 1.4 cm]

$= 3 + 4.4 = 7.4$ cm

(iii) ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = AB + BC + ਚਾਪ CPD + AD

$= 2.8 + 2 + \pi r + 2$

$= 6.8 + \frac{22}{7} \times 1.4 = 6.8 + 4.4 = 11.2$cm

ਉਦਾਹਰਨ 9.2 ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 3:2 ਵਿੱਚ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 294m² ਹੋਵੇ ਤਾਂ 8 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਮੀਟਰ ਦੇ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਖੇਤ ਦੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਖੇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 3x ਹੈ

ਅਤੇ ਖੇਤ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 2x ਹੈ

ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 294 m^2

ਭਾਵ ਲੰਬਾਈ × ਚੌੜਾਈ = 294

$\Rightarrow 3x \times 2x = 294$

$\Rightarrow 6x^2 = 294$

$\Rightarrow x^2 = 49$

$x^2 = 7^2$

$\Rightarrow x = 7$

∴ ਲੰਬਾਈ = 3x = 3 × 7 = 21m

ਚੌੜਾਈ = 2x = 2 × 7 = 14m

ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = $2(\ell + b)$

= 2 (21 + 14) = 2 × 35 = 70m

∴ ਖੇਤ ਦੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ = ₹ (70 × 8) = ₹560

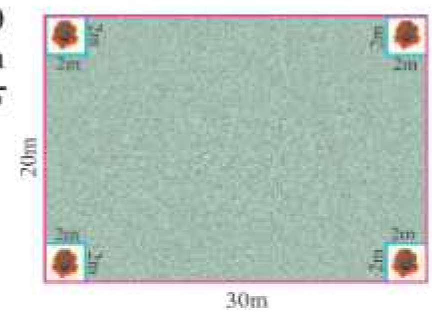
ਉਦਾਹਰਨ 9.3 ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 30 m ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 20 ਮੀ. ਹਨ। ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਖਾਏ 2m × 2m ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਵਰਗਾਕਾਰ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਘਾਹ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਪਾਰਕ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ

(ii) ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

(iii) ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

(iv) ਪਾਰਕ ਦਾ ਘਾਹ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਹਿੱਸਾ



ਚਿੱਤਰ 9.2

ਹੱਲ : (i) ਪਾਰਕ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = 2 (ਲੰਬਾਈ + ਚੌੜਾਈ)

= 2 (30 + 20) m = 100 m

(ii) ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਲੰਬਾਈ × ਚੌੜਾਈ

= (30 × 20) m^2 = 600 m^2

(iii) ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 × ਇੱਕ ਕਿਆਰੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 × (2 × 2) m^2

= (4 × 2 × 2) m^2

= 16m^2

(iv) ਪਾਰਕ ਦਾ ਘਾਹ ਦੁਆਰਾ ਢੱਕਿਆ ਭਾਗ = ਪਾਰਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ – ਚਾਰ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= (600 - 16)\ m^2 = 584\ m^2$

ਉਦਾਹਰਨ 9.4 ਇਕ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਆਕਾਰ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਕਾਰ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 9.3 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 9.3

ਹੱਲ : ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਆਇਤਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + 2 × ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= (\text{ਲੰਬਾਈ} \times \text{ਚੌੜਾਈ}) + 2 \times \frac{1}{2} \times \pi r^2 \quad \left[\begin{array}{l} \because \text{ ਵਿਆਸ} = 14cm \\ \text{ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ } (r) = \frac{14}{2} = 7cm \end{array}\right]$$

$$= (30 \times 14)\ m^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\right) m^2$$

$$= 420\ m^2 + 154\ m^2 = 574\ m^2$$

ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = 2 × ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ + 2 × ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ

$$= (2 \times 30 + 2 \times \pi r)\ m = \left(60 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7\right) m$$

$$= (60+44)m$$

$$= 104\ m$$

ਉਦਾਹਰਨ 9.5. ਇੱਕ ਫ਼ਰਸ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 1080m² ਹੈ ਅਤੇ ਫ਼ਰਸ਼ 'ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਸਦਾ ਆਧਾਰ 24 cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 10 cm ਹੈ। ਫ਼ਰਸ਼ ਨੂੰ ਢੱਕਣ ਲਈ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ। (ਲੋੜ ਪੈਣ 'ਤੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ 'ਤੇ ਟਾਇਲ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।)

ਹੱਲ : ਫ਼ਰਸ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $1080\ m^2 = (1080 \times 100 \times 100)\ cm^2 = 10800000\ cm^2$

ਇੱਕ ਟਾਇਲ ਦੁਆਰਾ ਢੱਕਿਆ ਖੇਤਰਫਲ = $b \times h = (24 \times 10)\ cm^2 = 240\ cm^2$

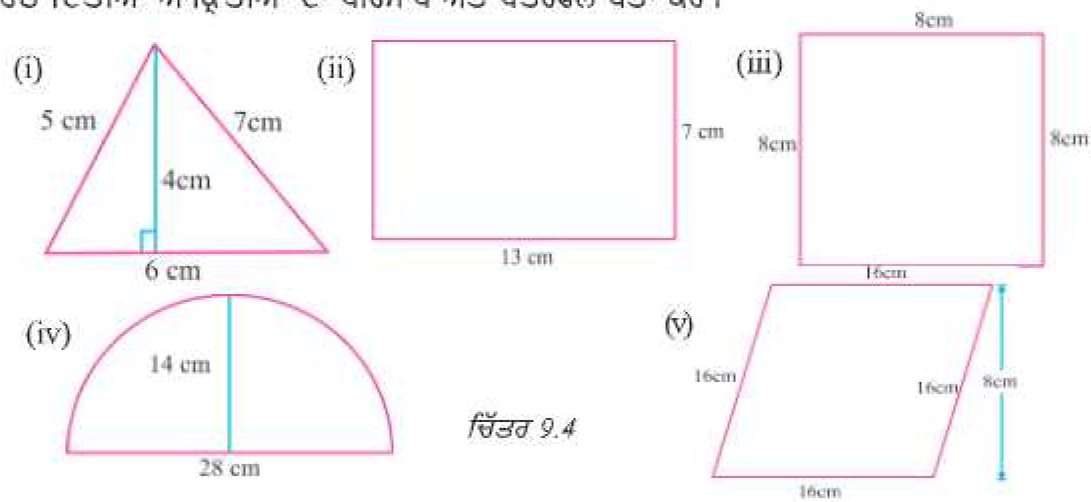
ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਫ਼ਰਸ਼ ਖੇਤਰਫਲ m^2 ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਟਾਇਲ ਦਾ ਸਾਈਜ਼ cm^2 ਵਿੱਚ ਹੈ, ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋਂ ਜਿਹੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਤਰਤੀਬ ਕਰਾਂਗੇ)

$$\text{ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ} = \frac{\text{ਫ਼ਰਸ਼ ਖੇਤਰਫਲ}}{\text{ਟਾਇਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}}$$

$$= \frac{10800000}{240} = 45000$$

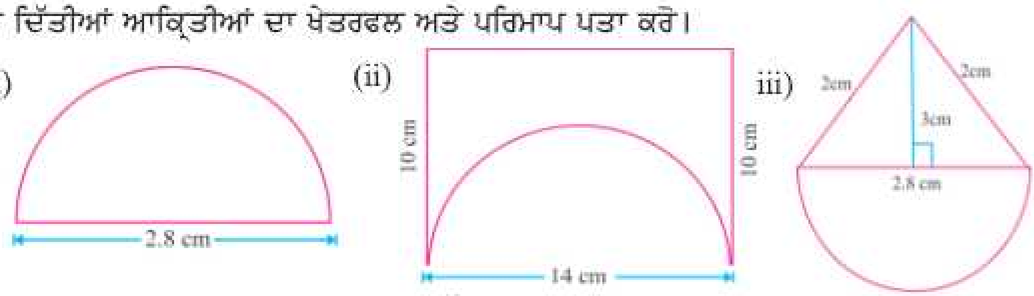
ਅਭਿਆਸ 9.1

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.4

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

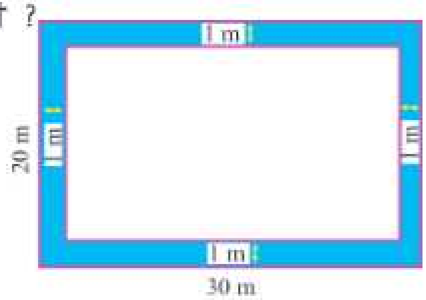


ਚਿੱਤਰ 9.5

3. ਇੱਕ ਵਰਗ ਅਤੇ ਆਇਤਕਾਰ ਖੇਤ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸਮਾਨ ਪਰਿਮਾਪ ਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕਿਸ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਜਿਆਦਾ ਹੈ।

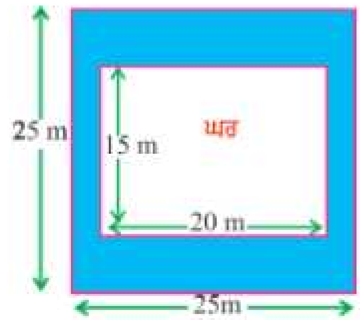
ਚਿੱਤਰ 9.6

4. ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 30 m ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 20 m ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ 1 m ਚੌੜਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਰਸਤਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.7)। ਰਸਤੇ ਉੱਪਰ ਸੀਮੇਂਟ ਦਾ ਪਲੱਸਤਰ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $4m^2$ ਉੱਪਰ ਪਲੱਸਤਰ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਥੈਲਾ ਸੀਮੇਂਟ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਰਸਤਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਥੈਲੇ ਸੀਮੇਂਟ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ ?



ਚਿੱਤਰ 9.7

5. ਸੰਦੀਪ ਕੋਲ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਹ ਪਲਾਟ ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਰ ਅਤੇ ਘਰ ਦੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਇੱਕ ਬਗੀਚਾ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ₹ 60 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਬਗੀਚਾ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.8

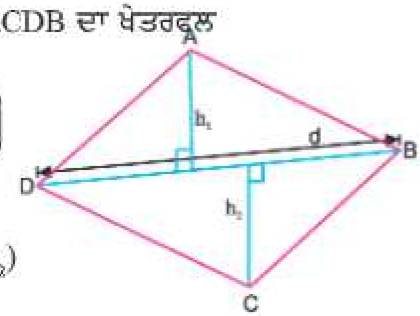
9.3 ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of quadrilateral)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੀ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ। ਇੱਕ ਚਤੁਭੁਜ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਖਿੱਚ ਕੇ 2 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ **ਤ੍ਰਿਭੁਜੀਕਰਨ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜੀਕਰਨ ਸਾਨੂੰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਸਬੰਧੀ, ਫਾਰਮੂਲਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 9.9 ਦੇਖੋ।

ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ΔABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔCDB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left(\frac{1}{2} \times DB \times h_1\right) + \left(\frac{1}{2} \times DB \times h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} DB \times (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$$

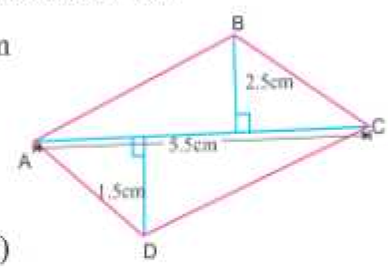


ਇੱਥੇ d ਵਿਕਰਨ DB ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 9.9

ਉਦਾਹਰਨ 9.6 **ਚਿੱਤਰ 9.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ d = AC = 5.5 cm, h_1 = 2.5 cm ਅਤੇ h_2 = 1.5 cm



ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5)$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4\ cm^2 = 11\ cm^2$

ਚਿੱਤਰ 9.10

9.4. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of special quadrilaterals)

9.4.1 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ : ਅਸੀਂ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਵੀ 2 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕੇ (ਤ੍ਰਿਭੁਜੀਕਰਨ) ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

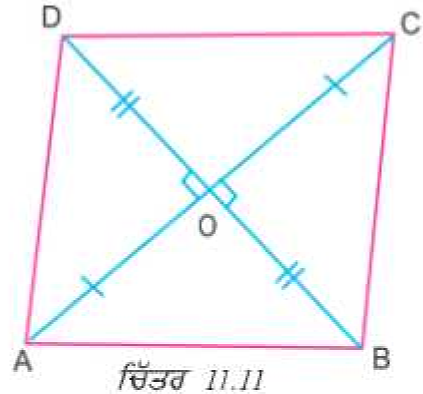
ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ΔACD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times (OD + OB) = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$= \frac{1}{2} \times$ (ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)



ਚਿੱਤਰ 11.11

> ਨੋਟ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
>
> $\therefore$ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times$ (ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ) = $\frac{1}{2} d \times d = \frac{1}{2} d^2$

ਉਦਾਹਰਨ 9.7 ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 20 cm ਅਤੇ 8.2 cm ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ (ਇੱਥੇ d_1 ਅਤੇ d_2 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਹਨ।)

$$= \left(\frac{1}{2} \times 20 \times 8.2\right) cm^2 = 82\ cm^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 9.8 ਇੱਕ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਵਰਗ ਦਾ ਵਿਕਰਨ (d) = 12cm

ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ (ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)

$$= \frac{1}{2} \times d^2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72 cm^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 9.9 ਅਜਿਹੀ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਆਧਾਰ 10 cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 6.8 cm ਹੋਵੇ।

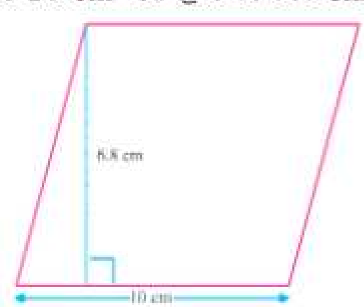
ਹੱਲ :

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਆਧਾਰ = 10 cm

ਉੱਚਾਈ = 6.8 cm

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਆਧਾਰ × ਉਚਾਈ

$= 10 \times 6.8 = 68\ cm^2$



ਚਿੱਤਰ 9.12

ਉਦਾਹਰਨ 9.10 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 120 cm^2 ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ 16 cm ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ (ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)

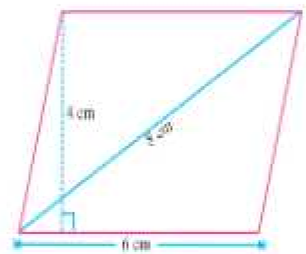
$\Rightarrow \quad 120 = \frac{1}{2} \times 16 \times d \Rightarrow \quad d = \frac{120}{8} = 15cm.$

ਉਦਾਹਰਨ 9.11 ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖ਼ੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ 6cm ਅਤੇ ਸਿਖਰ-ਲੰਬ 4cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 8cm ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਭੁਜਾ = 6cm ਅਤੇ ਸਿਖਰ-ਲੰਬ = 4cm, ਵਿਕਰਨ = 8cm

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਭੁਜਾ × ਸਿਖਰ ਲੰਬ

$= 6 \times 4 = 24cm^2$



ਚਿੱਤਰ 9.13

ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਹੀ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫ਼ਲ $= \frac{1}{2} \times$ (ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)

ਭਾਵ $\quad 24 = \frac{1}{2} \times 8 \times d$

$\Rightarrow \quad d = \frac{24}{4} = 6cm$

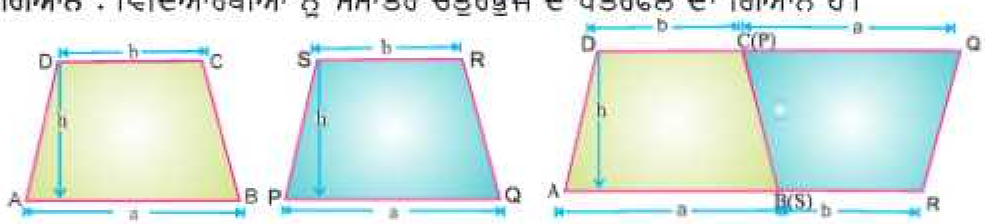
> **ਨੋਟ :** ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਬਣਾਉਣ 'ਤੇ ਇਹ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਕਰਨ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਦੋਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਕਿਰਿਆ : ਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਸਮੱਗਰੀ : ਰੰਗਦਾਰ ਕਾਗਜ਼, ਕੈਂਚੀ, ਫੁੱਟਾ, ਪੇਂਸਿਲ, ਗੂੰਦ।

ਪੂਰਵ ਗਿਆਨ : ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੈ।



(i) **(ii)**

(i) ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੰਗਦਾਰ ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਉੱਪਰ ਦੋ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਅਤੇ PQRS ਬਣਾਉ।

(ii) ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਨੂੰ ਘੁੰਮਾ (Flip) ਕੇ ਇਸਨੂੰ ਦੂਜੀ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨਾਲ ਲਗਾਓ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ARQD ਬਣਾਓ।

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ARQD ਦੀ ਭੁਜਾ AR = a + b ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ = h

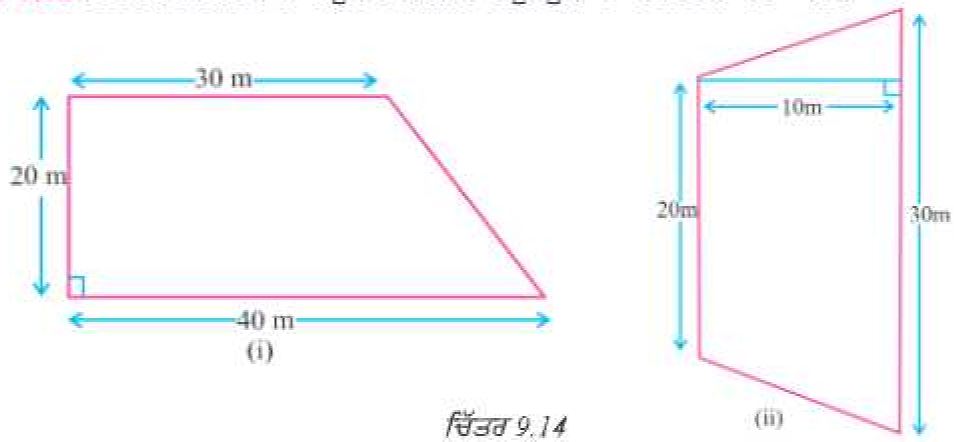
ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ARQD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= AR \times h$

2 × ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (a + b) \times h$

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$

$\therefore$ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ (ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) × ਉੱਚਾਈ

ਉਦਾਹਰਨ **9.12 ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**



ਚਿੱਤਰ 9.14

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.14 ਵਿੱਚ (i) ਅਤੇ (ii) ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ।

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ a = 30 m, b = 40 m ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ h = 20 m

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}(a + b) \times h$

$\therefore$ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}(30 + 40) \times 20 \text{ m}^2 = \frac{1}{2} \times 70 \times 20 \text{ m}^2 = 700 \text{ m}^2$

(ii) a = 20 m, b = 30 m ਅਤੇ h = 10 m

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}(20 + 30) \times 10 \text{ m}^2 = 250 \text{ m}^2$.

ਉਦਾਹਰਨ **9.13. ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 480 m^2 ਹੈ। ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 15 m ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ 20 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ a = 20 m.

ਮੰਨ ਲਓ ਦੂਜੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ = b

ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (h) = 15 m.

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 480 m^2.

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

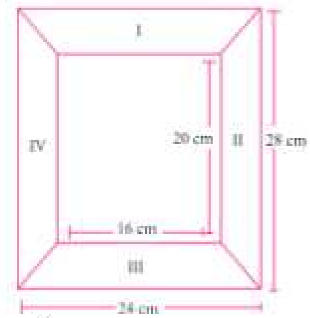
$$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (20 + b) \times 15$$

$$20 + b = \frac{480 \times 2}{15} = 64$$

$$b = 64 - 20 = 44 \text{ m}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ = 44 m.

ਉਦਾਹਰਨ 9.14. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਤਸਵੀਰ ਦੇ ਫਰੇਮ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਭਾਗ ਦਾ ਮਾਪ 24cm × 28cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਦਰ ਵਾਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਮਾਪ 16cm × 20cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਫਰੇਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਹੱਲ : ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਫਰੇਮ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= \frac{1}{2}(28-20)$

$$= \frac{1}{2}\times 8 = 4\text{cm}$$

ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਫਰੇਮ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= \frac{1}{2}(24-16) = \frac{1}{2}\times 8 = 4\text{cm}$

∴ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਫਰੇਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਉਚਾਈ 4cm ਹੈ।

ਭਾਗ I ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}\times(16+24)\times 4$

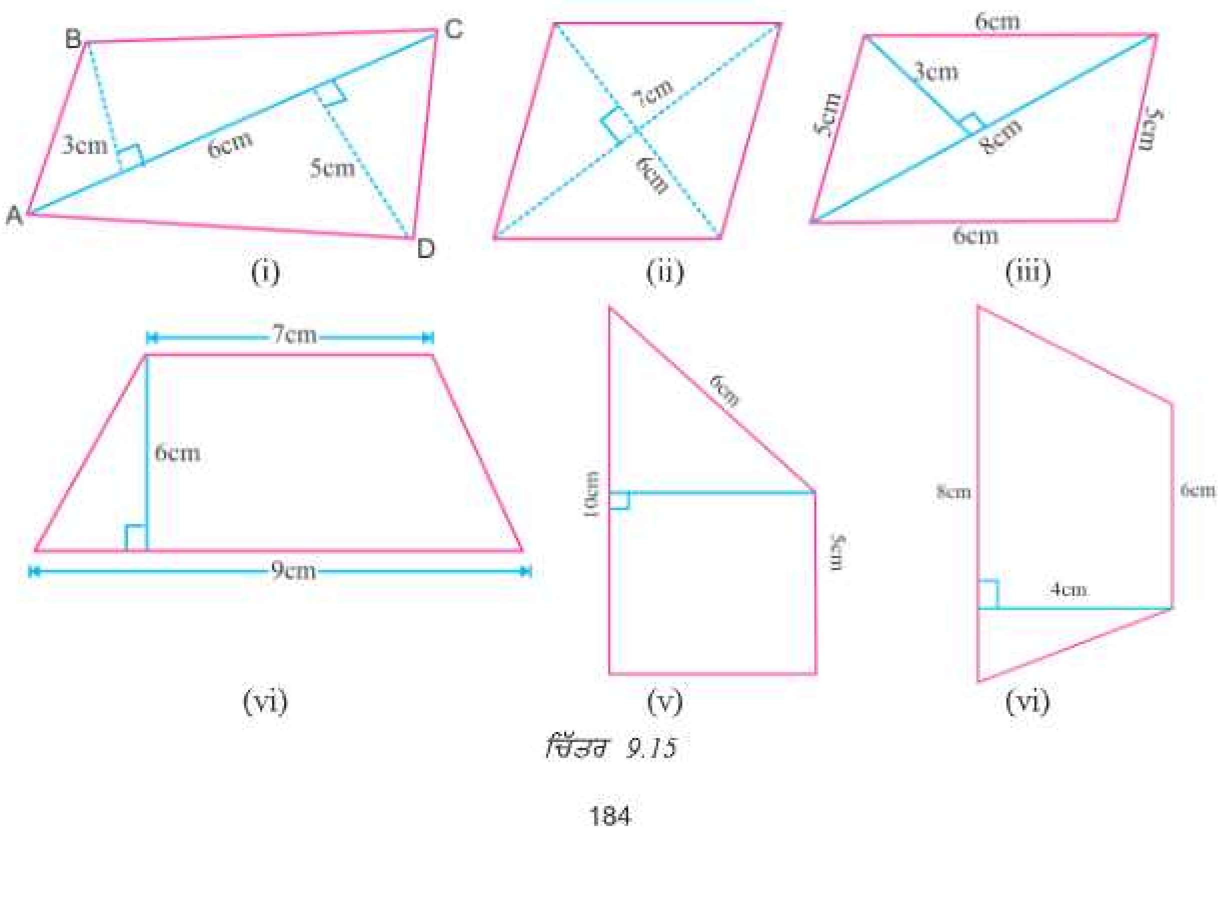
$= \frac{1}{2}\times 40\times 4 = 80\text{ cm}^2 =$ ਭਾਗ III ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਭਾਗ ਦਾ II ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}\times(20+28)\times 4 = \frac{1}{2}\times 48\times 4 = 96\text{ cm}^2$

$=$ ਭਾਗ IV ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਅਭਿਆਸ 9.2

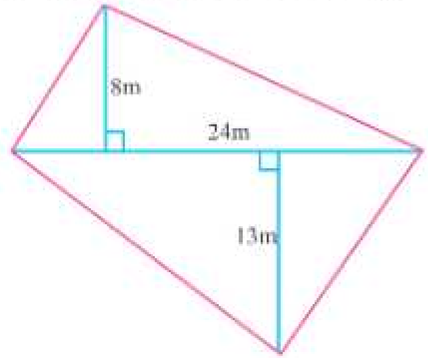
1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ 9.15 ਵਿਚਲੀਆਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.15

2. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 320 cm^2. ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 16 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਖੇਤ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ 24 m ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਸਿਖਰਲੰਬ 8 m ਅਤੇ 13 m ਹਨ। ਇਸ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.16

4. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਮਾਪ 7.5 cm ਅਤੇ 12 cm ਹੈ। ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10cm ਹੈ।

6. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ 8 cm ਅਤੇ ਸਿਖਰਲੰਬ 4.8cm ਹੈ।

7. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ 5 cm ਅਤੇ ਸਿਖਰਲੰਬ 4.8 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਜੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 250 m ਅਤੇ160 m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 100 m ਹੈ।

9. ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਦੂਜੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 300 m^2 ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ 15 m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 15 m ਹੈ।

10. ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 1m ਅਤੇ 1.2m ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 0.8m ਹੈ।

11. ਕਿਸੇ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਫ਼ਰਸ਼ ਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ 2400 ਟਾਇਲਾਂ ਲੱਗੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 45cm ਅਤੇ 32cm ਹੈ, ਫਰਸ਼ ਨੂੰ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ 1m^2 ਨੂੰ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ₹4 ਹੋਵੇ।

12. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

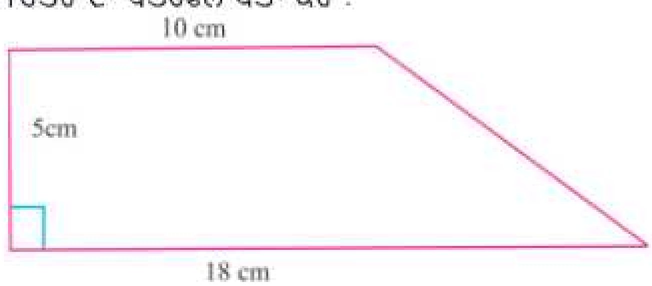
(i) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨ 4 cm ਅਤੇ 6 cm ਹੋਣ :

(a) 24cm^2 (b) 12cm^2 (c) 10cm^2 (d) 18cm^2

(ii) ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਵਿਕਰਨ d ਹੋਵੇ :

(a) d^2 (b) $\frac{1}{2}d$ (c) $2d^2$ (d) $\frac{1}{2}d^2$

(iii) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

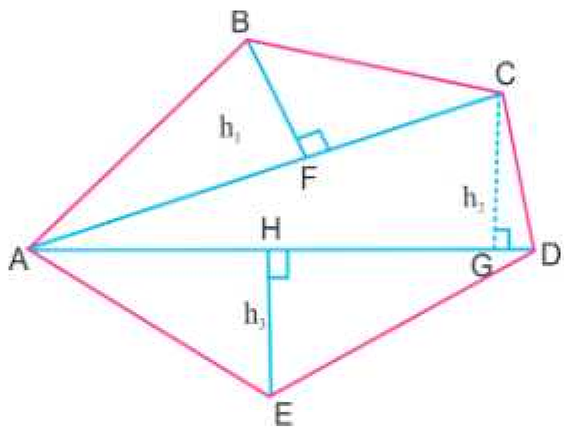


(a) 70cm^2 (b) 180cm^2 (c) 90cm^2 (d) 120cm^2

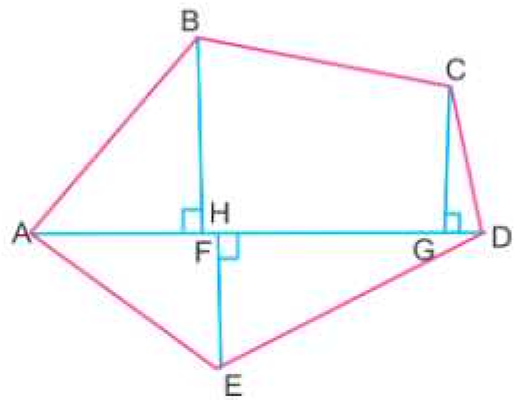
9.5 ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of polygon)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਤੋਂ ਬਣੀ ਸਾਧਾਰਨ ਬੰਦ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਨੂੰ ਬਹੁਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ) ਅਤੇ ਚਾਰ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ (ਚਤੁਰਭੁਜ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪੰਜ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ (ਪੰਜਭੁਜ) ਅਤੇ ਛੇ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ (ਛੇਭੁਜ) ਆਦਿ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਬਣਾ ਕੇ ਇਸਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ, ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਵਰਤ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪੰਜਭੁਜ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.17



ਚਿੱਤਰ 9.18

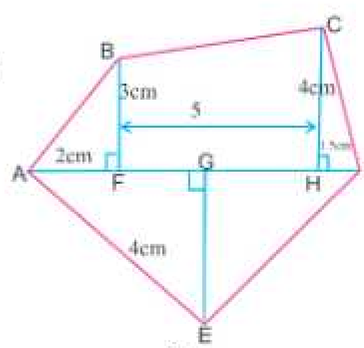
ਚਿੱਤਰ 9.17 ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ AD ਖਿੱਚ ਕੇ ਪੰਜਭੁਜ ABCDE, ਤਿੰਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਗਈ ਹੈ।

ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔACD ਖੇਤਰਫਲ + ΔAED ਖੇਤਰਫਲ

ਚਿੱਤਰ 9.18, ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ AD ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਉੱਪਰ ਲੰਬ BF, CG ਅਤੇ EH ਖਿੱਚ ਕੇ ਪੰਜਭੁਜ ABCDE, 4 ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਗਈ ਹੈ।

ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਕੋਣੀ ΔAFB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ BFGC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔCGD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔAED ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.15. ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਪੰਜ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.19

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਪੰਜਭੁਜ, ਸਮਕੋਣੀ ΔAFB, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ BFHC, ΔCHD, ΔAED ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਗਈ ਹੈ।

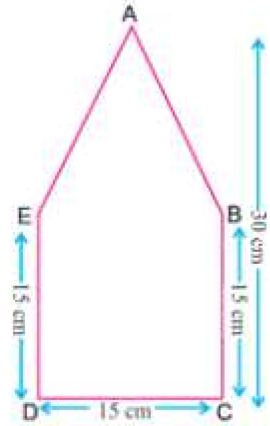
ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਕੋਣੀ ΔAFB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ BFHC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਕੋਣੀ ΔCHD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਕੋਣੀ ΔAED ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left(\frac{1}{2}\times AF\times BF\right) + \left(\frac{1}{2}(BF+CH)\times FH\right) + \left(\frac{1}{2}\times HD\times CH\right) + \left(\frac{1}{2}\times AD\times EG\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right)\ cm^2 + \left[\frac{1}{2}(3+4)\times 5\right]\ cm^2 + \left(\frac{1}{2}\times 1.5\times 4\right)\ cm^2 + \left(\frac{1}{2}\times 8.5\times 4\right)\ cm^2$$

$= 3\ cm^2 + 17.5\ cm^2 + 3\ cm^2 + 17\ cm^2 = 40.5\ cm^2$

ਉਦਾਹਰਨ 9.16 ਚਿੱਤਰ 9.20, ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਪੰਜ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.20

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਧੀ 1 :

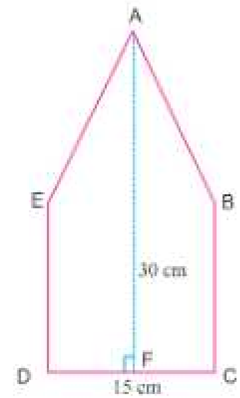
ਚਿੱਤਰ 9.21 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ A ਤੋਂ DC ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਲੰਬ AF ਖਿੱਚੋ।

AF ਪੰਜ ਭੁਜ ਨੂੰ 2 ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਾਗਜ਼ ਮੋੜ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ AFDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}(AF + ED) \times DF$

$$= \frac{1}{2}(15 + 30) \times 7.5\ cm^2 \quad \left[\because DF = \frac{1}{2}DC\right]$$

$$= 168.75\ cm^2$$



ਚਿੱਤਰ 9.21

ਪੰਜ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ABCDE= 2 × ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ AFDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 337.5\ cm^2$

ਵਿਧੀ 2 :

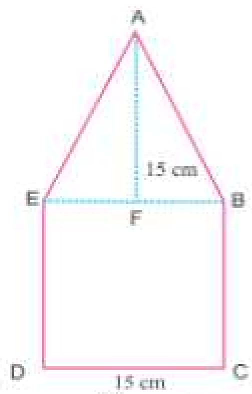
ਅਸੀਂ ਪੰਜ-ਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 9.22 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪੰਜ ਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ΔAEB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਵਰਗ EBCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left(\frac{1}{2} \times EB \times AF\right) + (DC \times CB)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 15 \times 15\right)\ cm^2 + (15 \times 15)\ cm^2$$

$$= 112.5\ cm^2 + 225\ cm^2 = 337.5\ cm^2$$

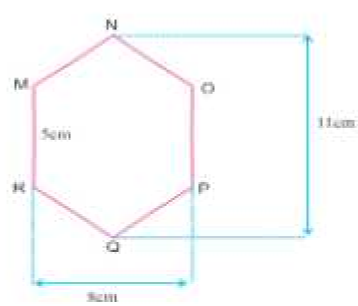


ਚਿੱਤਰ 9.22

ਉਦਾਹਰਨ 9.17 ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਛੇ ਭੁਜ MNOPQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜਦੋਂ ਕਿ

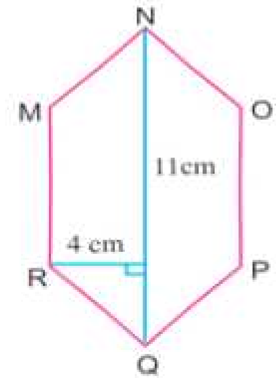
NM = NO = QP = QR

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 9.23

ਵਿਧੀ 1 :



ਚਿੱਤਰ 9.24

NQ, ਛੇ-ਭੁਜ ਨੂੰ 2 ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਾਗਜ਼ ਮੋੜ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

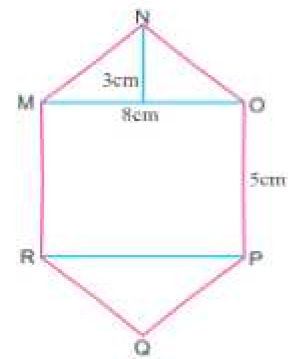
ਸਮ ਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ MNQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}$ (MR + QN) × h

$= \frac{1}{2}(5 + 11) \times 4 \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$

ਇਸ ਲਈ ਸਮ ਛੇ ਭੁਜ MNOPQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 2 \times 32 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$

ਵਿਧੀ 2 :



ਚਿੱਤਰ 9.25

ਅਸੀਂ ਛੇ ਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 9.25 ਅਨੁਸਾਰ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ΔMNO ਅਤੇ ΔRQP ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਲੰਬ 3 cm ਹੈ।

ਛੇ ਭੁਜ MNOPQR ਦਾ

ਖੇਤਰਫਲ = 2 ΔMNO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਆਇਤ MOPR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 2\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 3\right)\text{cm} + (8\times 5)\text{ cm} = 2\times\frac{1}{2}\times 8\times 3\text{ cm} + 40\text{ cm}$

$= 64 \text{ cm}^2$

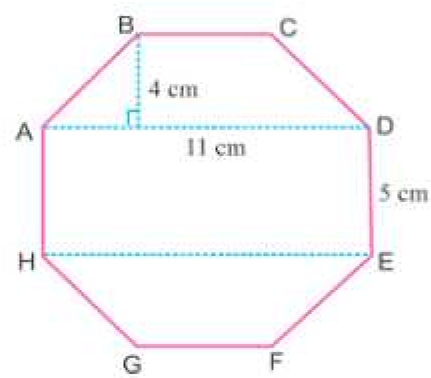
ਉਦਾਹਰਨ 9.18 ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿਚ ਦਿਖਾਈ ਸਮ-ਅੱਠ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅੱਠ ਭੁਜ ABCDEFGH ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਲੰਬ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਆਇਤ ADEH ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ EFGH ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ +

$= \left[\frac{1}{2}(11+5)\times 4\right]\text{cm}^2 + (11\times 5)\text{ cm}^2 + \left[\frac{1}{2}(11+5)\times 4\right]\text{cm}^2$

(ਇੱਥੇ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਅਤੇ EFGH ਦੋਵੇਂ ਸਰਬਗਸੰਮ ਹਨ।)

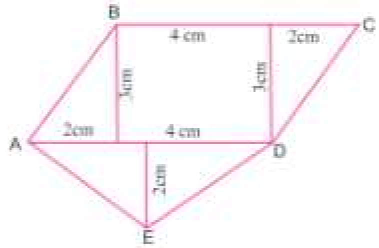
$= 32 \text{ cm}^2 + 55 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2 = 119 \text{ cm}^2.$



ਚਿੱਤਰ 9.26

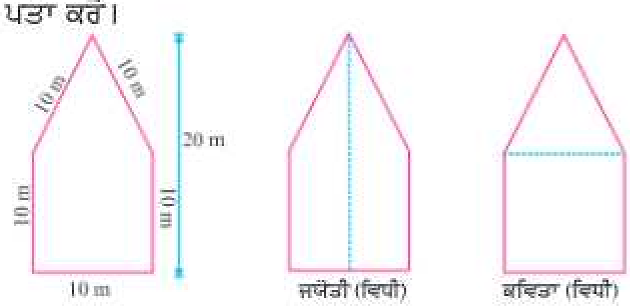
ਅਭਿਆਸ 9.3

1. ਚਿੱਤਰ 9.27 ਵਿਚਲੀ ਪੰਜ-ਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



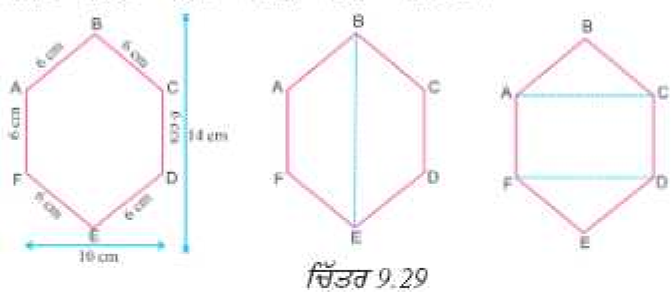
ਚਿੱਤਰ 9.27

2. ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਪੰਜ ਭੁਜ ਦੇ ਅਕਾਰ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਯੋਤੀ ਅਤੇ ਕਵਿਤਾ ਨੇ ਇਸਨੂੰ 2 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਵੰਡ ਲਿਆ। ਦੋਵੇਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



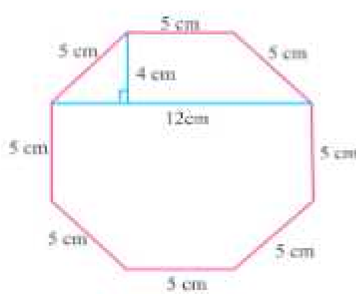
ਚਿੱਤਰ 9.28

3. ਚਿੱਤਰ 9.29 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਛੇ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = BC = CD = DE = EF = FA ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.29

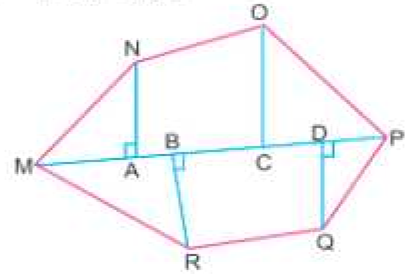
4. ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਅੱਠਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.30

5. ਚਿੱਤਰ 9.31 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਛੇ ਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

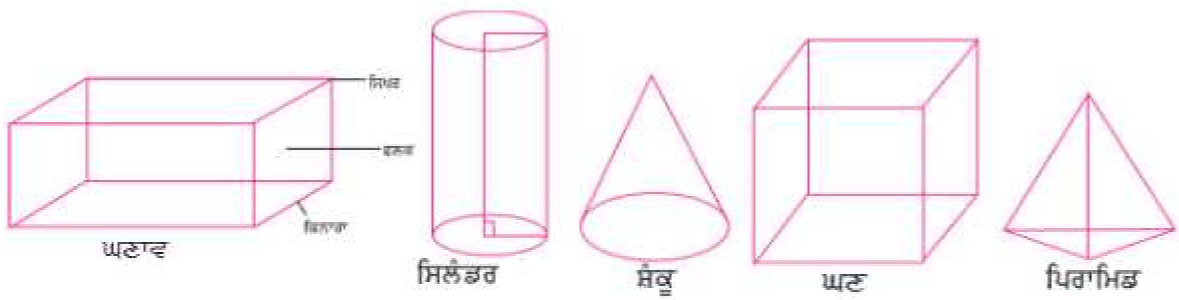
MP = 9 cm MD = 7 cm
MC = 6 cm MB = 4 cm
MA = 2 cm AN = 2.5 cm
OC = 3 cm QD = 2 cm
RB = 2.5 cm



ਚਿੱਤਰ 9.31

9.6 ਠੋਸ ਆਕਾਰ (Solid shapes)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਸਾਰੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਫ਼ਲਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਛਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 9.32 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਠੋਸ ਆਕਾਰਾਂ ਨੂੰ ਵੇਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.32

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕੁਝ ਆਕਾਰਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਮਾਨ (ਸਰਬੰਗਸਮ) ਫ਼ਲਕ ਹਨ। ਘਣਾਵ ਦੇ ਵਿੱਚ ਛੇ ਆਇਤਕਾਰ ਫ਼ਲਕ ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਪਾਸੇ ਵਾਲੇ ਫ਼ਲਕ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਫ਼ਲਕਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਜੋੜੇ ਹਨ। ਘਣ ਦੇ ਵਿੱਚ ਛੇ ਵਰਗਾਕਾਰ ਫ਼ਲਕ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਿਲੰਡਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਅਤੇ ਦੋ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫ਼ਲਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੋ ਕਿ ਇਕ ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

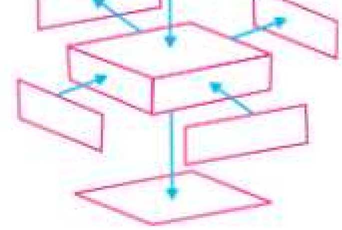
ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਿਲੰਡਰ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾਖੰਡ ਆਧਾਰ ਦੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਅਜਿਹੇ ਸਿਲੰਡਰ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਲੰਡਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣੀ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਲੰਡਰ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ ਹੋਰ ਤਰਾਂ ਦੇ ਸਿਲੰਡਰ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

9.7 ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ (Surface area of cuboid, cube and cylinder)

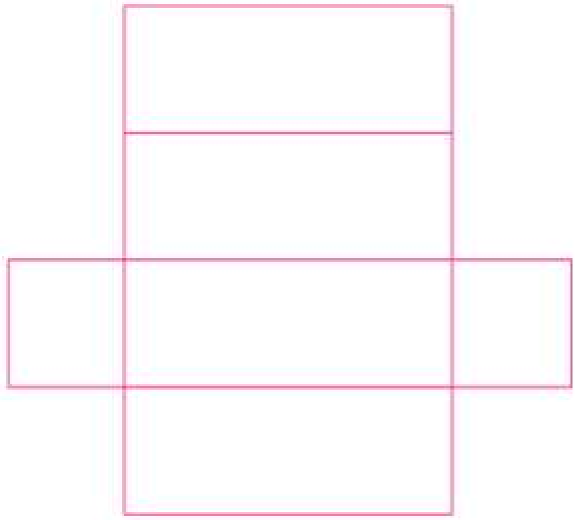
ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਹਰ ਇਕ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸਦੇ ਫ਼ਲਕਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਆਕਾਰ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਲਵਾਂਗੇ।

9.7.1 ਘਣਾਵ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਇੱਕ ਸਾਮਾਨ ਫ਼ਲਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।


ਚਿੱਤਰ 9.33

ਹੁਣ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਨੂੰ ਖੋਲੋ ਅਤੇ ਵਿਛਾ ਦਿਓ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਜਾਲ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 9.34

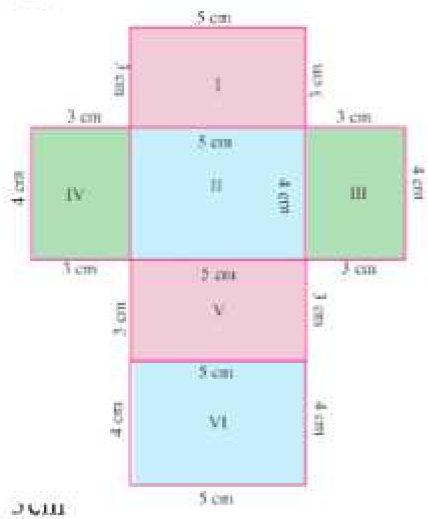
ਕਿਰਿਆਵਾਂ

ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਘਣਾਵ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਮੱਗਰੀ : ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ, **ਜੁਮੇਟਰੀ** ਬਾਕਸ, ਰੰਗਦਾਰ ਸਕੈਚ

ਵਿਧੀ :

1. ਇੱਕ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਲਵੋ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਘਣਾਵ ਦਾ ਜਾਲ ਬਣਾਓ।
2. ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਵਿੱਚੋ ਘਣਾਵ ਦੇ ਜਾਲ ਨੂੰ ਕੱਟ ਲਵੋ।
3. ਪੂਰਾ ਜਾਲ ਛੇ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
4. ਇੱਥੇ ਆਇਤ I ਤੇ V ; ਆਇਤ III ਤੇ ਆਇਤ IV ਅਤੇ ਆਇਤ II ਤੇ VI ਸਰਬੰਗਸਮ ਆਇਤ ਹਨ
5. ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਜਾਲ ਨੂੰ ਮੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ 5cm × 4cm × 3cm ਭਾਵ (l×b×h) ਆਕਾਰ ਦਾ ਘਣਾਵ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.35

ਨਿਰੀਖਣ :

ਘਣਾਵ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਛੇ ਆਇਤਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਆਇਤਾਂ (I+II+III+IV+V+VI) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= 2× ਆਇਤ (I + II + III) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 2 \times (5 \times 3 + 5 \times 4 + 3 \times 4)$

ਜੇਕਰ $\ell = 5$cm, b = 4cm ਅਤੇ h = 3cm ਹੈ ਤਾਂ

ਘਣਾਵ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ $= 2 \times (l \times h + l \times b + h \times b)$

$= 2\,(lb + bh + hl)$

ਨੋਟ : ਘਣਾਵ ਦੀਆਂ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਵਾਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ (ਛੱਤ ਅਤੇ ਫ਼ਰਸ਼ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਉਸਦਾ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਜਿਸ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਬੈਠੇ ਹੋ ਇਸਦੀਆਂ ਚਾਰੇ ਕੰਧਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ l, b, h ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ ਹੋਣ ਤਾਂ

ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ -

$$= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$$

$$= 2lh + 2bh$$

$$= 2h(l + b)$$

ਇਸਨੂੰ **ਚਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ** ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਪ੍ਰ. 1. ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਧਾਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— ਆਇਤ

ਪ੍ਰ.2. ਘਣਾਵ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— $2(l + b) \times h$

ਪ੍ਰ.3. ਘਣਾਵ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— $2(lb + bh + hl)$

ਉਦਾਹਰਨ **9.19 ਕਮਰੇ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 m, ਚੌੜਾਈ 5 m ਅਤੇ ਉਚਾਈ 4m ਹੋਵੇ।**

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ। $l = 6$m, b = 5m ਅਤੇ h = 4m

ਕਮਰੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2(ਲੰਬਾਈ × ਚੌੜਾਈ + ਚੌੜਾਈ × ਉੱਚਾਈ + ਉੱਚਾਈ × ਲੰਬਾਈ) m^2

$$= 2(6 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 5)\ m^2 = 140\ m^2$$

ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 × (ਲੰਬਾਈ + ਚੌੜਾਈ) × ਉੱਚਾਈ

$$= 2 \times (6 + 5) \times 4 = 2 \times 11 \times 4$$

$$= 88\ m^2$$

9.7.2 ਘਣ

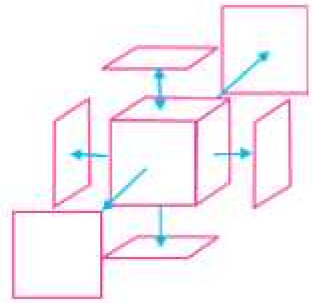
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਘਣਾਵ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਘਣ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਫ਼ਲਕਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਘਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 × ਇੱਕ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $4\ell^2$

ਘਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੱਤਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 6 × ਇੱਕ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 6\ \ell^2$

ਜਦੋਂ ਕਿ l ਘਣ ਦੀ ਇਕ ਭੁਜਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.36

ਉਦਾਹਰਨ 9.20 ਘਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਇਸਦੀ ਭੁਜਾ 10 cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $6\ell^2$,

ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ = 10cm

ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $6 \times (10 \times 10)\ cm^2 = 600\ cm^2$

ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $4\ell^2 = 4 \times (10)^2$

$= 400\ cm^2$

ਉਦਾਹਰਨ 9.21 ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $600cm^2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਘਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 600cm^2$

$$\Rightarrow \quad 6\ell^2 = 600 \Rightarrow \ell^2 = \frac{600}{6} = 100$$

$$\Rightarrow \quad \ell^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \ell = 10$$

ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ = 10cm.

ਉਦਾਹਰਨ 9.22 ਵਾਸੂ 15m×10m×7m ਅਕਾਰ ਦੇ ਘਣਾਵ ਅਕਾਰ ਹਾਲ ਦੀ ਛੱਤ ਅਤੇ ਕੰਧਾਂ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪੇਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ $100m^2$ ਪੇਂਟ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪੇਂਟ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਡੱਬੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹੋਣਗੇ ?

ਹੱਲ : ਹਾਲ ਦਾ ਮਾਪ : 15m × 10m × 7m

ਕਿਉਂਕਿ ਕੰਧਾਂ ਅਤੇ ਛੱਤ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

∴ ਹਾਲ ਦਾ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਖੇਤਰਫਲ = 4 ਕੰਧਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਛੱਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 2\ (\ell+b)\ h + \ell b$

$= 2\ (15+10) \times 7 + 15 \times 10$

$= 2 \times 25 \times 7 + 150 = 350 + 150 = 500m^2$

⇒ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 500m^2$

ਪੇਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਨਾਲ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਖੇਤਰਫਲ = $100m^2$

∴ ਡੱਬਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{500}{100} = 5$

ਇਸ ਲਈ ਕਮਰੇ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕਰਨ ਲਈ 5 ਡੱਬੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.23 ਕਿਸੀ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰਨ 'ਤੇ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ = ℓ

ਘਣ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ = $6\ell^2$

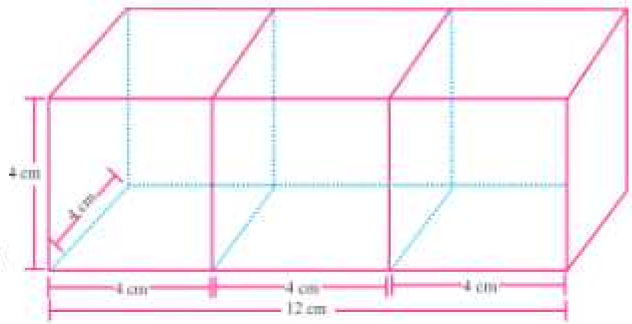
ਜੇਕਰ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਦੁੱਗਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੀਂ ਭੁਜਾ = 2ℓ

$\therefore$ ਖੇਤਰਫਲ = $6(2\ell)^2 = 4(6\ell^2) = 4 \times$ (ਘਣ ਦਾ ਅਸਲ ਖੇਤਰਫਲ)

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੀ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.24 4 ਸਮ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਤਿੰਨ ਘਣ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਜੋੜੇ ਗਏ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘਣਾਵ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਘਣਾਵ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਗਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 9.37

$l = 4 + 4 + 4 = 12$cm, b = 4cm,

h = 4cm

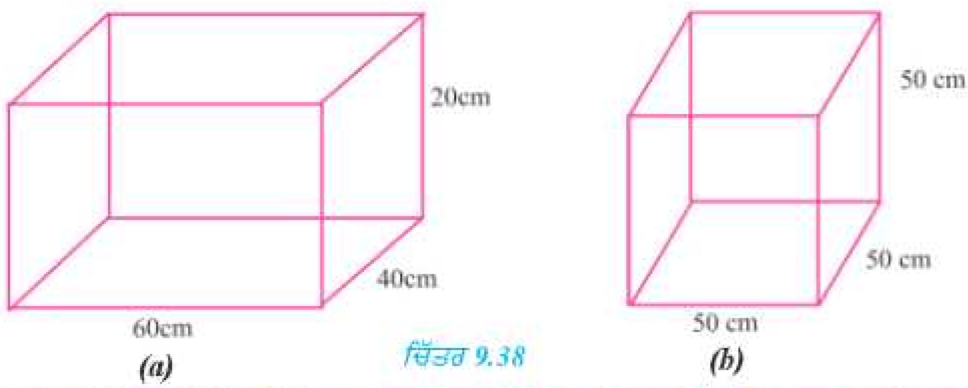
$\therefore$ ਘਣਾਵ ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ

$= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(12 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 12)$

$= 2(48 + 16 + 48) = 224\text{cm}^2$

ਉਦਾਹਰਨ 9.25 ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਣਾਵਕਾਰ ਬਕਸੇ ਵਿਖਾਏ ਗਏ ਹਨ, ਕਿਸ ਬਕਸੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟ ਸਾਮਾਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ ?



ਚਿੱਤਰ 9.38

ਹੱਲ : *ਬਕਸੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢਣਾ ਪਵੇਗਾ।*

ਬਕਸਾ (a) ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ $= 2(l \times b + b \times h + h \times l)$

$= 2(60 \times 40 + 40 \times 20 + 20 \times 60)\ \text{cm}^2$

$= 8800\ \text{cm}^2$

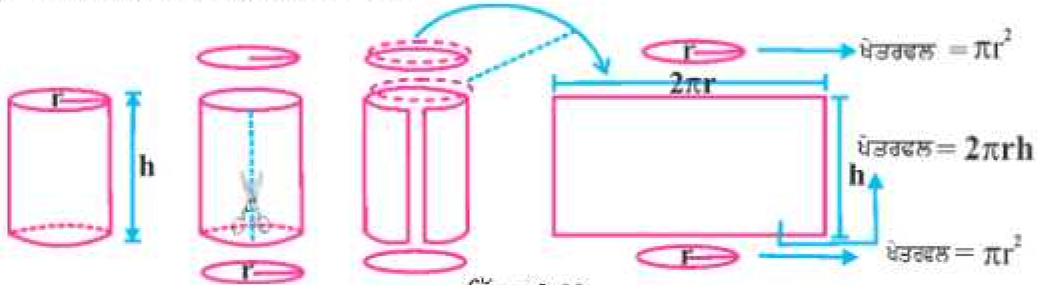
ਬਕਸਾ (b) ਦਾ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ

$= 6l^2 = 6 \times 50 \times 50 = 15000\ \text{cm}^2$

ਇਸ ਲਈ ਬਕਸਾ (a) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ।

9.7.3 ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸਿਲੰਡਰ

ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫ਼ਲਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫ਼ਲਕਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾਖੰਡ ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸਿਲੰਡਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

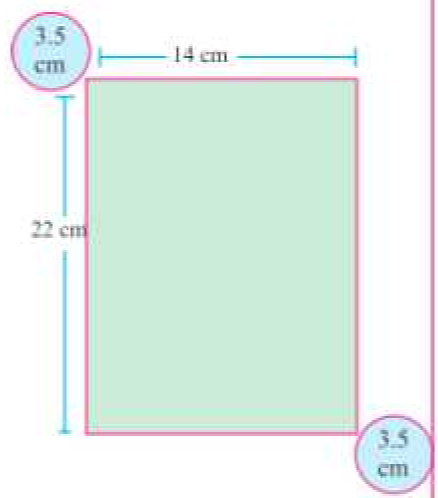


ਚਿੱਤਰ 9.39

ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸ ਦੀ ਵਕਰ (ਗੋਲਾਈ ਵਾਲੀ) ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ $2\pi r$ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ h ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੀ ਆਇਤ ਤੋਂ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $2\pi rh$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆਵਾਂ

ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟ ਲਵੋ।



ਕਿਰਿਆ : ਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਸਮਗੱਰੀ : ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ, ਜਮੈਟਰੀ, ਰੰਗਦਾਰ ਸਕੈਚ।

ਵਿਧੀ :

1. ਇੱਕ ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਲਵੋ ਅਤੇ ਬੰਦ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਸਕੈਚ ਬਣਾਓ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 22cm × 14cm ਅਤੇ ਦੀ ਆਇਤ ਅਤੇ 3.5cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰ ਹੋਣ।
2. ਚਾਰਟ ਪੇਪਰ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਲ ਨੂੰ ਕੱਟ ਲਵੋ।
3. ਜਦੋਂ ਆਇਤ ਨੂੰ 22 cm ਭੁਜਾ ਦੇ ਦੁਆਲੇ ਮੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ 14 cm ਲੰਬਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਖੁੱਲਾ ਸਿਲੰਡਰ ਬਣ ਜਾਵੇਗਾ।
4. ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5cm ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਂ ਜਿਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 = 22\text{cm}$ ਸਿਲੰਡਰ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ ਬੰਦ ਕਰਨਗੇ।
5. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਬੰਦ ਸਿਲੰਡਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਨਿਰੀਖਣ :

ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਜਾਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + 2 × ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= 22\text{cm} \times 14\text{cm} + 2 \times \pi r^2$

$= (2\pi r) \times h + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

{ ਪਗ 4 ਅਨੁਸਾਰ $2\pi r = 22\text{cm}$ ਅਤੇ ਪਗ ਅਨੁਸਾਰ $h = 14\text{cm}$ }

ਇਸ ਲਈ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4,

$= 2\pi r\,(h + r)$

ਨੋਟ— 'ਪਾਸਵੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ' ਉਹਨਾ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਲਈ ਵਰਤਿਆਂ ਜਾਂਦਾ ਸ਼ਬਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮਤਲ ਫਲਕਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਘਣ, ਘਣਾਵ ਆਦਿ। ਜਦੋਂਕਿ ਸ਼ਬਦ 'ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ' ਉਹਨਾਂ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਕ ਸਤ੍ਹਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਸਿਲੰਡਰ, ਸ਼ੰਕੂ, ਗੋਲਾ ਆਦਿ।

ਮੌਖਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਪ੍ਰ.1. ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਧਾਰ ਕੀ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— ਚੱਕਰ

ਪ੍ਰ.2. ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— πr^2

ਪ੍ਰ.3. ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਉੱਤਰ— $2\pi rh$

ਉਦਾਹਰਨ **9.26 ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਗਏ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਅਤੇ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : **ਸਿਲੰਡਰ** ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (r), 2 m ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ (h) 5 m ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 9.40

ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\pi r\,(h + r)$

$2\pi \times 2\,(5+2)\text{ m}^2 = 2\pi \times 2 \times 7\text{ m}^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 7\text{ m}^2 = 88\text{ m}^2$

ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 5 = 20\pi = 20 \times \frac{22}{7}\text{m}^2 = \frac{440}{7}\text{m}^2$

ਉਦਾਹਰਨ **9.27. ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ 22cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 7cm ਹੈ।**

ਹੱਲ : **ਸਿਲੰਡਰ** ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\pi rh$

$= (2\pi r) \times h =$ (ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ) $\times h$

$= 22 \times 7 = 154\text{cm}^2$

ਉਦਾਹਰਨ **9.28. ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4224cm² ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਕੱਟ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 33 ਸਮ ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਸ਼ੀਟ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਸ਼ੀਟ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :

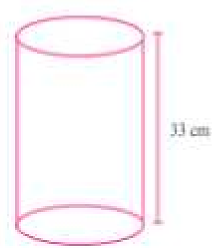
$\Rightarrow$ **ਸਿਲੰਡਰ** ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4224\text{ cm}^2$

$\Rightarrow$ ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $\times$ ਉੱਚਾਈ $= 4224$

ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $\times 33 = 4224$

ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $= \frac{4224}{33}$

ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $= 128$ cm



ਚਿੱਤਰ 9.41

ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ = ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 128 cm

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਕਾਰ ਸ਼ੀਟ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $= 2(l + b)$

$= 2(128 + 33) = 2 \times 161 = 322$ cm

ਉਦਾਹਰਨ 9.29. ਕਿਸੀ ਸੜਕ ਨੂੰ ਪੱਧਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਰੋਡ ਰੌਲਰ 750 ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸੜਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਰੋਡ ਰੌਲਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 84 ਸਮ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 1 ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਰੋਡ ਰੌਲਰ ਦਾ ਵਿਆਸ = 84 cm

$\therefore$ ਰੋਡ ਰੌਲਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{84}{2} = 42\text{cm}$

ਰੋਡ ਰੌਲਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (h) $= 1\text{m} = 100\text{cm}$

750 ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰੋਡ ਰੌਲਰ ਵਲੋਂ ਪੱਧਰਾ ਕੀਤੀ ਸੜਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 750 × ਰੋਲਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$\Rightarrow \quad = 750 \times 2\pi rh$$

$$= 750 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 100$$

$$= 19800000 \text{ cm}^2$$

$$= 19800000\text{cm}^2 = \frac{19800000}{100 \times 100}\text{m}^2$$

$$= 1980\text{m}^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 9.30 ਚਿੱਤਰ 9.42 (a) ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ/ਪਸਾਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 9.42

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.42 (a) ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\pi rh \text{ cm}^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 7 \text{ cm}^2$$

$$= 154 \text{ cm}^2$$

ਚਿੱਤਰ 9.42 (b) ਇੱਕ ਘਣ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4l^2 = 4 \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$$

$$= 196 \text{ cm}^2$$

ਚਿੱਤਰ 9.43

ਉਦਾਹਰਨ 9.31 ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਦੁੱਧ ਪਾਊਡਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਡੱਬੇ, ਜਿਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 14 cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 20 cm ਹੈ ਵਿੱਚ ਪੈਕ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਡੱਬੇ ਦੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਇੱਕ ਸਟਿੱਕਰ (ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ) ਲਗਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਟਿੱਕਰ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ 1cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਟਿੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਸਟਿੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਟਿੱਕਰ ਸਿਲੰਡਰਾਕਾਰ ਡੱਬੇ ਦੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ

ਲੱਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 20 cm ਹੈ, ਅਤੇ ਸਟਿੱਕਰ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ 1 cm ਦੀ ਵਿੱਥ ਤੋਂ ਲੱਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਟਿੱਕਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ = 18

ਸਟਿੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (2 \times \pi \times$ ਚੌੜਾਈ $\times$ ਉੱਚਾਈ$)\ cm^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 18\right)\ cm^2$$

$$= 792\ cm^2$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮਾਪ ਲਈ ਘਣਾਵ ਦਾ ਕੁੱਲ ਅਤੇ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 6cm × 5cm × 4cm (ii)15m × 12m × 8m (iii) 8m × 10m × 8m
2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮਾਪ ਲਈ ਘਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਅਤੇ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 8cm (ii) 12m (iii) 15mm
3. ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2400 cm^2 ਹੋਵੇ।
4. ਨੀਤੂ ਨੇ 3m × 2m × 1.5 m ਮਾਪ ਦੀ ਅਲਮਾਰੀ ਨੂੰ ਬਾਹਰੋਂ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਅਲਮਾਰੀ ਦੇ ਆਧਾਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਸਾਰੀ ਅਲਮਾਰੀ ਉੱਪਰ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਕਿੰਨ੍ਹੇ ਖੇਤਰਫਲ ਉੱਪਰ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਹੈ?
5. ਆਸ਼ਿਮ ਨੇ 15m × 12m × 7m. ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਆਪਣੇ ਕਮਰੇ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕੀਤਾ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਉਸਨੇ ਕਿੰਨਾ ਖੇਤਰਫਲ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਫ਼ਰਸ਼ ਨੂੰ ਛੱਡਿਆ ਹੋਵੇ।
6. ਮਨੂੰ ਆਪਣੇ ਕਮਰੇ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕਰਵਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਕਮਰੇ ਦਾ ਮਾਪ 20m × 12m × 15m ਹੋਵੇ ਤਾਂ 6 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਫ਼ਰਸ਼ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਕਮਰੇ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਸੂਟਕੇਸ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ 80cm× 40cm × 24cm ਹੈ, ਨੂੰ ਕੱਪੜੇ ਨਾਲ ਢਕਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਸੂਟਕੇਸ ਨੂੰ ਢੱਕਣ ਲਈ 96cm ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਮੀਟਰ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ ?
8. ਕਿਸੇ ਘਣ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ, ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਭੁਜਾ ਨੂੰ (i) ਤਿਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ! (ii) ਅੱਧਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ?
9. 5 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਤਿੰਨ ਘਣ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘਣਾਵ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਅਤੇ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :
    (i) r = 7cm, h = 20cm(ii) r = 14cm, h = 15m (iii) ਵਿਆਸ = 7cm, h = 12cm
11. ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ 77cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 12 cm ਹੈ।
12. ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 1056 cm^2 ਅਤੇ ਉਚਾਈ 12cm ਹੋਵੇ।
13. ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 cm ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 968 cm^2 ਹੋਵੇ।
14. ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਤੋ ਖੁੱਲ੍ਹੀ ਸਿਲੰਡਰਾਕਾਰ ਪਾਇਪ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21 cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 50 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

15. ਇੱਕ ਰੋਡ ਰੋਲਰ ਸੜਕ ਨੂੰ ਪੱਧਰਾ ਕਰਨ ਲਈ 950 ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸੜਕ ਦਾ ਪੱਧਰ ਕੀਤਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਰੋਲਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 48 cm ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 1 ਮੀ. ਹੈ।

16. ਇੱਕ ਬੰਦ ਸਿਲੰਡਰਾਕਾਰ ਟੈਂਕ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਮੀ. ਅਤੇ ਉਚਾਈ 3 ਮੀ. ਨੂੰ ਧਾਤ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਤੋਂ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੁ. 20 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਖ਼ਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :**

(i) ਘਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(a) $6l^2$ (b) $5l^2$ (c) $4l^2$ (d) $2l^2$

(ii) ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

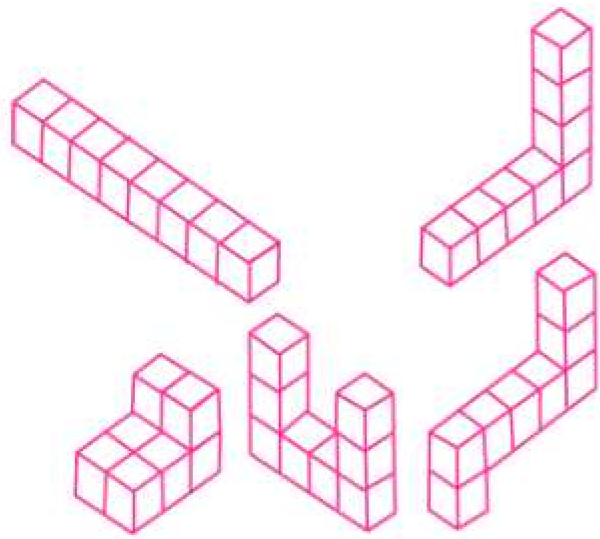
(a) $2\pi rh$ (b) πrh (c) $2\pi r$ (d) $\pi r^2 h$

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(a) 2 ਗੁਣਾ (b) 4 ਗੁਣਾ (c) 3 ਗੁਣਾ (d) ਗੁਣਾ

9.8 ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਸਿੰਲਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ (Volume of cuboid, cube and cylinder)

ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਗਈ ਥਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਮਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸ ਵਿੱਚ ਪਈ ਅਲਮਾਰੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਲਮਾਰੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਏ ਬਕਸੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਕਾਈ ਵਰਗ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਕਾਈ ਘਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਵਰਗਾਕਾਰ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਇਤਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਠੋਸ ਨੂੰ ਘਣ ਅਕਾਰ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 9.44

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿਚਲੇ ਠੋਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 ਇਕਾਈ ਘਣ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੀ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸ ਵਿਚਲੇ ਘਣ ਆਕਾਰ ਨੂੰ ਗਿਣ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਘਣ ਇਕਾਇਆਂ ਜੋ ਅਕਸਰ ਵਰਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

$$1 \text{ cubic cm} = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cubic m} = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^3$$

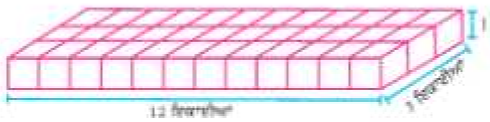
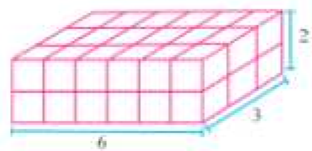
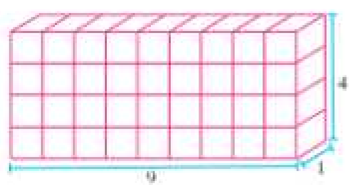
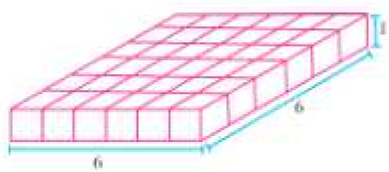
$$1 \text{ cubic mm} = 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} = 1 \text{mm}^3$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

9.8.1 ਘਣਾਵ (Cuboid)

ਬਰਾਬਰ ਆਕਾਰ ਦੇ 36 ਘਣ ਲਵੋ (ਘਣ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ)। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਬਦਲ ਕੇ ਘਣਾਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਗਾਓ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਈ ਢੰਗ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਸਾਰਨੀ

	ਘਣਾਵ	ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਉੱਚਾਈ	$l \times b \times h = V$
(*i*)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(*ii*)					
(*iii*)					
(*iv*)					

ਅਸੀਂ ਕੀ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ?

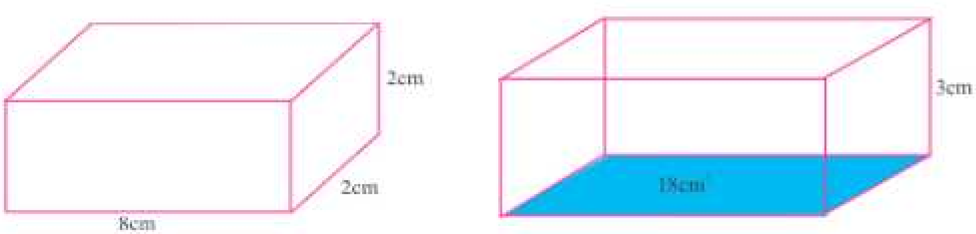
ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਣ ਲਈ 36 ਘਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ 36 ਇਕਾਈ ਘਣ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਉਚਾਈ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ $= l \times b \times h$

ਕਿਉਂਕਿ $l \times b$ ਆਧਾਰ ਦੇ ਖੇਤਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ

ਉਦਾਹਰਨ **9.32** **ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ 9.45. (a) ਅਤੇ 9.45 (b) ਵਿਖਾਏ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**



(a) (b)

ਚਿੱਤਰ 9.45

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.45 (a) ਵਿੱਚ ਘਣਾਵ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 8 cm, 2 cm ਅਤੇ 2 cm ਹਨ।

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $l \times b \times h = (8 \times 2 \times 2)\ cm^3$

$= 32\ cm^3$

ਚਿੱਤਰ 9.45 (b), ਵਿੱਚ

ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $18\ cm^2$ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਉੱਚਾਈ = 3 cm ਹੈ।

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ $(18 \times 3)\ cm^2 = 54\ cm^3$

9.8.2 ਘਣ (Cube)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣ, ਘਣਾਵ ਦਾ ਹੀ ਇੱਕ ਰੂਪ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $l = b = h$.

ਇਸ ਲਈ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $l \times l \times l = l^3$ ਭਾਵ $(\text{ਭੁਜਾ})^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.33. ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ (i) 5 cm (ii) 2.5 cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(\text{ਭੁਜਾ})^3$

(i) ਭੁਜਾ = 5cm

∴ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(5)^3 = 125 cm^3$

(ii) ਭੁਜਾ = 2.5cm

∴ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(2.5)^3 = 15.625 cm^3$

ਉਦਾਹਰਨ 9.34 ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਅਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $180\ cm^2$ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ $900\ cm^3$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $900\ cm^3$

ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $180\ cm^2$;

ਮੰਨ ਲਓ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ h cm ਹੈ।

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ

$900 = 180 \times h$

$$h = \frac{900}{180} = 5\ cm$$

ਉਦਾਹਰਨ 9.35 ਇੱਕ ਘਣਾਵ 60 cm × 54 cm × 30 cm ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। 6 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣ ਇਸ ਘਣਾਵ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(60 \times 54 \times 30)\ cm^3 = 97200\ cm^3$

ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $(6 \times 6 \times 6)\ cm^3 = 216\ cm^3$

∴ ਛੋਟੇ ਘਣ ਜੋ ਘਣਾਵ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ = $\frac{\text{ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ}}{\text{ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ}} = \frac{97200}{216} = 450$

9.8.3 ਸਿਲੰਡਰ (Cylinder)

ਘਣਾਵ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $l \times b \times h$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖਿਆ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

ਘਣਾਵ ਦੀ ਤਰਾਂ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਉੱਪਰ ਵਾਲਾ ਹਿੱਸਾ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਪਾਸਵੇਂ ਫ਼ਲਕ ਵੀ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ।

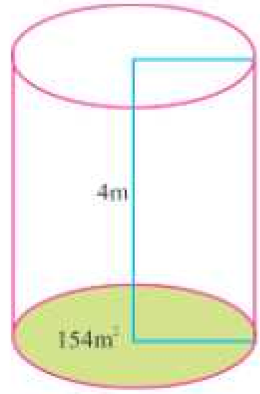
ਇਸ ਲਈ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉੱਚਾਈ

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

ਜਦੋਂਕਿ r, ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.36 ਚਿੱਤਰ 9.46 (a) ਅਤੇ 9.46 (b) ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a)



(b)

ਚਿੱਤਰ 9.46

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.46 (a), ਵਿੱਚ

ਅਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ = 7 cm

ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉਚਈ = 10 cm

ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\pi r^2 h = \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10\right)$ cm^3

$= 1540\ cm^3$

ਚਿੱਤਰ 9.46 (b), ਵਿੱਚ

ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 154 m^2

ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉਚਾਈ = 4 m,

ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉੱਚਾਈ

$= (154 \times 4)\ m^3 = 616\ m^3$

9.9 ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਸਮਰੱਥਾ (ਸਮਾਈ)

ਆਇਤਨ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਗਈ ਥਾਂ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮਰੱਥਾ ਕਿਸੀ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਭਰੀ ਗਈ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਣੀ ਦੀ ਬੋਤਲ ਵਿੱਚ 1000 cm^3 ਪਾਣੀ ਆ ਸਕਦਾਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਾਣੀ ਦੀ ਬੋਤਲ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ 1000 cm^3 ਹੈ।

ਸਮਰੱਥਾ ਨੂੰ ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਿਟਰ ਅਤੇ cm^3 ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$1\ m\ell = 1\ cm^3$; $1L = 1000\ cm^3$.

ਹੁਣ $1\ m^3 = (100 \times 100 \times 100)\ cm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000L$

ਉਦਾਹਰਨ 9.37 ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਦਾ ਬਰਤਨ ਬੇਲਣਕਾਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1.5 m ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 7 m. ਹੈ। ਬੇਲਨ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੁੱਧ ਵਾਲੇ ਟੈਂਕ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\pi r^2 h$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 7\right)\ m^3$$

$= 49.5\ m^3 = 49.5 \times 1000 l$ $\quad [\because 1m^3 = 1000 l]$

$= 49500\ l$

ਉਦਾਹਰਨ 9.38 **ਇੱਕ 11 cm × 4 cm ਵਾਲੇ ਆਇਤਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ 4 cm ਉਚਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = r cm ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉਚਾਈ = 4 cm ਹੈ।

ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ = ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ

$$\Rightarrow \quad 2\pi r = 11$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11 \Rightarrow \quad r = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ $V = \pi r^2 h$

$$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4\right) \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3$$

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਮਾਪ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

   (i) 4m, 3m, 5m (ii)12cm, 8cm, 10cm (iii) 1.5cm , 2m, 3.4m

2. ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

   (i) 6cm (ii) 12cm (iii) 1.5m

3. ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 24 cm^2 ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 3 cm ਹੈ।

4. ਕਿਸੀ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰਨ 'ਤੇ

   (1) ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ?

   (2) ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿੰਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ?

5. ਉਸ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਆਇਤਨ 275 cm^3 ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 25 cm^2 ਹੋਵੇ।

6. ਇਕ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਗੋਦਾਮ ਦਾ ਮਾਪ 60 m × 32 m × 30 m ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣ ਆਕਾਰ ਦੇ ਬਕਸੇ ਗੋਦਾਮ ਵਿੱਚ ਸਟੋਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 ਸਮ^3 ਹੋਵੇ ?

7. ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ:

   (i) r = 7cm, h = 12cm (ii) r = 3.5cm, h = 15cm (iii) r = 14m, h = 10m

8. ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਆਇਤਨ 1.54 m^3 ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 140 cm ਹੋਵੇ।

9. ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 1.54 m^2 ਅਤੇ ਉਚਾਈ 3.5 m ਹੋਵੇ।

10. ਇੱਕ 14 cm ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਆਇਤਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਇਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜ ਕੇ 20 ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਇੱਕ ਘਣ ਆਕਾਰ ਦੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ 60 ਲਿਟਰ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੈਂਕ ਦਾ ਆਇਤਨ 108 m^3 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਟੈਂਕ ਨੂੰ ਭਰਨ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ-ਘੰਟੇ ਲਗਣਗੇ ?

12. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $\pi r^2 h$ (b) πr^2 (c) $2\pi rh$ (d) $2\pi r$

(ii) 4m × 2.5m × 2m ਮਾਪ ਦੇ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) $20m^3$ (b) $40m^3$ (c) $30m^3$ (d) $200m^3$

(iii) ਜੇਕਰ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿੰਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ?

(a) 2 ਗੁਣਾ (b) 4 ਗੁਣਾ (c) 8 ਗੁਣਾ (d) 6 ਗੁਣਾ

(iv) $1l$ = ...cm^3

(a) 1000 (b) 100 (c) 10 (d) l

(v) 1.1 ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਹੋਵੇਗਾ :

(a) 13.31 (b) 1.331 (c) 133.1 (d) 1331

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋ ਜਾਣਗੇ :

- *ਸਮਤਲ ਅਤੇ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਦੇ।*
- *ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ (ਚਤੁਰਭੁਜ) ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ (ਘਣਾਵ, ਘਣ, ਵੇਲਣ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤਣ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. (i) ਪਰਿਮਾਪ -18 cm, ਖੇਤਰਫਲ-12 cm^2 (ii) ਪਰਿਮਾਪ-40 cm, ਖੇਤਰਫਲ-91 cm^2

(iii) ਪਰਿਮਾਪ-32 cm, ਖੇਤਰਫਲ-64 cm^2 (iv) ਪਰਿਮਾਪ-72 cm, ਖੇਤਰਫਲ-308 cm^2

(v) ਪਰਿਮਾਪ–64cm ਖੇਤਰਫਲ-128cm^2

2. (i) ਖੇਤਰਫਲ-3.08 cm^2, ਪਰਿਮਾਪ-7.2 cm (ii) ਖੇਤਰਫਲ-63 cm^2, ਪਰਿਮਾਪ-46 cm

(iii) ਖੇਤਰਫਲ-7.28 cm^2, ਪਰਿਮਾਪ-8.4 cm

3. ਵਰਗ, 100 m^2 4. 24 5. ₹19500

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. (i) 24 cm^2 (ii) 21 cm^2 (iii) 24 cm^2 (iv) 48 cm^2 (v) 37.5 cm^2 (vi) 28 cm^2

2. 40 cm 3. 252 m^2 4. 45 cm^2 5. 50 cm^2 6. 38.4 m^2 7. 24 cm^2;6cm

8. 20500m^2 9. 25m 10. 0.88m^2 11. 691.20

12. (i) (b) (ii) (d) (iii) (a)

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. 24 cm^2 2. 150 m^2 3. 100 cm^2 4. 128 cm^2 5. 31.75 cm^2

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. (i) 88 cm^2, 148cm^2 (ii) 432cm^2, 792m^2 (iii) 288m^2; 448m^2

2. (i) 256 cm^2; 384cm^2 (ii) 576cm^2; 864m^2 (iii) 900mm^2; 1350mm^2

3. 20 cm 4. 21m^2 5. 558m^2 6. ₹7200 7. 144cm

8. (i) 9 ਗੁਣਾ (ii) ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ 9. 350cm^2

10. (i) 880cm^2 ; 1188cm^2 (ii) 1320cm^2 ; 2552cm^2 (iii) 264cm^2 ; 341cm^2

11. 924cm 12. 14cm 13. 15cm 14. 6600cm^2 15. 2508m^2

16. ₹ 8800 17. (i) (c), (ii) (a), (iii) (b)

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. (i) 60 m^3 (ii) 960cm^3 (iii) 10.4m^3

2. (i) 216cm^3 (ii) 1728cm^3 (iii) 3.375m^3

3. 72 cm^3 4. (a) 4 ਗੁਣਾ (b) 8 ਗੁਣਾ

5. 11 cm 6. 7200 7. (i) 1848 cm^3 (ii) 577.5cm^3 (iii) 6160m^3

8. 1m 9. 5.39m^3 10. 17600cm^3 11. 30h

12. (i) (b) (ii) (a) (iii) (c) (iv) (a) (v) (b)

ਅਧਿਆਇ 10

ਘਾਤ ਅੰਕ ਅਤੇ ਘਾਤ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਾਤ ਅੰਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ।*
- *ਘਾਤ-ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਬਾਰੇ।*
- *ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਅਤੇ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਬਾਰੇ।*
- *ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ/ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਰਾਹੀਂ ਮਾਣਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ।*

10.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਘਾਤਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ 2 ਦੀ ਘਾਤ 6 ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ 2 ਆਧਾਰ (base) ਹੈ ਅਤੇ 6 ਘਾਤ ਅੰਕ (Exponent) ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 2475 ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਘਾਤ ਅੰਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

$2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

> ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ
> 2 ਦੀ ਘਾਤ 6
>
> ਭਾਵ $(2)^6 \rightarrow$ ਘਾਤ ਅੰਕ
> □ ↓
> 2 ਆਧਾਰ

10.2 ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕ (Powers with Negative Exponents)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ ਅਤੇ $2^n = 2 \times 2 \times 2 \times$ .... n ਵਾਰੀ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ 2^{-3} ਦਾ ਮੁੱਲ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। (ਜਿੱਥੇ n ਇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 = 8 \div 1$

$2^2 = 2 \times 2 = 4 = 8 \div 2$

$2^1 = 2 = 2 = 4 \div 2$

$2^0 = 1 = 2 \div 2$

[ਹਰੇਕ ਪਗ ਵਿੱਚ ਪਿਛਲੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਆਧਾਰ 2 ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।]

ਉਪਰਲੇ ਪੈਟਰਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ

$2^0 = 1$

$2^{-1} = 1 \div 2 = \frac{1}{2}$

$$2^{-2} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^2} \div 2 = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^3}$$

ਹੁਣ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 = \frac{81}{3}$$ [ਹਰੇਕ ਪਗ ਵਿੱਚ ਪਿਛਲੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਆਧਾਰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।]

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ :

$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ ਜਾਂ $2^2 = \frac{1}{2^{-2}}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ ਜਾਂ $2^3 = \frac{1}{2^{-3}}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ ਜਾਂ $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$ ਆਦਿ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 'a' ਲਈ

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ਜਿੱਥੇ m, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ a^{-m}, a^m ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਹੈ, ਭਾਵ $a^{-m} \times a^m = 1 = a^m \times a^{-m}$

ਨੋਟ— a^m ਅਤੇ a^{-m} ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ *m* ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^m$$

ਉਦਾਹਰਨ 10.1 ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 4^{-3} (ii) $(-5)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

ਹੱਲ : (i) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4\times4\times4} = \frac{1}{64}$

(ii) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5)\times(-5)} = \frac{1}{25}$

(iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3} = \frac{8}{27}$

ਉਦਾਹਰਨ 10.2 ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 3^{-4} (ii) 8^{-2} (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a^{-m} ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ a^m ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) 3^{-4} ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= 3^4 = 3\times3\times3\times3\times3 = 81$

(ii) 8^{-2} ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਲਟ $= 8^2 = 8 \times 8 = 64$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $= \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{64}{27}$

ਉਦਾਹਰਨ 10.3 ਘਾਤ ਅੰਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) 1024.54 (ii) 1286.256

ਹੱਲ : (i) $1024.54 = 1 \times 1000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 4 \times 1 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100}$

$= 1\times 10^3 + 0 \times10^2 + 2 \times10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times10^{-2}$

(ii) $1286.256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$

$= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 8 \times10^1 + 6 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$

10.3 ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ (Laws of Exponents)

7ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਲਈ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$; ਜਿੱਥੇ m ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਇਹ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q} = x$, ਲਈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$

ਹੁਣ $\left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^m}{q^m} \times \frac{p^n}{q^n} = \frac{p^{m+n}}{q^{m+n}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$

ਭਾਵ $\boxed{x^m \times x^n = x^{m+n}}$

ਕੀ ਇਹ ਨਿਯਮ ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?
ਆਓ ਇਸ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ :

(i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ ਅਤੇ $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

($\because$ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a ਲਈ)

ਹੁਣ $2^{-2} \times 2^{-3} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2 \times 2^3} = \frac{1}{2^{2+3}} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

ਭਾਵ $2^{-2} \times 2^{-3} = 2^{-5}$

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$

$= \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$

$= \frac{1}{(-3)^4 (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = \frac{1}{(-3)^7} = (-3)^{-7}$

ਇਸ ਲਈ $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = (-3)^{-7}$

(iii) $5^{-3} \times 5^4$

$= \frac{1}{5^3} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1$ $\left[\because \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

(ਜਿੱਥੇ m, n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, $(m > n)$ ਅਤੇ $a \neq 0$)

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ a ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ m, n ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^m = a^m \times b^m$

(v) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

ਉਦਾਹਰਨ 10.4 ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $3^5 \div 3^{-6}$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $5^2 \times 5^{-3} \times 5^6$

ਹੱਲ : (i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-3+(-4)} = (-2)^{-3-4}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= (-2)^{-7} = \frac{1}{(-2)^7}$ $(a^{-m} = \frac{1}{a^m})$

(ii) $3^5 \div 3^{-6}$

$= 3^{5-(-6)} = 3^{5+6} = 3^{11}$ $(\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n})$

(iii) $p^3 \times p^{-10}$

$= p^{3+(-10)} = p^{3-10} = p^{-7} = \frac{1}{p^7}$ $(a^m \times a^n = a^{m+n})$

(iv) $5^2 \times 5^{-3} \times 5^6$

$= 5^{2+(-3)} \times 5^6 = 5^{2-3} \times 5^6 = 5^{-1} \times 5^6$

$= 5^{-1+6}$

$= 5^5$

ਉਦਾਹਰਨ 10.5 **4^{-5} ਨੂੰ ਆਧਾਰ 2 ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।**

ਹੱਲ : $4 = 2 \times 2 = 2^2$

$4^{-5} = (2^2)^{-5} = 2^{2 \cdot (-5)}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

$= 2^{-10}$

$= \frac{1}{2^{10}}$ $(a^{-m} = \frac{1}{a^m})$

ਉਦਾਹਰਨ 10.6 **ਸਰਲ ਕਰੋ।**

(i) $(-4)^{-3} \times 5^{-3} \times (-5)^{-3}$ **(ii)** $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ **(iii)** $\frac{1}{8} \times 5^{-3}$

ਹੱਲ : (i) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

$= (-4 \times 5 \times -5)^{-3}$ ($a^m \times b^m = (ab)^m$ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

$= (100)^{-3}$

$= \frac{1}{100^3}$ [$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ]

(ii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[\because (-1)^4 = 1]$

(iii) $\frac{1}{8} \times 5^{-3} = \frac{1}{2^3} \times 5^{-3} = 2^{-3} \times 5^{-3} = (2 \times 5)^{-3} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

ਉਦਾਹਰਨ 10.7 **x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(-5)^{x+1} \times (-5)^3 = (-5)^7$ ਹੋਵੇ।**

ਹੱਲ : $(-5)^{x+1} \times (-5)^3 = (-5)^7$

$\Rightarrow$ $(-5)^{x+1+3} = (-5)^7$

$\Rightarrow \qquad (-5)^{x+4} = (-5)^7$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਆਧਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਅਤੇ 1 ਅਤੇ ਇਹ –1 ਨਹੀਂ ਹਨ (ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਨੋਟ ਦੇਖੋ) ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ।

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਘਾਤ ਅੰਕ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ 'ਤੇ

$x + 4 = 7 \Rightarrow x = 7 - 4$

$\Rightarrow \qquad x = 3$

ਨੋਟ— $x^n = 1$ ਜੇਕਰ $n=0$. ਇਹ ਸਿਧਾਂਤ ਉਸ ਸਮੇਂ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $x = 1$ ਜਾਂ $x = -1$ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ $x = 1$, ਤਾਂ $1^1 = 1^2 = 1^3 \ldots\ldots\ldots = 1^{-2}$ ਜਾਂ $1^n = 1$ ਅਸੀਮਿਤ n ਦੇ ਲਈ,

ਜੇਕਰ $x = -1$, $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^{-2} = \ldots\ldots = 1$ ਜਾਂ $(-1)^m = 1$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ

ਉਦਾਹਰਨ 10.8 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ **ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{3^4}{2^4}$ $\qquad \left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}\right]$

$= \frac{3^4}{2^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{2\times2\times2\times2}$

$= \frac{81}{16}$

ਉਦਾਹਰਨ 10.9 **ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i)** $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$ **(ii)** $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

ਹੱਲ : (i) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{4} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-7+4} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$

$= \left(\frac{8}{5}\right)^{3} = \frac{8^3}{5^3} = \frac{8\times8\times8}{5\times5\times5} = \frac{512}{125}$

(ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1} = \left\{\left(\frac{3}{1}\right)^{1} - \left(\frac{4}{1}\right)^{1}\right\}^{-1}$

$= (3-4)^{-1} = (-1)^{-1}$

$= \frac{1}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1$

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) 5^{-2} (ii) $(-3)^4$ (iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

2. ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

(i) $(-3)^5 \div (-3)^7$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-5)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$

(iv) $3^{-2} \times (-5)^{-2}$ (v) $(5^{-1} \times 6^{-1}) \times 2^{-1}$ (vi) $(2^{-7} \div 2^{-10}) \times 2^{-5}$

3. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $(2^0 + 4^{-1}) \times 3^2$ (ii) $(8^{-2} \times 2^{-1}) \div 2^{-2}$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ (iv) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1})^0$

(v) $\left\{\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}\right\}^2$ (vi) $\frac{8^{-1} \times 5^2}{2^{-3}}$

4. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $5^p \div 5^{-3} = 5^5$ ਹੋਵੇ।

5. m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\left(\frac{-2}{3}\right)^{13} \times \left(\frac{3}{-2}\right)^8 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2m-1}$ ਹੋਵੇ।

6. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\left(\frac{5}{6}\right)^7 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$ (ii) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right] \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

7. ਸਰਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{5^{-7} \times 6^{-5}}$ (ii) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$

8. (i) 8^{-3} ਨੂੰ ਆਧਾਰ 2 ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(ii) 125^{-4} ਨੂੰ ਆਧਾਰ 5 ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

9. **ਬਹੁ ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) $a^m \times a^n =$ ....

(a) a^{m-n} (b) a^{mn} (c) a^{m+n} (d) a^{m^n}

(ii) $3^7 \div 3^8 =$ ....

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3^{15} (d) 3^{56}

(iii) $(3^2 + 4^2)^0 =$ ....

(a) 2 (b) 25 (c) 1 (d) 7

(iv) $(5^3)^4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ = ...

(a) 5^7 (b) 5^{12} (c) 5^{-1} (d) 5^8

(v) ਜੇਕਰ $5^{2x-1} = 5^5$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

10.4.1 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਘਾਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ (Use of Exponents to express numbers in standard term)

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ

(i) ਜਿਵੇਂ ਧਰਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ 5970, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000

$= 5.97 \times 10^{24}$

(ਇੱਥੇ ਦਸ਼ਮਲਵ 24 ਸਥਾਨ ਖੱਬੇ ਹੋਇਆ ਹੈ)

(ii) ਧਰਤੀ ਦੀ ਸੂਰਜ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 149, 600, 000 ਕਿ ਮੀ.

$= 1.496 \times 10^8$ ਕਿ ਮੀ.

(ਇੱਥੇ ਦਸ਼ਮਲਵ 8 ਸਥਾਨ ਖੱਬੇ ਹੋਇਆ ਹੈ)

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ (10 ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਵੇ) ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ 10 ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ :

(i) ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ 0.00000005 ਲਓ।

ਸਾਡੇ ਕੋਲ $0.00000005 = \frac{5}{100000000} = \frac{5}{10^8} = 5 \times 10^{-8}$ (ਇੱਥੇ ਦਸ਼ਮਲਵ 8 ਸਥਾਨ ਸੱਜੇ ਹੋਇਆ ਹੈ।)

(ii) ਇੱਕ ਪੌਦੇ ਸੈੱਲ ਦਾ ਆਕਾਰ 0.00001275m ਹੈ।

$= \frac{1275}{100000000} = \frac{1275}{10^3 \times 10^5} = \frac{1.275}{10^5}$

$= 1.275 \times 10^{-5}$m (ਇੱਥੇ ਦਸ਼ਮਲਵ 5 ਸਥਾਨ ਸੱਜੇ ਹੋਇਆ ਹੈ)

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵੀ (ਦਸ਼ਮਲਵ ਬਿੰਦੂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਿਸਕਾ ਕੇ) ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 10.10. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋਂ।

(i) 0.00000021 (ii) 15240000 (iii) 6020000000000000

ਹੱਲ : (i) $0.00000021 = \frac{21}{100000000} = \frac{2.1}{10^7} = 2.1 \times 10^{-7}$

(ii) $15240000 = 1.524 \times 10^7$

(iii) $6020000000000000 = 6.02 \times 10^{15}$

10.4.2 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ (Conversion from Standard form number to usual decimal form)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਨੂੰ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਲਈਏ :

ਉਦਾਹਰਨ 10.11 ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) 4.63×10^6 (ii) 7.89×10^{-4} (iii) 5×10^{-8}

ਹੱਲ : (i) $4.63 \times 10^6 = \frac{463}{100} \times 10^6 = 463 \times 10^4 = 4630000$

(ii) $7.89 \times 10^{-4} = \frac{7.89}{10^4} = \frac{789}{100 \times 10^4} = 0.000789$

(iii) $5 \times 10^{-8} = \frac{5}{10^8} = \frac{5}{100000000} = 0.00000005$

10.4.3 ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਅਤੇ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ (Comparing very large and very small)

ਉਦਾਹਰਨ 10.12. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ :

(1) ਵਸਤੂ A ਜਿਸਦਾ ਭਾਰ 2.34×10^9kg ਅਤੇ ਵਸਤੂ B ਜਿਸਦਾ ਭਾਰ 1.17×10^8kg ਹੈ।

(2) 8.02×10^{-5} ਅਤੇ 0.802×10^{-6}

ਹੱਲ : (i) ਹੁਣ $\frac{\text{A ਦਾ ਭਾਰ}}{\text{B ਦਾ ਭਾਰ}} = \frac{2.34 \times 10^9}{1.17 \times 10^8} = \frac{2.34 \times 10^9}{1.17 \times 10^8} = 2 \times 10 = 20$

∴ A ਦਾ ਭਾਰ, B ਦੇ ਭਾਰ ਦਾ 20 ਗੁਣਾ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖਿਆ ਅਨੁਪਾਤ $= \frac{8.02 \times 10^{-5}}{0.802 \times 10^{-6}} = \frac{8.02 \times 10^{-5}}{8.02 \times 10^{-7}} = 10^2 = 100$

∴ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 100 ਗੁਣਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 10.13. ਜੇਕਰ ਹਾਈਡਰੋਜਨ ਤੱਤ ਦਾ ਪੁੰਜ 1.674×10^{-27}kg ਅਤੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪੁੰਜ 1.79×10^{-25}kg ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ = ਹਾਈਡਰੋਜਨ ਤੱਤ ਦਾ ਪੁੰਜ + ਚਾਂਦੀ ਤੱਤ ਦਾ ਪੁੰਜ

$= 1.674 \times 10^{-27} + 1.79 \times 10^{-25} = 1.674 \times 10^{-2} \times 10^{-25} + 1.79 \times 10^{-25}$

$= 0.01674 \times 10^{-25} + 1.79 \times 10^{-25}$

$= (0.01674 + 1.79) \times 10^{-25} = 1.80674 \times 10^{-25}$

ਉਦਾਹਰਨ 10.14. ਸੂਰਜ ਗ੍ਰਹਿਣ ਦੌਰਾਨ ਸੂਰਜ ਅਤੇ ਧਰਤੀ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 1.496×10^{11}km ਅਤੇ ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 3.84×10^8km ਹੈ। ਸੂਰਜ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸੂਰਜ ਗ੍ਰਹਿਣ ਦੌਰਾਨ ਚੰਦਰਮਾ , ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਸੂਰਜ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸਲਈ, ਚੰਦਰਮਾ ਅਤੇ ਸੂਰਜ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ = ਸੂਰਜ ਦੇ ਅਤੇ ਧਰਤੀ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ – ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ

$= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8} = 1496 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8}$

$= 10^{8} \times (1496 - 3.84) = 10^{8} \times 1492.16 = 1.492 \times 10^{11}$km

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

   (i) 0.000085 (ii) 0.0000000837 (iii) 4050000

   (iv) 37860000000 (v) 0.00000000000000942

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

   (i) 2.5×10^{4} (ii) 5×10^{-8} (iii) 7.59×10^{-4}

   (iv) 1.01001×10^{9} (v) 6.8×10^{12} (vi) 8.61492×10^{-6}

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

   (i) ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 0.07 mm ਹੈ।

   (ii) 1 ਮਾਈਕ੍ਰੋਨ $\frac{1}{1000000}$ m ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

   (iii) ਇੱਕ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨ ਦਾ ਚਾਰਜ 0.000,000,000,000,000,000 16 ਕੂਲੰਬ (Coulomb) ਹੈ।

   (iv) ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਗਤੀ 300,000,000m/sec ਹੈ।

   (v) ਧਰਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ 5,970,000,000,000,000,000,000,000kg ਹੈ।

   (vi) ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਇਕ ਤਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 0.00000 3m ਹੈ।

   (vii) 8ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 20mm ਹੈ।

4. **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।**

   ਜੇਕਰ ਪੌਦਾ ਸੈੱਲ ਦਾ ਆਕਾਰ = 0.000012m,

   ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਤਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ = 0.000003m

   ਅਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਮੋਟਾਈ = 0.000016m ਹੋਵੇ ਤਾਂ :-

   (i) ਪੌਦਾ ਸੈੱਲ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਨਾਲ

   (ii) ਪੌਦਾ ਸੈੱਲ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਤਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਨਾਲ

   (iii) ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਦੀ ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਤਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਨਾਲ

5. ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਧਾਂਗ (Stack) ਵਿੱਚ 26 mm ਮੋਟਾਈ ਦੀਆਂ 5 ਕਿਤਾਬਾਂ ਹਨ ਅਤੇ 0.014 mm ਮੋਟਾਈ ਦੀਆਂ 5 ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾ ਹਨ, ਧਾਂਗ (Stack) ਦੀ ਕੁੱਲ ਮੋਟਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

6. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

   (i) 1040352 ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ :

(a) 1.040352×10^6 (b) 1.040352×10^7

(c) 10.40352×10^6 (d) 10.40352×10^7

(ii) 1.6×10^4 ਦਾ ਸਾਧਾਰਨ ਰੂਪ :

(a) 16000 (b) 1600

(c) 160000 (d) 1.60000

(iii) 0.00001225 ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਹੈ ?

(a) 1.225×10^{-5} (b) 1.225×10^5

(c) 122.5×10^{-7} (d) 1.22×10^{-5}

(iv) 3.2805×10^{-4} ਦਾ ਸਾਧਾਰਨ ਰੂਪ :

(a) 302805 (b) 32805

(c) 0.32 805 (d) 0.00032805

(v) $3.03 \times 10^6 =$ ....

(a) 303000 (b) 30300000

(c) 3030000 (d) 300000

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੇ।
- ਘਾਤ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਾਰੇ।
- ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਅਤੇ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ।
- ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੇ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. (i) $\frac{1}{25}$ (ii) 81 (iii) 243

2. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{64}$ (iii) 81 (iv) $\frac{1}{225}$ (v) $\frac{1}{60}$ (vi) $\frac{1}{4}$

3. (i) $\frac{45}{4}$ (ii) $\frac{1}{32}$ (iii) 50 (iv) 1 (v) $\frac{256}{81}$ (vi) 25

4. (i) p=2 (ii) 9

5. m = 11

6. (i) $\frac{625}{1296}$ (ii) $\frac{1}{16}$

7. (i) 625 (ii) $\frac{625 \times t^4}{2}$

8. (i) 2^{-9} (ii) 5^{-12}

9. (i) c (ii) b (iii) c (iv) b (v) b

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. (i) 8.5×10^{-5} (ii) 8.37×10^{-9}
   (iii) 4.05×10^{6} (iv) 3.786×10^{10}
   (v) 9.42×10^{-15}

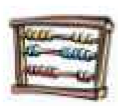
2. (i) 25000 (ii) 0.00000005 (iii) 0.000759
   (iv) 1010010000 (v) 6800000000000 (vi) 0.00000861492

3. (i) 7.0×10^{-2}mm (ii) 1.0×1.0^{-6}m (iii) 1.6×10^{-19} ਕੂਲੰਬ
   (iv) 3.0×10^{8}m/sec (v) 5.97×10^{24}kg (vi) 3.0×10^{-6}m
   (vii) 2.0×10mm

4. (i) ਪੌਦਾ ਸੈੱਲ ਦਾ ਅਕਾਰ, ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਦਾ ਲਗਪਗ $\frac{3}{4}$ ਗੁਣਾ ਹੈ।
   (ii) ਪੌਦਾ ਸੈੱਲ ਦਾ ਅਕਾਰ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਤਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਲਗਭਗ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ।
   (iii) ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਮੋਟਾਈ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿੱਪ ਦੀ ਤਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦਾ ਲਗਭਗ $\frac{16}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੈਂ।

5. 130.07mm

6. (i) a (ii) a (iii) a (iv) d (v) c



ਅਧਿਆਇ
11 ਸਿੱਧਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ।

- *ਸਿੱਧੇ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਬਾਰੇ।*
- *ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਵਰਗੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਦਾਂ ਬਾਰੇ।*
- *ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਅਤੇ ਉਪਲੱਬਧ ਜ਼ਮੀਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ।*

11.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਈ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਨਾਲ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਬਦਲਾਅ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵੱਧ ਖਰੀਦਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕੀਮਤ ਵੀ ਵੱਧਦੀ ਹੈ।
2. ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੀ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਵੱਧ ਵਿਆਜ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਵਾਹਨ ਦੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਹੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।
4. ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਉਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਾਂ ਘੱਟ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

   ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਨਾਲ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਬਦਲਾਅ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਮਨ ਆਪਣੇ ਲਈ ਚਾਹ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਉਹ 200 ਮਿਲੀ ਪਾਣੀ, 1 ਚਮਚ ਖੰਡ, 1/2 ਚਮਚ ਚਾਹ ਪੱਤੀ ਅਤੇ 30 ਮਿਲੀ ਦੁੱਧ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੀ ਹੈ। 5 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਚਾਹ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਹਰੇਕ ਮਦ (items) ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਮਾਤਰਾ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ।

   ਅਜਿਹੇ ਸਵਾਲਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਸਿੱਧਾ ਅਤੇ ਉਲਟਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

11.2 ਸਿੱਧਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ (Direct Proportion)

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ 1kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 20 ਹੈ ਤਾਂ 4kg ਖੰਡ ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 4kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ 1kg ਖੰਡ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ 4 ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਮੁੱਲ : $4 \times 20 =$ ₹80.

$\therefore$ ਖੰਡ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਧਣ 'ਤੇ (ਭਾਵ 1kg ਤੋਂ 4kg ਹੋਣ 'ਤੇ) ਮੁੱਲ ਵੀ ਵੱਧਦਾ ਹੈ (₹20 ਤੋਂ ₹80) ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 6kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹120 ਅਤੇ 10 kg ਦਾ ਮੁੱਲ ₹200 ਹੋਵੇਗਾ।

ਖੰਡ ਦਾ ਭਾਰ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	1	2	3	4	--
ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ)	20	$2 \times 20 = 40$	$3 \times 20 = 60$	$4 \times 20 = 80$	--

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਪੜ੍ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਕਿ ਖੰਡ ਦਾ ਭਾਰ ਵਧਣ 'ਤੇ, ਕੀਮਤ ਵੀ ਉਸੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ = $\dfrac{\text{ਖੰਡ ਦਾ ਭਾਰ}}{\text{ਖੰਡ ਦੀ ਕੀਮਤ}} = \dfrac{1}{20}$ (ਹਰੇਕ ਸ਼ਰਤ ਵਿੱਚ)

ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਨ ਲਓ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਾਰ ਦੀ ਮਾਈਲੇਜ (mileage) 21km/litre ਹੈ, ਤਾਂ 10 ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ ? ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ?

ਜੇਕਰ 1 ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ 21 km ਹੈ ਤਾਂ,

10 ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ $21 \times 10 = 210$ km ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 20 ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ $= 21 \times 20 = 420$ km ਹੋਵੇਗੀ।

ਮੰਨ ਲਓ ਤੇਲ ਦੀ ਖਪਤ x ਲਿਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ y ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਪੈਟਰੋਲ (ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ) (x)	1	10	20	25	30	45	50
ਦੂਰੀ (ਕਿਲੋ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ) (y)	21	210	420	--	--	--	--

ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਅਨੁਪਾਤ $\dfrac{x}{y}$ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਅ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਇਹ ਇੱਕ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ (ਮੰਨ ਲਉ k) ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $k = \dfrac{1}{21}$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜੇਕਰ , $\dfrac{x}{y} = k$ ਭਾਵ $x = ky$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $\dfrac{1}{21} = \dfrac{10}{210} = \dfrac{20}{420} =$ ------- .

ਇੱਥੇ 'ਅੰਸ਼' ਵਿੱਚ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਲਿਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਪਤ ਭਾਵ (x) 1, 10, 20, ... ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਵਿੱਚ 21, 210, 420, ... ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y **ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ** ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਤਾਂ,

ਅਸੀਂ $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ y ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ y_1 ਅਤੇ y_2 ਹਨ ਜਿਸ ਦੇ ਸੰਗਤ x ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ x_1 ਅਤੇ x_2 ਹਨ।

ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਅਤੇ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ, ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕੋ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਉੱਪਰ ਖਰਚੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵੀ **ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ** ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਲੜਕੇ, ਉਸਦੇ ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 15 ਸਾਲ, 45 ਸਾਲ ਅਤੇ 40 ਸਾਲ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।

	ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ	**ਪੰਜ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ**	**ਦੱਸ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ**
ਲੜਕੇ ਦੀ ਉਮਰ (B)	15	20	25
ਪਿਤਾ ਦੀ ਉਮਰ (F)	45	50	55
$\dfrac{B}{F}$	$\dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$	$\dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਾਤਾ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਵੀ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਿਆ ? ਕੀ B ਅਤੇ F ਇਕੱਠੇ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਹਨ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ 'ਹਾਂ' ਹੈਂ। ਹੁਣ ਕੀ $\frac{B}{F}$ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ 'ਨਾ' ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਹੋਰ ਦੋਸਤਾਂ ਨਾਲ ਵੀ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਨੋਟ—ਜੋ ਚਲ ਇਕੱਠੇ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਹਨ, ਉਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾ ਹੱਲ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਵਰਤਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.1 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ?**

(i)

x	8	15
y	40	75

(ii)

x	15	35
y	25	45

(iii)

x	8	9
y	6	12

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ਜਾਂ $\frac{x}{y} = k$ (ਅਚਲ)

(i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $x_1 = 8, x_2 = 15, y_1 = 40, y_2 = 75$ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ ਅਤੇ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{1}{5}$

ਇੱਥੇ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $x_1 = 15, x_2 = 35, y_1 = 25, y_2 = 45$ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x_2}{y_2}$

ਇੱਥੇ, x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $x_1 = 8, x_2 = 9, y_1 = 6, y_2 = 12$ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ਅਤੇ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x_2}{y_2}$

ਇੱਥੇ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.2 **ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ 'a' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?**

(i)

x	8	13
y	48	a

(ii)

x	a	12
y	45	60

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$$\therefore \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{48} = \frac{13}{a}$$

$$\Rightarrow \quad 8 \times a = 13 \times 48 \Rightarrow a = \frac{13 \times \cancel{48}^{6}}{\cancel{8}_{1}} = 78$$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$$\therefore \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{45} = \frac{12}{60}$$

$$\Rightarrow \quad a \times 60 = 12 \times 45$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\cancel{12}^{1} \times \cancel{45}^{9}}{\cancel{60}_{\cancel{5}_{1}}} = 9$$

ਉਦਾਹਰਨ 11.3. **3m ਕੱਪੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹105 ਹੈ ਤਾਂ ਉਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 5m, 7m, 10 m ਅਤੇ 13m ਕੱਪੜੇ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x m ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਉਸੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਉਸਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।

∴ ਇਹ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

x	3	5	7	10	13
y	105	y_2	y_3	y_4	y_5

∴ ਅਸੀਂ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $x_1 = 3, y_1 = 105, x_2 = 5$ ਤਾਂ $y_2 = ?$

ਹੁਣ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

ਇੱਥੇ $\frac{3}{105} = \frac{5}{y_2}$ ਇਸ ਲਈ $3y_2 = 5 \times 105$ ਜਾਂ $y_2 = \frac{5 \times \cancel{105}^{35}}{\cancel{3}_{1}} = 175$

(ii) ਇੱਥੇ $x_3 = 7$ ਇਸ ਲਈ $\frac{3}{105} = \frac{7}{y_3}$ ਜਾਂ $3y_3 = 7 \times 105$ ਜਾਂ $y_3 = \frac{7 \times \cancel{105}^{35}}{\cancel{3}_{1}} = 245$

(iii) ਇੱਥੇ $x_4 = 10$ ਇਸ ਲਈ $\frac{3}{105} = \frac{10}{y_4}$ ਜਾਂ $3y_4 = 10 \times 105$ ਜਾਂ $y_4 = \frac{10 \times \cancel{105}^{35}}{\cancel{3}_1} = 350$

(iv) ਇੱਥੇ $x_5 = 13$ ਇਸ ਲਈ $\frac{3}{105} = \frac{13}{y_5}$ ਜਾਂ $3y_5 = 13 \times 105$ ਜਾਂ $y_5 = \frac{13 \times \cancel{105}^{35}}{\cancel{3}_1} = 455$

ਨੋਟ— y_2 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ ਨਾਲ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $\frac{5}{175} = \frac{7}{y_3}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ y_3 ਅਤੇ ਹੋਰ ਮੁੱਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.4 ਇੱਕ ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ ਦੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਕਾਰ ਪਾਰਕਿੰਗ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

4 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	**₹60**
8 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	**₹100**
12 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	**₹140**
24 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	**₹180**

ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਰਕਿੰਗ ਕਿਰਾਇਆ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ?

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਦੀ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਮੇਂ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਪਾਰਕਿੰਗ ਦੇ ਕਿਰਾਏ ਨੂੰ ₹ y ਲਉ।

ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) (x)	4	8	12	24
ਕਿਰਾਇਆ (₹ ਵਿੱਚ) (y)	60	100	140	180

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{15}; \frac{x_2}{y_2} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}; \frac{x_3}{y_3} = \frac{12}{140} = \frac{3}{35}; \frac{x_4}{y_4} = \frac{24}{180} = \frac{2}{15}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਵੇਂ ਪਾਰਕਿੰਗ ਦੇ ਘੰਟਿਆਂ ਨਾਲ ਕਿਰਾਇਆ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.5 ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ, ਜੇ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ :

x	2	4	x_3	24	x_5	x_6	50
y	7	y_2	28	y_4	98	112	y_7

ਹੱਲ : x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(i) $\frac{2}{7} = \frac{4}{y_2}$ ਇਸ ਲਈ $2y_2 = 4 \times 7$ ਜਾਂ $y_2 = \frac{4 \times 7}{2} = 14$

(ii) $\frac{2}{7} = \frac{x_3}{28}$ ਜਾਂ $7x_3 = 28 \times 2$ ਜਾਂ $x_3 = \frac{28 \times 2}{7} = 8$

(iii) $\frac{2}{7}=\frac{24}{y_4}$ ਜਾਂ $2y_4 = 24 \times 7$ ਜਾਂ $y_4 = \frac{24\times7}{2} = 84$

(iv) $\frac{2}{7}=\frac{x_5}{98}$ ਜਾਂ $7x_5 = 2 \times 98$ ਜਾਂ $x_5 = \frac{2\times98}{7} = 28$

(v) $\frac{2}{7}=\frac{x_6}{112}$ ਜਾਂ $7x_6 = 2 \times 112$ ਜਾਂ $x_6 = \frac{2\times112}{7} = 32$

(vi) $\frac{2}{7}=\frac{50}{y_7}$ ਜਾਂ $2y_7 = 50 \times 7$ ਜਾਂ $y_7 = \frac{50\times7}{2} = 175$

ਉਦਾਹਰਨ 11.6 ਕਿਸੇ ਸਾਫਟ ਡਰਿੰਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ 840 ਬੋਤਲਾਂ 6 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਭਰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ 5 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਭਰੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ 5 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਭਰੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੈ।

ਹੁਣ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :-

ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	840	x
ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	6	5

ਜੇ ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਸਮਾਂ ਵੀ ਵੱਧ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$$\therefore \quad \frac{840}{6}=\frac{x}{5} \quad \Rightarrow \quad x \times 6 = 840 \times 5$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{840\times5}{6} = 700$$

∴ 5 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 700 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰੀਆਂ ਜਾਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.7 ਪਰਵੀਨ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸੜਕ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ ਹੈ। ਜਿਸਦੇ ਪੈਮਾਨੇ ਅਨੁਸਾਰ 1cm ਦੀ ਦੂਰੀ 22 km ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਉਸ ਸੜਕ 'ਤੇ ਆਪਣੀ ਕਾਰ 88km ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ 88km ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਪੈਮਾਨੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ x cm ਹੈ।

ਪੈਮਾਨਾ (cm ਵਿੱਚ)	1	x
ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ)	22	88

ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪੈਮਾਨੇ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਸੜਕ 'ਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦੂਰੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$\therefore \frac{1}{22}=\frac{x}{88}$ ਜਾਂ $x = \frac{88}{22} = 4$

∴ ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਈ ਦੂਰੀ 4 cm ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.8 ਜੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀਆਂ 12 ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 36 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 300 ਗ੍ਰਾਮ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ 300 ਗ੍ਰਾਮ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੈ।

ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਸੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	12	x
ਸੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ (ਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	36	300

ਜਿੰਨੀਆਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਉਨਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਭਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{12}{36}=\frac{x}{300}$ ਜਾਂ $x=\frac{12\times300}{36}=100$

300 ਗ੍ਰਾਮ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਸੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 100 ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.9 ਇੱਕ ਟਰੱਕ 45km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਸਮਾਨ ਚਾਲ 'ਤੇ ਚੱਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) ਉਹ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗਾ ?

(ii) 495 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ x km ਅਤੇ 495 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ y ਮਿੰਟ ਹੈ।

ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ)	45	x	495
ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ)	60	90	y

$\left[\because 1$ ਘੰਟਾ $= 60$ ਮਿੰਟ; $\therefore 1\frac{1}{2}$ ਘੰਟਾ $= 90$ ਮਿੰਟ $\right]$

ਜੇ ਟਰੱਕ ਦੀ ਚਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੈ ਤਾਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਲੱਗੇ ਸਮਾਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(i) ਇਸ ਲਈ $\frac{45}{60}=\frac{x}{90}$ ਜਾਂ $x=\frac{45\times90}{60}=67.5$

$\therefore$ ਟਰੱਕ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ 67.5km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(ii) $\frac{45}{60}=\frac{495}{y}$ ਜਾਂ $y=\frac{495\times60}{45}=660$

495 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 660 ਮਿੰਟ = 11 ਘੰਟੇ ਲੱਗਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.10 ਇੱਕ 5m 60cm ਲੰਬੇ ਖੰਬੇ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ 3m 20cm ਲੰਬਾ ਹੈ। ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 10m 50cm ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਦੂਸਰੇ ਖੰਬੇ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ।

(ii) ਉਸ ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਜਿਸ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 5m ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ ਮੰਨ ਲਓ

(i) ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ x m ਅਤੇ (ii) ਪਰਛਾਵੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ y m ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਓ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ)	5.6	10.5	x
ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ)	3.2	y	5.0

ਇੱਥੇ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

(i) ਭਾਵ $\frac{5.6}{3.2} = \frac{10.5}{y}$ $\Rightarrow$ $5.6 \times y = 3.2 \times 10.5$ ਇਸ ਲਈ

$y = \frac{3.2 \times 10.5}{5.6} = 6$

$\because$ 5m 60cm = 5.6m
3m 20cm = 3.2m
10m 50cm = 10.5m

ਇਸ ਲਈ 10.5m ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਖੰਬੇ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 m ਹੈ।

(ii) $\frac{5.6}{3.2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x \times 3.2 = 5.6 \times 5$ ਇਸ ਲਈ $x = \frac{5.6 \times 5}{3.2} = 8.75$

ਇਸ ਲਈ 5m. ਲੰਬਾਈ ਪਰਛਾਵੇਂ ਵਾਲੇ ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ 8.75 ਹੈ।

ਨੋਟ : ਇਸ ਸਵਾਲ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈਆਂ ਨੂੰ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਵੀ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ?

(i)

x	9	12
y	54	72

(ii)

x	18	24
y	27	36

(iii)

x	12	14
y	20	24

(iv)

x	15	9
y	18	15

(v)

x	6	13
y	9	19.5

2. ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਅਗਿਆਤ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i)

x	12	–
y	48	88

(ii)

x	13	7
y	–	56

(iii)

x	–	17
y	84	102

3. ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

x	2	a	8	c	15	e
y	8	20	b	52	d	80

4. ਇੱਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ 5 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 680 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਦੀ ਹੈ। 3 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਭਰੇਗੀ ?
5. ਇੱਕ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਫੋਟੋ ਨੂੰ 60000 ਗੁਣਾ ਵੱਡਾ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 3cm ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬੈਕਟੀਰੀਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇ ਉਸਦੀ ਫੋਟੋ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ 10000 ਗੁਣਾ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ?
6. ਇੱਕ ਬੱਸ 30 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ 40km ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਬੱਸ ਦੀ ਚਾਲ ਸਮਾਨ ਰਹੇ, ਤਾਂ ਉਹ 3 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ ?
7. ਜੇਕਰ 25 ਅਨਮੋਲ ਰਤਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 50 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਰਤਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 4500 ਗ੍ਰਾਮ ਹੋਵੇ।

8. ਇੱਕ 15m ਉੱਚੇ ਖੰਬੇ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ 10m ਲੰਬਾ ਹੈ। ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਦਰਖੱਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਸਦਾ ਪਰਛਾਵਾ 15m ਹੋਵੇ।

9. ਇੱਕ ਮੋਟੇ ਪੇਪਰ ਦੀਆਂ 12 ਸੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 40 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ। ਉਸੇ ਪੇਪਰ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇ ਭਾਰ $2\frac{1}{2}$ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਹੋਵੇਗਾ।

10. ਇੱਕ ਲਾਇਬ੍ਰੇਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ 126 ਕਿਤਾਬਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ੈਲਫ ਵਿੱਚ 3.4 m. ਲੰਬੀ ਜਗ੍ਹਾ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਨਾਲ ਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀਆਂ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸ਼ੈਲਫ਼ ਵਿੱਚ 5.1 m ਜਗਾ ਵਿੱਚ ਆ ਸਕਣ।

11. 5 ਹਿੱਸੇ ਮੂਲ (base) ਰੰਗ ਵਿੱਚ 1 ਹਿੱਸਾ ਨੀਲਾ ਰੰਗ ਮਿਲਾਕੇ ਰੰਗ ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮਿਸ਼ਰਨ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਿਮਨ ਤਾਲਿਕਾ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਰੰਗ ਦਾ ਉਹ ਹਿੱਸਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ।

ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹਿੱਸਾ	1	4	9	12
ਮੂਲ ਰੰਗ ਦਾ ਹਿੱਸਾ	5	–	–	–

12. 1 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹55. ਹੈ। 2, 4 ਅਤੇ 10 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।

13. ਇੱਕ ਰੇਲ ਗੱਡੀ 75 ਕਿ.ਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਸਮਾਨ ਚਾਲ 'ਤੇ ਚੱਲ ਰਹੀ ਹੈ।
    (i) ਉਹ 20 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ ?
    (ii) 250 ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ?

14. 12 ਚਾਕਲੇਟਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹180 ਹੈ ਤਾਂ
    (i) ਅਜਿਹੀਆਂ 18 ਚਾਕਲੇਟਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
    (ii) ₹330 ਵਿਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਚਾਕਲੇਟਾਂ ਆਉਣਗੀਆਂ ?

15. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**
    (i) ਜੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ, 'a' ਪਤਾ ਕਰੋ।

x	12	18
y	a	30

(a) 15 (b) 20 (c) 18 (d) 16

(ii) ਜੇ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ ?

(a) $xy = k$ (b) $x + y = k$ (c) $x - y = k$ (d) $\frac{x}{y} = k$

(iii) 5 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹15 ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ 12 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) ₹15 (b) ₹18 (c) ₹36 (d) ₹24

(iv) ਇੱਕ ਕਾਰ 75 km/h ਦੀ ਸਮਾਨ ਚਾਲ 'ਤੇ ਚੱਲ ਰਹੀ ਹੈ। 3 ਘੰਟਿਆਂ (hours) ਵਿੱਚ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) 300 km (b) 225 km (c) 275 km (d) 150 km

11.3 ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ (Inverse Proportion)

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ (ਚਲ) ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਹੋਵੇ। ਤਾਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (ਚਲ) ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਲਈ ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾ ਉਹ ਕੰਮ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇ ਕਿਸੇ ਵਾਹਨ ਦੀ ਚਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ ਘੱਟ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਲਓ। ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਤੇ ₹6000 ਖਰਚ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹40 ਹੈ, ਤਾਂ ₹6000 ਨਾਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾਣਗੀਆਂ ? ਸ਼ਪਸ਼ਟ ਹੈ, 150 ਕਿਤਾਬਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜੇ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਕੀਮਤ ₹40, ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸੇ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 150 ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਵੇਗੀ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ।

	$\times 2$	$\times 3$	$\times 5$

ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤ (₹ ਵਿੱਚ)	**40**	**80**	**120**	**200**
ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	**150**	**75**	**50**	**30**

	$\div 2$	$\div 3$	$\div 5$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦੁਗਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ $40\times2=80$, ਤਾਂ ਉੱਸੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅੱਧੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ $150\times\frac{1}{2}=75$.

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ $40\times3=120$ ਤਾਂ ਉਸੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ $150 \div 3=50$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਉਸੇ ਅਨੁਪਾਤ ਅਨੁਸਾਰ ਖਰੀਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ ਘੱਟਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ—ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸੰਗਤ ਗੁਣਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $40\times150=80\times75=120\times50=200\times30$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ x ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ y ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਨਾਲ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਹ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਮਹਤੱਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ xy ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ—ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ $xy = k$ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ x ਦੇ ਮੁੱਲ x_1 , x_2 ਅਤੇ y ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ y_1 ਅਤੇ y_2 ਲਈ $x_1y_1 = x_2y_2 = k$ (ਮੰਨ ਲਵੋ) ਹੋਵੇ, ਜਾਂ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ $x = ky$ (ਇੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ) ਦੇ ਰੂਪ ਚ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਜਦੋਂ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀ $x=\frac{k}{y}$ ਦੇ ਰੂਪ ਚ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਆਉ ਕੁੱਝ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.11. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(i)

x	12	36
y	15	5

(ii)

x	18	54
y	27	12

(iii)

x	24	8
y	12	36

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ $x_1y_1 = x_2y_2$

(i) ਇੱਥੇ $x_1 = 12, x_2 = 36, y_1 = 15, y_2 = 5$ ਹੈ।

$\therefore$ $x_1 y_1 = 12 \times 15 = 180$ ਅਤੇ $x_2 y_2 = 36 \times 5 = 180$

$\Rightarrow$ $x_1 y_1 = x_2 y_2 = 180$

$\therefore$ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ $x_1 = 18, x_2 = 54, y_1 = 27, y_2 = 12$ ਹੈ।

$\therefore$ $x_1 y_1 = 18 \times 27 = 486$ ਅਤੇ $x_2 y_2 = 54 \times 12 = 648$

$\Rightarrow$ $x_1 y_1 \neq x_2 y_2$

$\therefore$ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iii) ਇੱਥੇ $x_1 = 24, x_2 = 8, y_1 = 12, y_2 = 36$ ਹੈ।

$\therefore$ $x_1 y_1 = 24 \times 12 = 288$ ਅਤੇ $x_2 y_2 = 8 \times 36 = 288$

$\Rightarrow$ $x_1 y_1 = x_2 y_2 = 288$

$\therefore$ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.12. ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ 'a' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i)

x	9	36
y	a	6

(ii)

x	15	a
y	24	18

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ, x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$\therefore$ $x_1 y_1 = x_2 y_2$

$$\Rightarrow \quad 9 \times a = 36 \times 6 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{36 \times 6}{9} = 24$$

(i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ, x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$\therefore$ $x_1 y_1 = x_2 y_2$

$$\Rightarrow \quad 15 \times 24 = a \times 18 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{15 \times 24}{18} = 20$$

ਉਦਾਹਰਨ 11.13. ਜੇ 15 ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕੰਧ ਨੂੰ 24 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ 30 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਆਦਮੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ 30 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦੇ ਆਦਮੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 'a' ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ

ਆਦਮੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	15	a
ਘੰਟੇ	24	30

ਕੰਧ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜਿੰਨੇ ਵੱਧ ਆਦਮੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਉਨਾਂ ਹੀ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਉਲਟੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$\therefore \quad 15 \times 24 = a \times 30$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{15 \times 24}{30} = 12$$

$\therefore$ 30 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ 12 ਆਦਮੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.14. **ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 45 ਮਿੰਟ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ 8 ਪੀਰੀਅਡ ਹਨ। ਜੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਕੰਮ ਦਾ ਸਮਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ 9 ਪੀਰੀਅਡ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪੀਰੀਅਡ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ?**

ਹੱਲ : 9 ਪੀਰੀਅਡ ਦੌਰਾਨ, ਮੰਨ ਲਓ ਹਰੇਕ ਪੀਰੀਅਡ ਦਾ ਸਮਾਂ x ਮਿੰਟ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ

ਪੀਰੀਅਡਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	8	9
ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	45	x

ਜਿੰਨੀ ਪੀਰੀਅਡਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਉਨਾਂ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਉਲਟ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

$\Rightarrow \quad 8 \times 45 = 9 \times x$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8 \times 45}{9} = 40$$

$\therefore$ ਜੇ 9 ਪੀਰੀਅਡ ਹੋਣਗੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪੀਰੀਅਡ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.15. **8 ਪਾਇਪਾਂ ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਨੂੰ 2 ਘੰਟਿਆ ਵਿੱਚ ਭਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ** (i) 6 **ਅਤੇ** (ii) 12 **ਪਾਇਪਾਂ ਨੂੰ ਟੈਂਕ ਨੂੰ ਭਰਨ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾਂ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ ?**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ 6 ਅਤੇ 12 ਪਾਇਪਾਂ ਦੁਆਰਾ ਟੈਂਕ ਭਰਨ ਲਈ ਲੱਗਿਆਂ ਸਮਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x_1 ਅਤੇ x_2 ਮਿੰਟ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ

ਪਾਇਪਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	8	6	12
ਲੱਗਿਆਂ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	120	x_1	x_2

$\therefore$ 1 ਘੰਟਾ = 60 ਮਿੰਟ
$\therefore$ 2 ਘੰਟਾ = 60×2
= 120 ਮਿੰਟ

ਜੇ ਪਾਇਪਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਟੈਂਕ ਭਰਨ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਵੱਧ ਲੱਗੇਗਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਪਾਇਪਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਟੈਂਕ ਭਰਨ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(i) $\therefore \quad 8 \times 120 = 6 \times x_1$ (ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ $x_1 y_1 = x_2 y_2$)

$$\Rightarrow \quad x_1 - \frac{8 \times 120}{6} = 160$$

$\therefore$ 6 ਪਾਇਪਾਂ ਟੈਂਕ ਨੂੰ 160 ਮਿੰਟ ਭਾਵ 2 ਘੰਟੇ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਭਰਨਗੀਆਂ।

(ii) $8 \times 120 = 12 \times x_2$

$\Rightarrow$ $x_2 = \frac{8 \times 120}{12} = 80$

∴ 12 ਪਾਇਪਾਂ ਟੈਂਕ ਨੂੰ 80 ਮਿੰਟ ਭਾਵ 1 ਘੰਟਾ 20 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਭਰਨਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਨ 11.16. ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ 21 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਖਾਣੇ ਦਾ ਸਟਾਕ ਪ੍ਰਬੰਧ ਹੈ। ਜੇ 100 ਵਿੱਚੋਂ 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਲਈ ਘਰ ਚਲੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਖਾਣੇ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਚੱਲੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਖਾਣੇ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ y ਦਿਨ ਚੱਲਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 100 – 25 = 75 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰਨੀ ਅਨੁਸਾਰ

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	100	75
ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	21	y

ਇਹ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $100 \times 21 = 75 \times y$

$\Rightarrow$ $y = \frac{100 \times 21}{75} = 28$

∴ ਖਾਣੇ ਦਾ ਸਟਾਕ 28 ਦਿਨ ਚੱਲੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ?

(i)

x	8	6
y	9	12

(ii)

x	15	5
y	18	56

(iii)

x	24	8
y	20	60

(iv)

x	12	18
y	24	20

(v)

x	25	10
y	20	50

2. ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ 'a' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i)

x	16	8
y	9	a

(ii)

x	12	27
y	a	4

(iii)

x	25	a
y	8	20

3. ਇੱਕ ਪੈੱਨਾਂ ਦਾ ਡੱਬਾ 25 ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ 3 ਪੈੱਨ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਜੇ 10 ਬੱਚੇ ਘੱਟ ਜਾਣ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਪੈੱਨ ਮਿਲਣਗੇ ?

4. ਦਵਾਈ ਦੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ 10 ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪੈਕ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਡੱਬੀ ਵਿੱਚ 6 ਗੋਲੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਡੱਬੀ ਵਿੱਚ 12 ਗੋਲੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਡੱਬਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ ?

5. ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ 54 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਲਈ 36 ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਸੇ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ 81 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ ?

6. ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਨੂੰ 6 ਪਾਇਪਾਂ 1 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਭਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਸੇ ਟੈਂਕ ਨੂੰ ਉਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ 5 ਪਾਇਪਾਂ ਕਿੰਨੀ ਦੇਰ ਵਿੱਚ ਭਰਨਗੀਆਂ ?

7. ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ 60 ਕਿਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮੰਜ਼ਿਲ ਤੇ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਉਹ 80 ਕਿਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਮੰਜ਼ਿਲ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚੇਗੀ ?

8. ਇੱਕ ਕਾਰ 32 ਕਿਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਰਫ਼ਤਾਰ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਫ਼ਰ ਨੂੰ 10 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਾਰ ਦੀ ਰਫ਼ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਵਾਧਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਸਫ਼ਰ 8 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

9. 2 ਵਿਅਕਤੀ ਘਰ ਵਿੱਚ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਏ.ਸੀ. ਫਿਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੀਮਾਰ ਹੋ ਗਿਆ ਤਾਂ ਹੁਣ ਕੰਮ ਕਿੰਨੀ ਦੇਰ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋਵੇਗਾ ?

10. ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਹਾਲ ਵਿੱਚ 10 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੇ ਮੇਜਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ। 4 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ ?

11. ਇੱਕ ਫੈਕਟਰੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ 63 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਲਈ 42 ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਸੇ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ 54 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਹੋਰ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ ?

12. ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 200 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਭੋਜਨ ਦਾ ਸਟਾਕ 10 ਦਿਨ ਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 50 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਰ ਆ ਜਾਣ ਤਾਂ ਭੋਜਨ ਦਾ ਸਟਾਕ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਚੱਲੇਗਾ ?

13. ਇੱਕ ਮਿਠਾਈ ਦੇ ਡੱਬੇ ਨੂੰ 24 ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ 'ਤੇ, ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ 4 ਮਿਠਾਈਆਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 8 ਘੱਟ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮਿਠਾਈਆਂ ਮਿਲਣਗੀਆਂ ?

14. ਇੱਕ ਟੀਵੀ. ਸ਼ੋਅ ਵਿੱਚ ₹1,00,000 ਦੀ ਇਨਾਮ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਜੇਤੂ ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਜੇਤੂ ਖਿਡਾਰੀ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜੇਤੂ ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਜਾਂ ਉਲਟੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਜੇਤੂ ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1	2	4	5	8	10
ਹਰੇਕ ਜੇਤੂ ਨੂੰ ਮਿਲਿਆ	100000	50000	-	-		-

15. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

(i) ਜੇ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ ?

(a) $xy = k$ (b) $\frac{x}{y} = k$ (c) $x + y = k$ (d) $x - y = k$

(ii) ਜੇ x ਅਤੇ y ਉਲਟੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ 'a' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

x	30	24
y	12	a

(a) 18 (b) 20 (c) 15 (d) 16

(iii) 10 ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕੰਮ ਨੂੰ 20 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਸੇ ਕੰਮ ਨੂੰ 25 ਆਦਮੀ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰਨਗੇ ?

(a) 4 (b) 16 (c) 12 (d) 8

(iv) ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਕੋਲ ਆਪਣੇ 20 ਪਸ਼ੂਆਂ ਲਈ 6 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਖਾਣੇ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧ ਹੈ ? ਜੇ ਉਸ ਕੋਲ 10 ਪਸ਼ੂ ਹੋਰ ਆ ਜਾਣ ਤਾਂ ਖਾਣਾ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਚੱਲੇਗਾ ?

(a) 3 (b) 8 (c) 4 (d) 10

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਸਿੱਧੇ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੀਆਂ ਮਦਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ।*
- *ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਅਤੇ ਜ਼ਮੀਨ ਬਾਰੇ ਸਮਝਣ ਦੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. (i), (ii) **2.** (i) 22 (ii) 104 (iii) 14 **3.** a = 5, b = 32, c = 13, d = 60, e = 20

4. 408 ਬੋਤਲਾਂ **5.** 0.5cm **6.** 240km **7.** 2250 ਪੱਥਰ

8. 22.5m **9.** 750 ਸ਼ੀਟਾਂ **10.** 189 ਕਾਪੀਆਂ

11. 20, 45, 60 **12.** ₹110, ₹220, ₹550 **13.** (i) 25km (ii) 3 ਘੰਟਾ 20 ਮਿੰਟ

14. (i) ₹270 (ii) 22 **15.** (i) b (ii) d (iii) c (iv) b

ਅਭਿਆਸ 11.2

1 (i), (iii), (v) **2.** (i) 18 (ii) 9 (iii) 10 **3.** 5 ਪੈੱਨ **4.** 5 ਡੱਬੇ **5.** 24 ਮਸ਼ੀਨਾਂ

6. 1 ਘੰਟੇ 48 ਮਿੰਟ **7.** 1 ਘੰਟੇ 30 ਮਿੰਟ **8.** ਕਿ.ਮੀ/ਘੰਟਾ **9.** 4 ਘੰਟੇ **10.** 5 ਵਿਅਕਤੀ

11. 49 ਮਸ਼ੀਨਾ **12.** 8 ਦਿਨ **13.** 6 ਮਿਠਾਈਆਂ

14. 25,000; 20,000; 12,500; 10,000

15. (i) a (ii) c (iii) d (iv) c

ਅਧਿਆਇ 12

ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਬਾਰੇ।
- ਗੁਣਨਖੰਡਾ ਬਣਾਉਣ ਬਾਰੇ।
- ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ।

12.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਆਓ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿਵੇਂ :- $42 = 1 \times 42$ ਇੱਥੇ 1 ਅਤੇ 42, 42 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਜਾਂ $42 = 1 \times 2 \times 21$ ਇੱਥੇ 1, 2 ਅਤੇ 21, 42 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਜਾਂ $42 = 1 \times 2 \times 3 \times 7$ ਇੱਥੇ 1, 2, 3 ਅਤੇ 7, 42 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਨਾ ਤਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਹੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\therefore$ 42 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, 3 ਅਤੇ 7 ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, 3, ਅਤੇ 5 ਅਤੇ 70 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, 5 ਅਤੇ 7 ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

12.2 ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ (Factors of Algebraic Expression)

7ਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਵਿਅੰਜਕ 3xy, ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 3, x ਅਤੇ y ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ ਭਾਵ $3xy = 3 \times x \times y$ ਇੱਥੇ 3, x ਅਤੇ y ਵਿਅੰਜਕ 3xy ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 3xy ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਭਾਵ 3, x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਹੋਰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ (Irreducible factors)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

> 3xy ਨੂੰ $1 \times 3 \times x \times y$ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ 3xy ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 1 ਹੈ, ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਪਰ ਅਸੀਂ 1 ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕੁੱਝ ਕਿਹਾ ਨਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਹੈ ਕਿ 3xy ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $3 \times (xy)$ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ xy ਨੂੰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਭਾਵ $xy = x \times y$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ 5x (x+3) ਲਓ, ਇਸ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 5, x ਅਤੇ (x+3) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $5x\ (x+3) = 5 \times x \times (x + 3)$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 12x (y+3) (z+5) ਦੇ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, 2, 3, x, (y+3) ਅਤੇ (z+5) ਹਨ।

ਹੁਣ $2x+3$ ਅਤੇ $2x-3$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= (2x + 3)(2x-3) = 4x^2 - 9$

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $4x^2 - 9$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(2x + 3)$ ਅਤੇ $(2x - 3)$ ਹਨ।

ਅਸੀਂ $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

12.3 ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ (Factorisation) ਕੀ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋ ਵੱਧ ਵਿਅੰਜਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦਿੱਤਾ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋਵੇ।

ਇੱਕ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਨੂੰ **ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ, ਗੁਣਾ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ

$5xy$ ਅਤੇ $(3xy-7)$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= 5xy(3xy - 7) = 15x^2y^2-35xy$ ਅਤੇ $15x^2y^2 - 35xy$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $5xy$ ਅਤੇ $(3xy-7)$ ਹਨ।

$(2a+3b)$ ਅਤੇ $(2a-3b)$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= (2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2-9b^2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $4a^2-9b^2$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $2a + 3b$ ਅਤੇ $2a - 3b$ ਹਨ।

∴ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਅਲੱਗ-2 ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

12.3.1 ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Method of Common factors)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੰਡਕਾਰੀ ਗੁਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

$ab \pm ac = a \times b \pm a \times c$

$= a \times (b \pm c)$

$= a(b \pm c)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.1. **$2x + 6$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $2x = 2 \times x$ ਅਤੇ $6 = 2 \times 3$

ਇਸ ਲਈ $2x + 6 = 2 \times x + 2 \times 3$

∴ $2x + 6 = 2 \times (x+ 3)$ [ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।]

$= 2(x+3)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.2. **$7a^2 + 14a$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $7a^2 = 7 \times a \times a$ ਅਤੇ $14a = 2 \times 7 \times a$

∴ $7a^2 + 14a = 7 \times a \times a + 2 \times 7 \times a$

$= 7 \times a \times (a + 2)$ [ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 7 ਅਤੇ a ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।]

$= 7a(a + 2)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.3. **$5x^2y - 15xy^2$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $5x^2y = 5 \times x \times x \times y$ ਅਤੇ $15xy^2 = 3 \times 5 \times x \times y \times y$

$\therefore 5x^2y - 15xy^2 = 5 \times x \times x \times y - 3 \times 5 \times x \times y \times y$

$= 5 \times x \times y\ (x - 3y)$

$= 5xy\ (x - 3y)$ [ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 5, x ਅਤੇ y ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।]

ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਰੂਪ ਇੱਕ ਪਦੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.4 **$14x^2y^2 + 10x^2y + 8xy^2$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $14x^2y^2 = 2 \times 7 \times x \times x \times y \times y$

$10x^2y = 2 \times 5 \times x \times x \times y$

$8xy^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$

$\therefore 14x^2y^2 + 10x^2y + 8xy^2 = 2 \times 7 \times x \times x \times y \times y + 2 \times 5 \times x \times x \times y + 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$

$= 2 \times x \times y \times (7 \times x \times y + 5 \times x + 2 \times 2 \times y)$

ਇੱਥੇ ਤਿੰਨੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, x ਅਤੇ y ਹਨ।

$= 2xy\ (7xy + 5x + 4y)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.5 **$4x^2 + 9x + 18$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $4x^2 = 2 \times 2 \times x \times x$, $9x = 3 \times 3 \times x$ ਅਤੇ $18 = 2 \times 3 \times 3$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋ ਕੋਈ ਵੀ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ, ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$\therefore 4x^2 + 9x + 18 = 2 \times 2 \times x \times x + 3 \times 3 \times x + 2 \times 3 \times 3$

$= 1\ (2 \times 2 \times x \times x + 3 \times 3 \times x + 2 \times 3 \times 3)$

$= 4x^2 + 9x + 18$

ਨੋਟ—ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਜਿਸਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.6 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

(i) $3a\ (x + y) - 5b\ (x + y)$ **(ii) $2(x - y)^2 + 5\ (x - y)$**

(iii) $6x\ (2a - 3b) - 5y\ (3b - 2a)$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $3a\ (x + y) - 5b\ (x + y)$

ਇੱਥੇ ਦੋ ਪਦ $3a\ (x + y)$ ਅਤੇ $5b\ (x + y)$ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + y)$ ਹੈ।

$\therefore 3a\ (x + y) - 5b\ (x + y) = (x + y)\ (3a - 5b)$

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $2(x - y)^2 + 5\ (x - y)$

ਇੱਥੇ ਦੋ ਪਦ $2(x - y)^2$ ਅਤੇ $5\ (x - y)$ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x - y)$ ਹੈ।

$\therefore 2\ (x - y)^2 + 5\ (x - y) = (x - y)\ [2\ (x - y) + 5] = (x - y)\ (2x - 2y + 5)$

(iii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $6x\ (2a - 3b) - 5y\ (3b - 2a)$

ਦੂਜੇ ਪਦ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਣ 'ਤੇ $-5y\ (3b - 2a) = -5y\ [-(2a - 3b)]$

$= 5y\ (2a - 3b)$

$\therefore$ 6x (2a – 3b) –5y (3b – 2a) = 6x (2a –3b) + 5y (2a –3b)

[(2a – 3b) ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ]

= (2a – 3b) (6x+5y).

12.3.2 ਪਦਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ (Factorisation by regrouping terms)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਵਿਧੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ। ਪਰੰਤੂ ਕਈ ਵਾਰੀ ਅਜਿਹੇ ਵਿਅੰਜਕ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸਦੇ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਕਰਕੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਵਿਅੰਜਕ 3x + 3 + 4xy + 4y ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਦੇਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਅਤੇ ਪਿਛਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 4 ਅਤੇ y ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਜਿਹੇ ਸਵਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ

(3x + 3) ਅਤੇ (4xy + 4y)

3x + 3 = 3 × x + 3 × 1

= 3 × (x + 1)

ਅਤੇ 4xy + 4y = 4 × x ×y + 4 × y

= 4 × x × y + 4 × y × 1

= 4y (x + 1)

$\therefore$ 3x + 3 + 4xy + 4y = (3x + 3) + (4xy + 4y) = 3 (x+1) + 4y (x+1)

ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਪਦ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ (x+1) ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 3x + 3 + 4xy + 4y = 3 (x + 1) + 4y (x + 1) = (x + 1) (3 + 4y),

ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (x+1) ਅਤੇ (3+4y) ਵਿਅੰਜਕ 3x + 3 + 4xy + 4y ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਓ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ 3x + 4y + 4xy + 3 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਹੀ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ 3x + 3 + 4xy +4y ਦੇ ਅਸੀਂ (3x+3) ਅਤੇ (4xy +4y) ਸਮੂਹ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਧੀਆ ਨਾਲ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ 3x + 4xy + 3 + 4y ਦਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ 3x + 4xy + 3 + 4y = (3x + 4xy) + (3+4y)

= x (3 + 4y) + 1×(3 + 4y)

= (3 + 4y) (x + 1)

ਇੱਥੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਪਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਲੱਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $5xy + 7y - 5x^2 - 7x$ **(ii) ax –ay + bx – by**

(iii) $5p^2 - 8pq - 10p + 16q$

ਹੱਲ : (i) ਪਗ 1 : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਦੇਖੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਵੀ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ y ਹੈ।

ਭਾਵ $5xy + 7y = y(5x+7)$ ....(1)

ਹੁਣ ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ '$-x$' ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

$\therefore\ -5x^2 - 7x = -x\,(5x+7)$ ....(2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ 'ਤੇ

$5xy + 7y - 5x^2 - 7x = y(5x + 7) - x\,(5x + 7)$

$= (5x + 7)\,(y - x)$ [(5x + 7) ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ ਤੇ]

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$ax - ay + bx - by$

$= a\,(x - y) + b\,(x - y)$ [ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 'a' ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 'b ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ]

$= (x - y)\,(a + b)$ [(x – y) ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ]

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$5p^2 - 8pq - 10p + 16q$

$= p(5p - 8q) - 2\,(5p - 8q)$ [ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 'p' ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ '–2' ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ]

$= (5p - 8q)\,(p - 2)$ [(5p – 8q) ਸਾਂਝਾ ਲੈਣ 'ਤੇ]

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. ਦਿੱਤੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $15x, 25$ (ii) $3y, 33xy$ (iii) $7pq, 28p^2q^2$

(iv) $2x, 3x^2, 5$ (v) $4abc, 24ab^2, 12a^2b$ (vi) $12x^3, -6x^2, 36x$

(vii) $4xy^3, 10x^3y^2, 8x^2y^2z$ (viii) $3x^2, 5x, 9$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $6x-48$ (ii) $7p-14q$ (iii) $-24z+30z^2$

(iv) $18\ell^2m+27a\,\ell m$ (v) $25x^2y^2z - 15x^2yz^2$ (vi) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

(vii) $px^2y + qxy^2 + rxyz$ (viii) $10pq-15qr+20rp$

3. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $3a(2p-3q) - 5b(2p - 3q)$ (ii) $15a\,(x^2+y^2) - 10b\,(x^2+y^2)$

(iii) $4\,(x + y)^2 + 2\,(x + y)$ (iv) $(2a - 5b)^2 + 10b - 4a$

(v) $(5\ell + 3m)^2 - 5l - 3m$

4. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $x^2 + xy + 6x + 6y$ (ii) $y^2 - yz - 3y + 3z$ (iii) $12xy - 8x + 3y - 2$

(iv) $a^2b - ab^2 + 4a - 4b$ (v) $x^3 - 6x^2 + x - 6$

(vi) $a^2 + ab(1+b) + b^3$ [ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰੋ]

(vii) $3px - 6py - 8qy + 4qx$

(viii) $r - 7 + 7pq - pqr$

5. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :

(i) $10xy$ ਅਤੇ $12y$ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ

(a) $10x$ (b) $2xy$ (c) $2y$ (d) $2x$

(ii) $5a^2b$ ਅਤੇ $9xy^2$ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ

(a) 1 (b) 0 (c) $ab\ xy$ (d) ax

(iii) $8p^2 - 20pq + 28p^2q =$

(a) $4p(2p + 5q - 7pq)$ (b) $4p(2p - 5q + 7p^2q)$

(c) $4q(2p - 5q + 7q)$ (d) $4p(2p - 5q + 7pq)$

(iv) $3(2l - m)^2 + (2l - m) =$

(a) $(2l - m)(6l - 3m + 1)$ (b) $(2l - m)(6l - 2m)$

(c) $3(2l - m)(2l - m + 1)$ (d) $(2l - m)(3 + 2l - m)$

(v) $p^2 - pq + pr - qr =$

(a) $(p - r)(p + q)$ (b) $(p + r)(q - p)$

(c) $(p + r)(p - q)$ (d) $(p - q)(r - p)$

12.3.3 ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ (Factorisation using Algebraic Identities)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$............(I) (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$............(II)

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ....(III)

ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਵਿਅੰਜਕ $a^2 + 2ab + b^2$ ਜਾਂ $a^2 - 2ab + b^2$ ਜਾਂ $a^2 - b^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ ਜਾਂ $(a - b)(a + b)$ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਸਰਬਸਮਤਾ ਰਾਹੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਸਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.8. **ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

(i) $x^2 + 10x + 25$ (ii) $y^2 - 6y + 9$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$

(iv) $9p^2 - 24p + 16$ (v) $p^4 + 2p^2q^2 + q^4$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਰਬਸਮਤਾ (iii) ਨਹੀਂ ਲੱਗਦੀ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਦੋ ਪਦ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਪਦ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ $a^2 + 2ab + b^2$ ਜਾਂ $a^2 - 2ab + b^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ : $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 10x + 5^2$

ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਪਦ a^2 ਅਤੇ b^2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $a = x, b = 5$ ਹੈ, ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ $2ab = 2\,(x)\,(5)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

$\therefore x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2(x)\,(5) + 5^2$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + 10x + 5 = (x + 5)^2$ $[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2]$

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ : $y^2 - 6y + 9 = y^2 - 6y + 3^2$

ਇੱਥੇ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਪਦ a^2 ਅਤੇ b^2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $a = y, b = 3$ ਅਤੇ ਮੱਧ ਪਦ ਨੂੰ $2ab = 2\,(y)\,(3)$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

$y^2 - 6y + 3^2 = y^2 - 2\,(y)\,(3) + 3^2$

ਇਸ ਲਈ $y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2$ $[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

(iii) $25m^2 + 30m + 9 = 5^2m^2 + 30m + 3^2$

$= (5m)^2 + 30m + (3)^2$ [ਇੱਥੇ $a = 5m, b = 3$ ਹੈ]

$= (5m)^2 + 2(5m)\,(3) + (3)^2 = (5m+3)^2$

ਇਸ ਲਈ $25m^2 + 30m + 9 = (5m + 3)^2$

(iv) $9p^2 - 24p + 16 = 3^2p^2 - 24p + 4^2$

$= (3p)^2 - 24p + 4^2$ [ਇੱਥੇ $a = 3p, b = 4$ ਹੈ]

$= (3p)^2 - 2(3p)\,(4) + 4^2 = (3p - 4)^2$

ਇਸ ਲਈ $9p^2 - 24p + 16 = (3p - 4)^2$

(v) $p^4 + 2p^2 q^2 + q^4 = (p^2)^2 + 2p^2q^2 + (q^2)^2$

$= (p^2)^2 + 2(p)^2\,(q^2) + (q^2)^2$

$= (p^2 + q^2)^2$

ਇਸ ਲਈ $p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 + q^2)^2$

ਉਦਾਹਰਨ 12.9. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $a^2 - 25$ **(ii)** $4x^2 - 9$ **(iii)** $49x^2 - 36y^2$ **(iv)** $\frac{9}{16}x^2y^2 - \frac{16}{25}z^2$

(v) $16x^5 - 144x^3$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਦ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਪਦ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਪਦ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(i) $a^2 - 25 = a^2 - 5^2 = (a - 5)\,(a + 5)$

(ii) $4x^2 - 9 = 2^2x^2 - 3^2 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)\,(2x + 3)$

(iii) $49x^2 - 36y^2 = 7^2x^2 - 6^2y^2 = (7x)^2 - (6y)^2 = (7x - 6y)\,(7x + 6y)$

(iv) $\frac{9}{16}x^2y^2 - \frac{16}{25}z^2 = \frac{3^2}{4^2}\ x^2y^2 - \frac{4^2}{5^2}z^2 = \left(\frac{3}{4}xy\right)^2 - \left(\frac{4}{5}z\right)^2$

$$= \left(\frac{3}{4}xy - \frac{4}{5}z\right)\left(\frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}z\right)$$

(v) $16x^5 - 144x^3 = 16x^3\ (x^2-9)$ [ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ $16x^3$ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ 'ਤੇ]

$= 16x^3\ (x^2-3^2) = 16x^3\ (x-3)\ (x+3)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.10. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $16x^4 - 1$

ਹੱਲ : (i) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2$

$= (a^2-b^2)\ (a^2+b^2)$ [ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ]

$= (a-b)\ (a+b)\ (a^2+b^2)$[ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ]

(ii) $p^4 - 81 = (p^2)^2 - 9^2$

$= (p^2 - 9)\ (p^2 + 9)$

$= (p^2 - 3^2)\ (p^2 + 9)$[ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ]

$= (p-3)\ (p+3)\ (p^2+9)$[ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ]

(iii)$16x^4 - 1= 4^2\ (x^2)^2 - 1^2$

$= (4x^2)^2 - (1)^2 = (4x^2 - 1)\ (4x^2+1)$

$= (2^2x^2 - 1^2)\ (4x^2 + 1)$

$= [(2x)^2 - 1^2]\ (4x^2 + 1)$

$= (2x - 1)\ (2x + 1)\ (4x^2 + 1)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.11. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

(i) $x^2-2xy+y^2-z^2$ (ii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

(iii) $x^4 - (x - 2)^4$

ਹੱਲ : (i) ਇਸ ਲਈ $x^2-2xy + y^2 - z^2$

$= (x^2 - 2xy + y^2) - z^2$

$= (x-y)^2 - z^2$ [$\because a^2-2ab + b^2 = (a-b)^2$]

$= (x - y - z)\ (x - y + z)$ [$\because a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$]

(ii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

$= 25a^2 - (4b^2 - 28bc + 49c^2)$

$= 25a^2 - [(2b)^2 - 2 \times (2b) \times (7c) + (7c)^2$ [$\because a^2-2ab + b^2 = (a-b)^2$]

$= 25a^2 - (2b-7c)^2 = (5a)^2 - (2b - 7c)^2$

$= [5a - (2b - 7c)]\ [5a + (2b - 7c)]$ [$\because a^2-b^2 = (a-b)\ (a+b)$]

$= (5a - 2b + 7c)\ (5a + 2b - 7c)$

(iii) $x^4 - (x-2)^4$

$= (x^2)^2 - [(x-2)^2]^2$

$= [x^2 - (x-2)^2]\,[x^2 + (x-2)^2]$

$= [x - (x-2)\,(x + x - 2)]\,[(x^2 + (x-2)^2]$

$= (x - x + 2)\,(x + x - 2)\,[x^2 + (x-2)^2]$

$= 2\,(2x - 2)\,[x^2 + (x-2)^2]$

12.3.4 (x+a) (x+b) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ [Factors of the form (x+a) (x+b)]

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ $x^2 + \ell x + m$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਭਾਵ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਆਓ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਵੇਂ ਬਣਾਈਏ।

> ਵਿਅੰਜਕ $x^2 + \ell x + m$, ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ $x^2 + (a+b)\,x + ab = (x+a)\,(x+b)$ ਦੇ ਨਾਲ m (ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ) ਦੇ ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਗੁਣਨਖੰਡ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ
>
> $ab = m$ ਅਤੇ $a + b = \ell$
>
> ਭਾਵ ਦੋਨੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ - ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ

ਉਦਾਹਰਨ 12.12. **$x^2 + 14x + 33$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : **ਪਗ 1 :** ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਚਲ ਸੰਖਿਆ ਭਾਵ 33 ਹੈ ਅਤੇ ਜੋੜ x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਭਾਵ 14 ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਇੱਥੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ 33 ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ।

ਪਗ 3 : ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਜੋੜਫਲ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 33 ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ।

ਪਗ 4 : 33 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ : 1×33 ਜਾਂ 3×11 ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਅਤੇ 11 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 14 ਹੈ। ਇਸਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3 ਅਤੇ 11 ਹਨ।

ਗੁਣਨਫਲ = 33	
1×33	$(-1) \times (-33)$
3×11	$(-3) \times (-11)$

$\therefore\ x^2 + 14x + 33 = x^2 + (3 + 11)\,x + 33$

$= (x+3)\,(x+11)$

$x^2 + (a+b)\,x + ab = (x+a)\,(x+b)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.13. **$x^2 - 5x + 6$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ -5 ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ 6 ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ ਜੋੜ ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ 6 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ

ਭਾਵ $6 = (-1) \times (-6)$ ਜਾਂ $(-2) \times (-3)$

$\therefore$ 6 ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ (-2) ਅਤੇ (-3) ਹਨ।

$\therefore\ x^2 - 5x + 6 = x^2 + \{(-2) + (-3)\}\,x + (-2)\,(-3)$

$= (x-2)\,(x-3)$ (ਸਰਬਸਮਤਾ (iv))

ਗੁਣਨਫਲ = 6	
1×6	$(-1) \times (-6)$
2×3	$(-2) \times (-3)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.14 **$p^2 + 4p - 12$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ +4 ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ –12 ਹੈ। ਇੱਥੇ ਗੁਣਨਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰਿਣਾਤਮਕ

ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੋੜਫਲ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨਖੰਡ 6 ਅਤੇ – 2 ਹੈ।

$$\therefore \quad p^2 + 4p - 12 = p^2 + \{6 + (-2)\}p - 12$$
$$= p^2 + 6p - 2p - 12$$
$$= p(p + 6) - 2(p + 6)$$
$$= (p + 6)(p - 2)$$

ਗੁਣਨਫਲ = –12

(–1) × 12	(1) × (–12)
(–2) × 6	(2) × (–6)
(–3) × 4	(3) × (–4)

ਉਦਾਹਰਨ 12.15 $y^2 - 4y - 45$ **ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (-45) ਅਤੇ ਜੋੜਫਲ (-4) ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ ਗੁਣਨਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੋੜਫਲ ਵੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗੀ। ∴ (–9) ਅਤੇ 5 ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

$$\therefore \quad y^2 - 4y - 45 = y^2 + (-9 + 5)y - 45$$
$$= y^2 - 9y + 5y - 45$$
$$= y(y - 9) + 5(y - 9)$$
$$= (y - 9)(y + 5)$$

ਗੁਣਨਫਲ = –45

(–1) × 45	(1) × (–45)
(–3) × 15	(3) × (–15)
(–5) × 9	(5) × (–9)

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।
   (i) $x^2 + 10x + 25$ (ii) $y^2 - 8y + 16$ (iii) $25p^2 + 30p + 9$
   (iv) $49a^2 + 84ab + 36b^2$ (v) $100x^2 - 80xy + 16y^2$
   (vi) $(p+q)^2 - 4pq$ (**ਸੰਕੇਤ :** $(p+q)^2$ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ)
   (vii) $\ell^4 + 2\ell^2 m^2 + m^4$
   (viii) $4x^2 - 8x + 4$ (**ਸੰਕੇਤ :** ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਪਦਾਂ ਵਿਚੋਂ ਸਾਂਝਾ 4 ਬਾਹਰ ਕੱਢੋ)
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।
   (i) $25a^2 - 64b^2$ (ii) $49x^2 - 36$ (iii) $28x^2 - 63y^2$
   (iv) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{9}{49}y^2$ (v) $8x^5 - 72x^3$ (**ਸੰਕੇਤ :** ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਂਝਾ x ਬਾਹਰ ਕੱਢੋ)
   (vi) $(p+q)^2 - (p-q)^2$ (vii) $16a^2b^2 - 25$
   (viii) $(x^2-2xy+y^2) - z^2$ (**ਸੰਕੇਤ:** ਪਹਿਲਾਂ ਸਰਬਗਸਮਤਾ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ, ਫਿਰ ਦੂਜੀ)
3. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ :
   (i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - 81$ (iii) $m^4 - 256$
   (iv) $p^4 - (q+r)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।
   (i) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ (ii) $1 - 9l^2 + 24lm - 16m^2$ (iii) $25p^2 - 40pq + 16q^2 - 49r^2$
5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।
   (i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $y^2 - 10y + 21$ (iii) $a^2 + 3a - 18$
   (iv) $3p^2 + 18p - 48$ (**ਸੰਕੇਤ:** ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਂਝਾ 3 ਹਰ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਬਾਹਰ ਕੱਢੋ)
   (v) $q^2 - q - 6$ (vi) $x^2 - 11x - 42$ (vii) $5x^2 + 25x + 30$
   (viii) $3y^2 - 21y + 36$
6. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ**
   (i) $4p^2 - 20pq + 25q^2$

(a) $(4p-5q)^2$ (b) $(2p-5q)^2$ (c) $(2q-5p)^2$ (d) $(4q-25p)^2$

(ii) $4x^3 - 9x =$

(a) $x^2 (4x-9)(4x+9)$ (b) $x(2x-3)(2x+3)$

(c) $x^3 (2x-3)(2x+3)$ (d) $x^2 (2x-3)(2x+3)$

(iii) $(a+b)^2 - (a-b)^2$

(a) $-4ab$ (b) $2a + 2b$ (c) $2a-2b$ (d) $4ab$

(iv) $m^2 - 14m - 32 =$

(a) $(m + 16)(m - 2)$ (b) $(m-16)(m-2)$

(c) $(m-16)(m+2)$ (d) $(m+16)(m+2)$

(v) $p^3 - p =$

(a) $p(p^2+1)$ (b) $(p^2-1)(p+1)$ (c) $p^2(p-1)$ (d) $p(p-1)(p+1)$

12.4. ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਵੰਡ (Division of Algebraic Expressions)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਦੂਜੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੰਡ, ਗੁਣਾ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।

$7 \times 5 = 35,$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $35 \div 5 = 7$ ਜਾਂ $35 \div 7 = 5$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ (i) $4x \times 3x^2 = 12x^3$

ਇਸ ਲਈ $12x^3 \div 4x = 3x^2$

ਜਾਂ $12x^3 \div 3x^2 = 4x$

(ii) $3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$

ਇਸ ਲਈ $(3x^2 + 6x) \div 3x = x + 2$

ਜਾਂ $(3x^2 + 6x) \div (x + 2) = 3x$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ ਨਾਲ ਕਿਵੇਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

12.4.1 ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ (Division of a monomial by another monomial)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਓ $12x^3 \div 3x$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $3x$ ਅਤੇ $12x^3$ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ।

$3x = 3 \times x$

ਇੱਥੇ $12x^3 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x$ **[ਇੱਥੇ $12x^3$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ $3x$ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰੋ।]**

ਤਾਂ $12x^3 = 3 \times x \times 2 \times 2 \times x \times x$

$= (3x) \times (4x^2)$

ਇਸ ਲਈ $12x^3 \div 3x = 4x^2$

ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਮੁਸ਼ਕਲ ਅਤੇ ਲੰਬੀ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਕੋਲ ਇੱਕ, ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਛੋਟੀ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਭਾਗ ਸਮੇਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $35 \div 5 = \frac{35}{5} = \frac{7 \times \cancel{5}}{\cancel{5}} = 7$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $12x^3 \div 3x = \frac{12x^3}{3x} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{x} \times x \times x}{\cancel{3} \times \cancel{x}} = 2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ :
ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਭਾਜਫਲ = ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦਾ ਭਾਜਫਲ × ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਚਲਾਂ ਦਾ ਭਾਜਫਲ

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $12x^3 \div 3x = \frac{12x^3}{3x} = \left(\frac{12}{3}\right)\left(\frac{x^3}{x}\right) = 4x^{3-1} = 4x^2$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

ਉਦਾਹਰਨ 12.16. ਭਾਗ ਕਰੋ : **(i) $12x^5$ ਨੂੰ $-4x^3$ ਨਾਲ (ii) $(-18y^3)$ ਨੂੰ $3y^2$ (iii) $-4x^2y^3$ ਨੂੰ $12x^3y$ ਨਾਲ**

ਹੱਲ : (i) $12x^5 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times x \times x$

ਅਤੇ $-4x^3 = -2 \times 2 \times x \times x \times x$

ਇਸ ਲਈ $12x^5 \div (-4x^3) = \frac{2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times x \times x}{-2 \times 2 \times x \times x \times x} = -3 \times x \times x = -3x^2$

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ

$12x^5 \div (-4x^3) = \frac{12x^5}{-4x^3} = \left(\frac{12}{-4}\right)\left(\frac{x^5}{x^3}\right) = -3 \times x^{5-3} = -3x^2$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$ ਵਰਤੋ ਕਰਕੇ)

(ii) $-18y^3 = -2 \times 3 \times 3 \times y \times y \times y$

ਅਤੇ $3y^2 = 3 \times y \times y$

ਇਸ ਲਈ $-18y^3 \div 3y^2 = \frac{-2 \times 3 \times 3 \times y \times y \times y}{3 \times y \times y} = -2 \times 3 \times y = -6y$

ਵੈਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ

$-18y^3 \div 3y^2 = \frac{-18y^3}{3y^2} = \left(\frac{-18}{3}\right)\left(\frac{y^3}{y^2}\right)$

$= -6 \times y^{3-2}$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

$= -6y^1 = -6y$

(iii) $(-4x^2y^3) \div 12x^3y = \frac{-4x^2y^3}{12x^3y} = \left(\frac{-4}{12}\right)\left(\frac{x^2}{x^3}\right)\left(\frac{y^3}{y}\right)$

$= \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)(y^2) = \frac{-y^2}{3x}$

12.4.2 ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ (Division of a polynomial by a monomial)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $6a^3 + 8a^2 + 4a$ ਨੂੰ ਇਕ ਪਦੀ $2a$ ਨਾਲ ਵੰਡਣ 'ਤੇ, ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $6a^3 + 8a^2 + 4a$ ਭਾਵ $6a^3 + 8a^2 + 4a = 2a(3a^2 + 4a + 2)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $(6a^3 + 8a^2 + 4a) \div 2a = \frac{2a(3a^2+4a+2)}{2a}$

$= 3a^2 + 4a + 2$

ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵੀ ਵੰਡ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ :—

$(6a^3 + 8a^2 + 4a) \div 2a = \frac{6a^3+8a^2+4a}{2a}$

$= \frac{6a^3}{2a} + \frac{8a^2}{2a} + \frac{4a}{2a}$ [ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰੋ]

$= 3a^2 + 4a + 2$

ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.17. **ਭਾਗ ਕਰੋ : (i) $6x^4 + 24x^3 - 5x^2$ ਨੂੰ $3x^2$ ਨਾਲ (ii) $(5y^8 - 10y^5 + 3y^2)$ ਨੂੰ $(-5y^2)$ ਨਾਲ**

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ $(6x^4 + 24x^3 - 5x^2) \div 3x^2 = \frac{6x^4+24x^3-5x^3}{3x^2}$

$= \frac{6x^4}{3x^2} + \frac{24x^3}{3x^2} - \frac{5x^2}{3x^2}$ [ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰੋ]

$= 2x^2 + 8x - \frac{5}{3}$

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ $(5y^8 - 10y^5 + 3y^2) \div (-5y^2) = \frac{5y^8 - 10y^5 + 3y^2}{-5y^2}$

$= \frac{5y^8}{-5y^2} - \left(\frac{10y^5}{-5y^2}\right) + \left(\frac{3y^2}{-5y^2}\right) = -y^6 + 2y^3 - \frac{3}{5}$

12.4.3 ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦ (ਦੋ ਪਦੀ) ਨਾਲ ਵੰਡ [Division of a polynomial by another polynomial (binomial)]

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀ ਵੰਡ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਜਿਸਦਾ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਆਉਂਦਾ ਹੋਵੇ। ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਦੂਜੇ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਵੰਡ ਨੂੰ ਅਸੀ ਉਦਾਹਰਨ ਨਾਲ ਸਮਝਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.18. **ਵੰਡ ਕਰੋ :**

(i) $5(2x+1)(3x+5) \div (2x+1)$ (ii) $20(y+4)(y^2+5y+3) \div 5(y+4)$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ : $5(2x+1)(3x+5) \div (2x+1) = \frac{5\cancel{(2x+1)}(3x+5)}{\cancel{(2x+1)}}$

$= 5(3x+5)$

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ : $20(y+4)(y^2+5y+3) \div 5(y+4) = \frac{\cancel{20}^4\cancel{(y+4)}(y^2+5y+3)}{\cancel{5}_1\cancel{(y+4)}}$

$= 4(y^2+5y+3)$

ਉਦਾਹਰਨ 12.19. **$y^2 + 7y + 10$ ਨੂੰ $y + 5$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $(y^2 + 7y + 10)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀ ਕਰਨ ਕਰੋ

ਇਸ ਲਈ $y^2 + 7y + 10 = y^2 + (5 + 2)\, y + 5 \times 2$ [ਸਰਬਸਮਤਾ (iv) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋਂ]

$= (y + 5)(y + 2)$

ਹੁਣ $(y^2+7y+10) \div (y+5)$

$$= \frac{y^2 + 7y + 10}{y + 5} = \frac{\cancel{(y+5)}(y+2)}{\cancel{y+5}}$$ [ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ (y+5) ਨੂੰ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ ਕੱਟਣ 'ਤੇ]

$= y + 2$

ਉਦਾਹਰਨ 12.20. **ਵੰਡ ਕਰੋ :**

(i) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p-1)$ (ii) $12xy\,(9x^2 - 16y^2) \div 4xy\,(3x + 4y)$

ਹੱਲ : (i) ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $(5p^2 - 25p + 20)$, ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

$5p^2 - 25p + 20 = 5(p^2 - 5p + 4) = 5\,(p^2 - 4p - p + 4)$

$= 5\,[p\,(p - 4) - 1\,(p-4)] = 5\,(p-4)\,(p-1)$

ਹੁਣ $(5p^2-25+20) \div (p-1) = \frac{5p^2 - 25p + 20}{p-1} = \frac{5(p-4)\cancel{(p-1)}}{\cancel{p-1}}$

$= 5\,(p - 4)$

(ii) ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $(9x^2 - 16y^2)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕਰੋ।

$9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x - 4y)\,(3x + 4y)$

ਹੁਣ $12xy\,(9x^2 - 16y^2) \div 4xy\,(3x + 4y) = \frac{12xy(9x^2 - 16y^2)}{4xy(3x+4y)}$

$$= \frac{{}^{3}\cancel{12xy}\,(3x-4y)\cancel{(3x+4y)}}{{}_{1}\cancel{4xy}\,\cancel{(3x+4y)}} = 3\,(3x - 4y)$$

ਆਓ ਬਹੁਪਦੀ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਇਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖੀਏ।

ਉਦਾਹਰਨ 12.21. **$(3 - 11x + 6x^2)$ ਦੀ $(-1 + 3x)$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਭਾਜ ਅਤੇ ਭਾਜਕ ਨੂੰ ਚਲ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 1 : ਭਾਜ : $6x^2 - 11x + 3$

ਭਾਜਕ : $3x - 1$

ਪਗ 2 : ਭਾਜ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ $(6x^2)$ ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ $(3x)$, ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ $\frac{6x^2}{3x} = 2x$

$\therefore$ ਭਾਜਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $2x$ ਹੈ।

$$3x-1\,\overline{)\,6x^2 - 11x + 3\,(}\ 2x$$

ਪਗ 3 : ਭਾਜਕ $(3x - 1)$ ਨੂੰ $2x$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ

ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $2x\,(3x-1) = 6x^2 - 2x$

ਇਸਨੂੰ ਭਾਜਕ $(6x^2 - 11x + 3$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

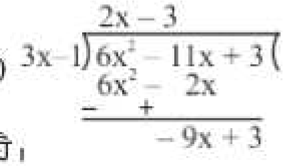
ਬਾਕੀ $(6x^2 - 11x + 3) - (6x^2 - 2x) = -9x + 3$

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x-1\,\overline{)\,6x^2 - 11x + 3\,(} \\ \underset{-}{6x^2}\ \underset{+}{-}\ 2x \\ \hline -9x + 3 \end{array}$$

ਪਗ 4 : ਹੁਣ ਬਾਕੀ $-9x + 3$ ਨੂੰ ਨਵਾਂ ਭਾਜ ਮੰਨੋ,

ਇਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ $(-9x)$ ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ $(3x)$

ਨਾਲ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਭਾਵ $\frac{-9x}{3x}$ ਜੋ ਭਾਜਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ ਹੈ।



ਭਾਜਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ $\frac{-9x}{3x} = -3$ (ਪਗ 2 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ)

ਪਗ 5 : ਭਾਜਕ $(3x-1)$ ਨੂੰ -3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ,

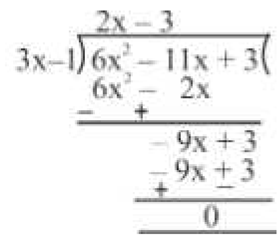
$-3\ (3x-1) = -9x + 3$

ਇਸਨੂੰ ਭਾਜ $-9x + 3$ ਵਿੱਚ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

$[(-9x+3) - (-9x + 3)]$

$= -9x + 3 + 9x - 3$ਭਾਜਕ

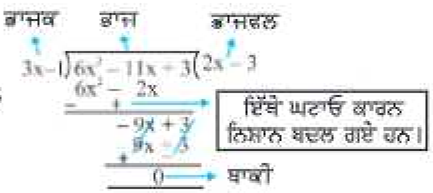
$= 0$



ਇੱਥੇ ਭਾਜਫਲ $2x-3$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(6x^2 - 11x + 3) \div (3x-1) = 2x - 3$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਅਭਿਆਸ 12.3

1. ਵੰਡ ਕਰੋ—

(i) $20x^4 \div 10x^2$ (ii) $(-35y^4)$ by $(-7y^3)$ (iii) $16a^4$ by $-6a^2$

(iv) $7x^2y^2z^2 \div 21xyz$ (v) $24p^8q^8 \div (-8\ p^6q^4)$ (vi) $(-15x^2y^3z^2) \div 10x^2y\ z^2$

(vii) $8l^3m^3 \div (-16l^4m^2)$ (viii) $(-12x^2y) \div 20xy^2z$

2. ਦਿੱਤੀ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰੋ।

(i) $(3x^2 - 4x) \div 7x$ (ii) $(-12a + 22a^2 - 16a^3 + 4) \div 2a$

(iii) $(-8y^3 + 16y^2 + 14y + 1) \div 4y$

(iv) $(ax^8 - bx^6 + cx^4) \div x^4$ (v) $(15x^2y^3 - 10x^3y^2 + 2xy) \div (-5xy^2)$

3. ਭਾਗ ਕਰੋ :

(i) $5(2x + 1)\ (3x + 5) \div (2x + 1)$

(ii) $x\ (x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3) \div x\ (x + 1)$

(iii) $9a^2b^2\ (3c - 24) \div 27ab\ (c-8)$

(iv) $4yz\ (z^2 + 6z - 16) \div 2y\ (z + 8)$

(v) $(x^3\ y^6 - x^6\ y^3) \div x^3y^3$

(vi) $48xyz\ (3x-12)\ (5y - 30) \div 72\ (x - 4)\ (y - 6)$

4. ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

(i) $(x^2 + 6x + 8) \div (x + 2)$ (ii) $(x^2 - x - 42) \div (x + 6)$

(iii) $(p^2 - 6p - 27) \div (p - 9)$ (iv) $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$

(v) $(a^2 - 7a + 12) \div (a - 3)$ (vi) $(x^4 + 3x^2 - 10) \div (x^2 + 5)$ (**ਸੰਕੇਤ :** $x^2 = y$ ਲੋ)

5. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਵੰਡ ਕਰੋ।

(i) $(p^2 + 12p + 35)$ ਨੂੰ $(p + 7)$ ਨਾਲ (ii) $(9y^2 - 6y - 8)$ ਨੂੰ $(3y - 4)$ ਨਾਲ

6. ਭਾਗ ਕਰੋ :

(i) $z(5z^2 - 80)$ ਨੂੰ $5z\ (z+4)$ ਨਾਲ (ii) $10pq\ (p^2-q^2)$ ਨੂੰ $2p\ (p+q)$ ਨਾਲ

(iii) $15ab\ (16a^2 - 25)$ ਨੂੰ $10ab\ (4a+5)$ ਨਾਲ

(iv) $44\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ ਨੂੰ $11\ (x^2 - 8x)$ ਨਾਲ

(v) $39x^3\ (50x^2 - 98)$ ਨੂੰ $26x^2\ (5x + 7)$ ਨਾਲ

7. ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) $(4x^2-8x) \div (-4x^2) =$

(a) $-1 + 2x$ (b) $\frac{2}{x}$ (c) $-1+\frac{2}{x}$ (d) $2x$

(ii) $(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div xyz =$

(a) xyz (b) $x+y+z$ (c) $x^2 + y^2 + z^2$ (d) $\frac{xy}{z}$

(iii) $2x^2\ (x+1)\ (x+3) \div 4x\ (x+3) =$

(a) $2x\ (x+1)$ (b) $2x^2\ (x+1)$ (c) $\frac{x^2(x+1)}{2}$ (d) $\frac{x(x+1)}{2}$

(iv) $(72x^2 - 50) \div (6x - 5) =$

(a) $2\ (6x + 5)$ (b) $12x + 5$ (c) $12x^2 + 5$ (d) $2\ (12x + 5)$

(v) $(x^2-8x-20) \div (x-10) =$

(a) $(x - 2)$ (b) $(x + 2)$ (c) $x - 3$ (d) $x + 4$

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਕਿਸੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਅਤੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ਜਾਂ $(a-b)\ (a+b) = a^2-b^2$ ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਦੇ।*

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. (i) 5 (ii) $3y$ (iii) $7pq$ (iv) 1 (v) $4ab$ (vi) $6x$ (vii) $2xy^2$ (viii) 1

2. (i) $6(x-8)$ (ii) $7(p-2q)$ (iii) $-6z(4-5z)$ or $6z(5z-4)$

(iv) $9\ell m(2\ell+3a)$ (v) $5x^2yz(5y-3z)$ (vi) $abc(a+b+c)$

(vii) $xy(px+qy+rz)$ (viii) $5(2pq-3qr+4rp)$

3. (i) $(2p-3q)(3a-5b)$ (ii) $5(x^2+y^2)(3a-2b)$ (iii) $2(x+y)(2x+2y+1)$

(iv) $(2a-5b)(2a-5b-2)$ (v) $(5\ell+3m)(5\ell+3m-1)$

4. (i) $(x+y)(x+6)$ (ii) $(y-z)(y-3)$ (iii) $(3y-2)(4x+1)$

(iv) $(a-b)(ab+4)$ (v) $(x-6)(x^2+1)$ (vi) $(a+b)(a+b^2)$

(vii) $(x-2y)(3p+4q)$ (viii) $(r-7)(1-pq)$

5. (i) c (ii) a (iii) d (iv) a (v) c

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. (i) $(x+5)^2$ (ii) $(y-4)^2$ (iii) $(5p+3)^2$ (iv) $(7a+6b)^2$

(v) $4(5x-2y)^2$ (vi) $(p-q)^2$ (vii) $(\ell^2+m^2)^2$ (viii) $4(x-1)^2$

2. (i) $(5a+8b)(5a-8b)$ (ii) $(7x+6)(7x-6)$

(iii) $7(2x-3y)(2x+3y)$ (iv) $\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)$

(v) $8x^3(x+3)(x-3)$ (vi) $4pq$

(vii) $(4ab+5)(4ab-5)$ (viii) $(x-y+z)(x-y-z)$

3. (i) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ (ii) $(a+3)(a-3)(a^2+9)$

(iii) $(m-4)(m+4)(m^2+16)$ (iv) $(p+q+r)(p-q-r)[p^2+(q+r)^2]$

(v) $(a+b)^2(a-b)^2$

4. (i) $(a+b-c)(a+b+c)$ (ii) $(1-3\ell+4m)(1+3\ell-4m)$

(iii) $(5p-4q-7r)(5p-4q+7r)$

5. (i) $(x + 3)(x + 4)$ (ii) $(y - 3)(y - 7)$ (iii) $(a - 3)(a + 6)$

(iv) $3(p + 8)(p - 2)$ (v) $(q - 3)(q + 2)$ (vi) $(x - 14)(x + 3)$

(vii) $5(x + 2)(x + 3)$ (viii) $3(y-3)(y-4)$

6. (i) b (ii) b (iii) d (iv) c (v) d

ਅਭਿਆਸ 12.3

1. (i) $2x^2$ (ii) $5y$ (iii) $\frac{-8}{3}a^2$ (iv) $\frac{1}{3}xyz$ (v) $-3p^2q^4$ (vi) $\frac{-3}{2}y^2$

(vii) $\frac{-m}{2\ell^2}$ (viii) $\frac{-3x}{5yz}$

2. (i) $\frac{3x}{7} - \frac{4}{7}$ (ii) $-6 + 11a - 8a^2 + \frac{2}{a}$ (iii) $-2y^2 + 4y + \frac{7}{2} + \frac{1}{4y}$

(iv) $ax^4 - bx^2 + c$ (v) $-3xy + 2x^2 - \frac{2}{5y}$

3. (i) $5(3x + 5)$ (ii) $(x + 2)(x + 3)$ (iii) ab (iv) $2z(z - 2)$ (v) $y^3 - x^3$

(vi) $10xyz$

4. (i) $x + 4$ (ii) $x - 7$ (iii) $p + 3$ (iv) $7x$ (v) $a - 4$

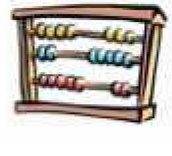
(vi) $x^2 - 2$

5. (i) $p+5$ (ii) $3y + 2$

6. (i) $(z - 4)$ (ii) $5q(p - q)$ (iii) $\frac{3}{2}(4a - 5)$ (iv) $4x(x + 3)$

(v) $3x(5x - 7)$

7. (i) c (ii) b (iii) d (iv) a (v) b



ਅਧਿਆਇ
13
ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ

ਸਿੱਖਣ ਉਦੇਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖੋਗੇ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨਾ ਅਤੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।*
- *ਰੁਝਾਨ (Trends) ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਅਤੇ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਵਿਚਲੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨਾ।*
- *x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ, ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ (cartesian) ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣਾ।*
- *ਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਉਣਾ ਅਤੇ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਪੜ੍ਹਨਾ।*

13.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਰਾਫ ਸੰਗਠਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਪੇਸ਼ਕਾਰੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਆਲੇਖਿਤ ਰੂਪ ਸਮਝਣਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੌਖਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅਖਬਾਰ, ਟੀ.ਵੀ., ਮੈਗਜ਼ੀਨ, ਕਿਤਾਬਾਂ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਵੀ ਗਰਾਫ਼ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਆਲੇਖ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਜਲਦੀ ਅਤੇ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਲਈ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ 'ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ' ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਜਿਵੇਂ ਛੜ ਗ੍ਰਾਫ਼, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ, ਗੋਲ ਨਕਸ਼ਾ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ 'ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼' 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

13.2 ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ (Linear Graph)

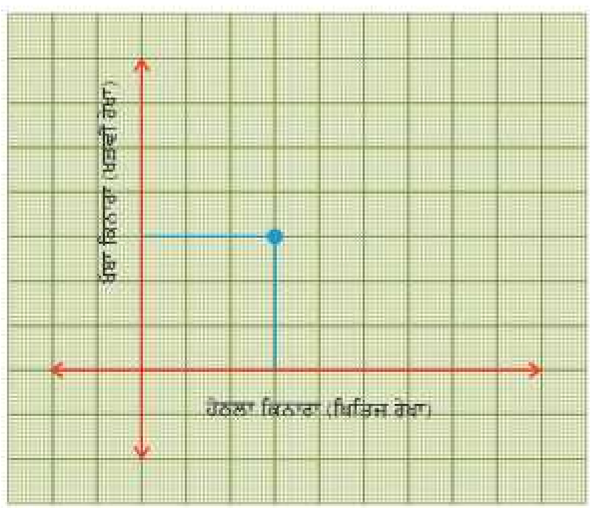
ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਖੰਡਾ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਈ ਵਾਰੀ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਅਟੁੱਟ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਗਰਾਫ਼ ਨੂੰ **ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਸ਼ੀਟ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ ਸ਼ੀਟ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

13.2.1 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ : (Location of Point)

ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਪੈਮਾਨਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾ ਕਿ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ, ਸਮਤਲ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ (ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ) ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ ਹੈ। ਦੂਸਰਾ, ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ?



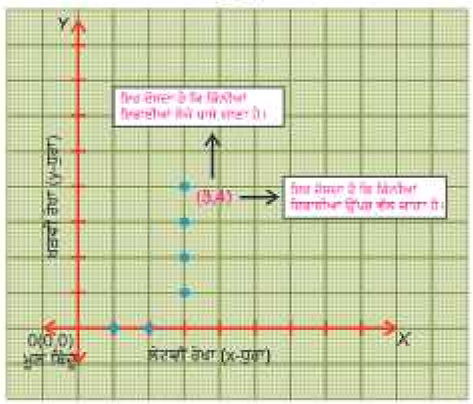
ਚਿੱਤਰ 13.1

17ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਰੈਨੇ ਦਕਾਰਤੇ ਨੇ ਛੱਤ ਦੇ ਇੱਕ ਖੂੰਜੇ ਕੋਲ ਕਿਸੇ ਕੀੜੇ ਮਕੌੜੇ ਨੂੰ ਚਲਦੇ ਵੇਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਤਲ ਉਪਰਲੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਾਰੇ ਜਾਣਨ ਸੰਬਧੀ ਸੋਚਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ। ਲੇਟਵੀਂ ਅਤੇ ਖੜਵੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਦੂਰੀਆਂ ਮਾਪ ਕੇ ਸਥਿਤੀ ਦੱਸਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਨਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅੱਜ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ (Cartesian System) ਵਿਧੀ ਵੱਜੋਂ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

13.2.2 ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (Co-ordinates) : ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਸੀਂ ਸਿਨੇਮਾ ਦੇਖਣ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਆਪਣੀ ਸੀਟ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਲਾਈਨ ਨੰਬਰ ਅਤੇ ਸੀਟ ਨੰਬਰ। ਇਹ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਲੱਭਣ ਦੀ ਮੂਲ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧੁਰੇ (ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਅਤੇ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ) ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਨੂੰ x–ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਨੂੰ y–ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y- ਧੁਰੇ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (Origin) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 0) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਗਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਗਰਿੱਡ ਦੀ ਤਰਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਬਿੰਦੂ (3, 4) ਨੂੰ ਜੋ y ਧੁਰੇ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

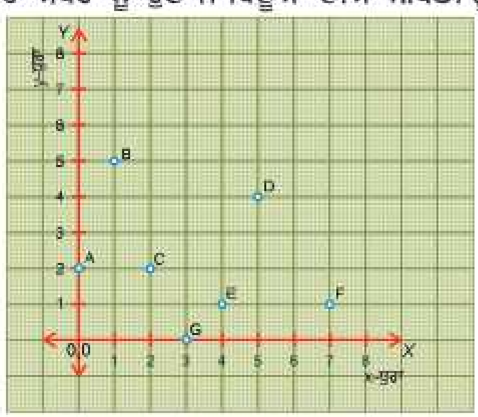
ਇੱਥੇ 3 ਨੂੰ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ **ਭੁਜ** ਅਤੇ 4 ਨੂੰ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ **ਕੋਟੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 13.2

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ *ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਅੰਕ* (3, 4) ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 13.1 ਚਿੱਤਰ 13.3 **ਵਿੱਚੋਂ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।**



ਚਿੱਤਰ 13.3

(i) **(7, 1)** **(ii)** **(5, 4)** **(iii)** **(0, 2)**

(iv) **(1, 5)** **(v)** **(3, 0)** **(vi) (2, 2)**

(vii) **(4, 1)**

ਹੱਲ : (i) (7, 1) ਬਿੰਦੂ F ਹੈ। (ii) (5, 4) ਬਿੰਦੂ D ਹੈ।

(iii) (0, 2) ਬਿੰਦੂ A ਹੈ। (iv) (1, 5) ਬਿੰਦੂ B ਹੈ।

(v) (3, 0) ਬਿੰਦੂ G ਹੈ। (vi) (2, 2) ਬਿੰਦੂ C ਹੈ।

(vii) (4, 1) ਬਿੰਦੂ E ਹੈ।

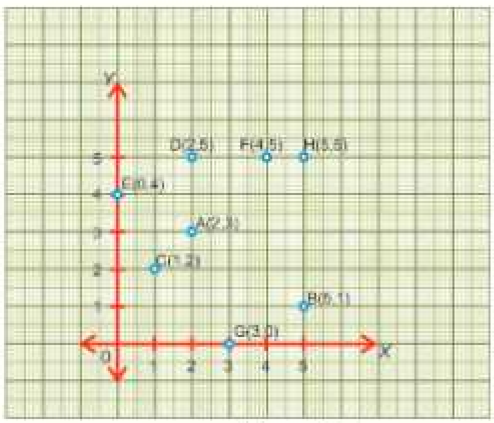
ਉਦਾਹਰਨ 13.2 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।**

(i) **A(2, 3)** **(ii)** **B (5,1)** **(iii) C(1, 2)**

(iv) **D (2, 5)** **(v)** **E (0, 4)** **(vi) F (4, 5)**

(vii) **G (3, 0)** **(viii) H (5, 5)**

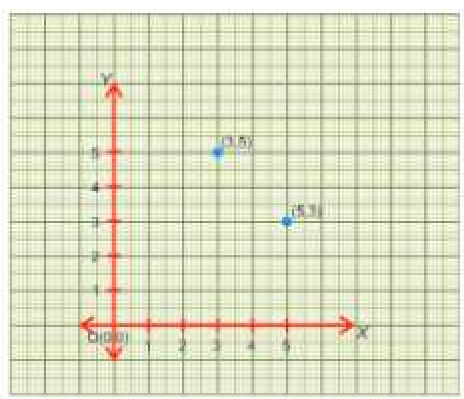
ਹੱਲ :



ਚਿੱਤਰ 13.4

ਉਦਾਹਰਨ 13.3 **ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (3, 5) ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ, ਕੀ ਇਹ (5, 3) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ?**

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂ (3, 5) ਲਈ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 3 ਅਤੇ y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 5 ਹੈ, ਗਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ x ਅਤੇ y ਧੁਰਾ ਬਣਾਉ। ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਫਿਰ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਜਾਉ। ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ (3, 5) 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਗਏ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (5, 3) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ, ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (3, 5) ਅਤੇ (5, 3) ਦੋਵੇਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 13.5

ਉਦਾਹਰਨ 13.4 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਨਾਮ**

ਲਿਖੋ।

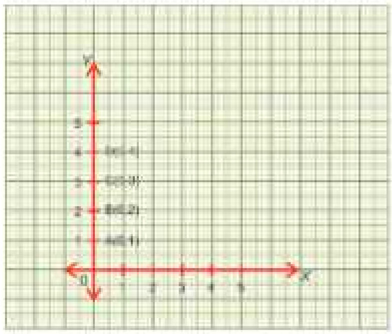
(i) **(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)**

(ii) **A (1, 1), B (2, 1), C (3, 1) D (4, 1), E (5, 1)**

(iii) **G (2, 2), H (3, 2), I (4, 2), J (5, 2)**

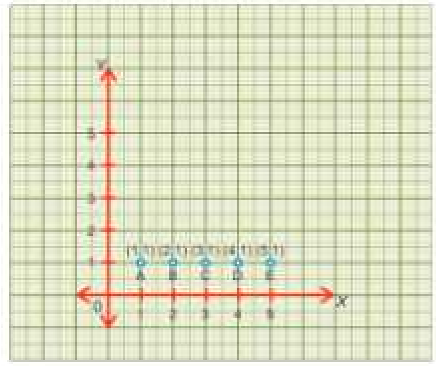
(iv) **K (2, 6) ; L (3, 5); M (5, 3) ; N (6, 2)**

ਹੱਲ : **(i)**



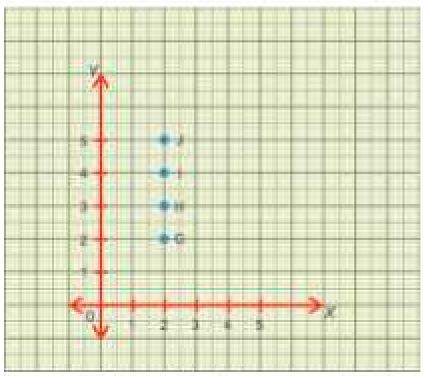
ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ y ਧੁਰਾ ਹੈ।

(ii)



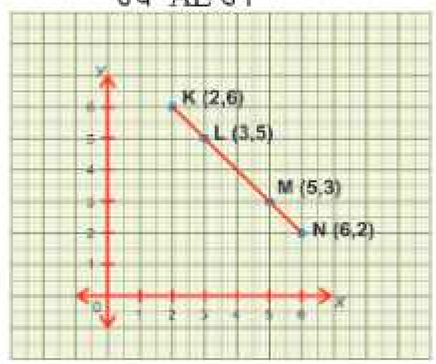
ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ AE ਹੈ।

(iii)



ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾGJ ਹੈ।

(iv)

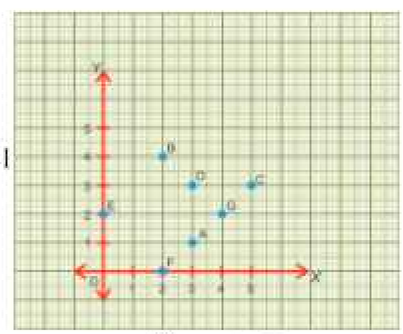


ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ KN ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 13.6

ਨੋਟ—ਉਪਰਲੇ ਹਰੇਕ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਗਰਾਫ਼ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 13.1



ਚਿੱਤਰ 13.7

1. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।
   (i) (0, 2) (ii) (2, 4) (iii) (3, 3)
   (iv) (5, 3) (v) (4, 2) (vi) (3, 1)
   (vii) (2, 0)

2. ਗਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।
   (i) A(3, 5) (ii) B(2,4) (iii) C (5, 2) (iv) D (0, 4)
   (v) E (5, 4) (vi) F (3, 4) (vii) G (4, 3) (viii) H (3, 0)

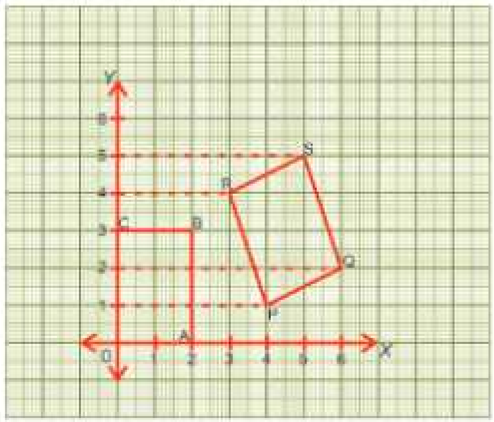
3. ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (2, 3) ਅਤੇ (3, 2) ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਕੀ ਦੋਨੋਂ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕੋ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਹਨ ?

4. ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕੀ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਹਨ।

   (a) (3, 7) ; (3, 4) ; (3, 2) ; (3, 0) (b) (0, 0) ; (2, 2) ; (4, 4) ; (6, 6)

   (c) (0, 4) ; (1, 4) ; (2, 4) ; (3, 4) (d) (2, 1) ; (3, 2) ; (4, 3) ; (5, 5)

5. ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.8

6. ਬਿੰਦੂਆਂ (2, 4) ਅਤੇ (7, 0) ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਬਿੰਦੂ (5, 1) ਇਸ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

7. **ਸਹੀ ਜਾਂ ਗਲਤ ਦੱਸੋ।**

   (i) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 0) ਹੈ।

   (ii) y ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   (iii) x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦਾ y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   (iv) ਬਿੰਦੂ (4, 3) ਅਤੇ (3, 4) ਇੱਕੋ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

   (v) ਬਿੰਦੂ (5, 2) ਦਾ ਕੋਟੀ 5 ਹੈ।

8. **ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :**

   (i) ਬਿੰਦੂ (1, 0) ਸਥਿਤ ਹੈ :

   (a) x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ (b) y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ (c) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ (d) ਕੋਈ ਨਹੀਂ

   (ii) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ?

   (a) (0, 3) (b) (1, 2) (c) (2, 3) (d) (4, 0)

   (iii) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ?

   (a) (0, 3) (b) (1, 2) (c) (2, 3) (d) (4, 0)

   (iv) ਬਿੰਦੂ (2, 7) ਦਾ ਭੁਜ ਹੈ :

   (a) 7 (b) 2 (c) 0 (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

(v) ਬਿੰਦੂ (7, 4) ਦੀ ਕੋਟੀ ਹੈ :

(a) 0 (b) 7 (c) 4 (d) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

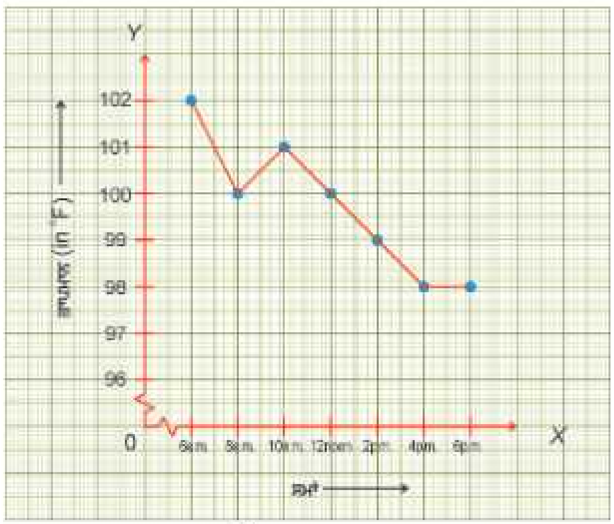
13.3. ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ (A line Graph)

ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ਼ ਉਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅੰਕ ਨਾਲ ਬਦਲਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੀਮਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਡਾਕਟਰ ਉਸ ਦੇ ਸਰੀਰ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਹਰੇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ 'ਤੇ ਰਿਕਾਰਡ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਚਿੱਤਰ ਨਿਰੂਪਣ ਨੂੰ ਸਮਾਂ, ਤਾਪਮਾਨ ਗਰਾਫ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਸਮਾਂ	6a.m	8a.m.	10a.m.	ਦੁਪਿਹਰ 12 ਵਜੇ	2p.m.	4p.m.	6p.m.
ਸਰੀਰ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ (°F)	102	100	101	100	99	98	98

x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਮਾਂ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਤਾਪਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਨਿਮਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(6,102), (8, 100), (10, 101), (12, 100), (2,99), (4,98), (6, 98)



ਚਿੱਤਰ 13.9

ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ? ਤਾਪਮਾਨ ਵਜੋਂ ਤੁਸੀਂ ਸਵੇਰੇ 6 ਵਜੇ ਵੱਧ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਪੈਟਰਨ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਫਿਰ ਇਹ 8 ਵਜੇ ਤੱਕ ਘੱਟਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫਿਰ ਦੁਬਾਰਾ 10 ਵਜੇ ਤੱਕ ਵੱਧਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸ਼ਾਮ ਦੇ 4 ਵਜੇ ਤੱਕ ਘਟਿਆ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸ਼ਾਮ ਦੇ 6 ਵਜੇ ਤੱਕ ਸਥਿਰ ਰਿਹਾ।

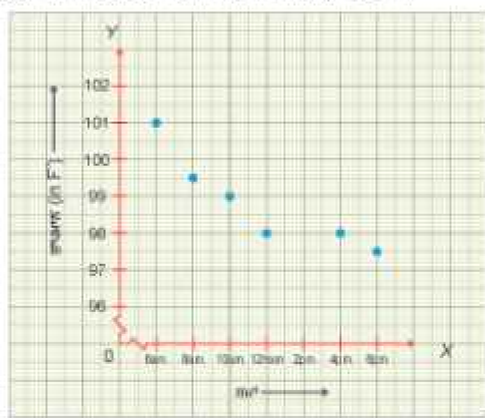
ਉਦਾਹਰਨ 13.5 ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ। ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

(i) ਦਰਸਾਇਆ ਗਰਾਫ਼ ਕੀ ਸੂਚਨਾ ਦੇ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਤਾਪਮਾਨ 99° ਹੈ ?

(iii) ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਮਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤਾਪਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਉਹ ਸਮੇਂ ਕਿਹੜੇ ਹਨ ?

(iv) ਸ਼ਾਮ ਦੇ 6 ਵਜੇ ਕਿੰਨਾ ਤਾਪਮਾਨ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 13.10

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਹਰ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਬਾਅਦ ਸਰੀਰ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸਵੇਰੇ 10 ਵਜੇ ਤਾਪਮਾਨ 99°F ਹੈ।

(iii) ਦੁਪਹਿਰ 12 ਵਜੇ ਅਤੇ ਸ਼ਾਮ ਦੇ 4 ਵਜੇ ਤਾਪਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(iv) ਸ਼ਾਮ ਦੇ 6 ਵਜੇ ਤਾਪਮਾਨ 97.5°F ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 13.6 ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ ਇੱਕ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਸ਼ਹਿਰ A ਤੋਂ ਸ਼ਹਿਰ B ਤੱਕ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ 500 ਕਿ.ਮੀ. ਹੈ। ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

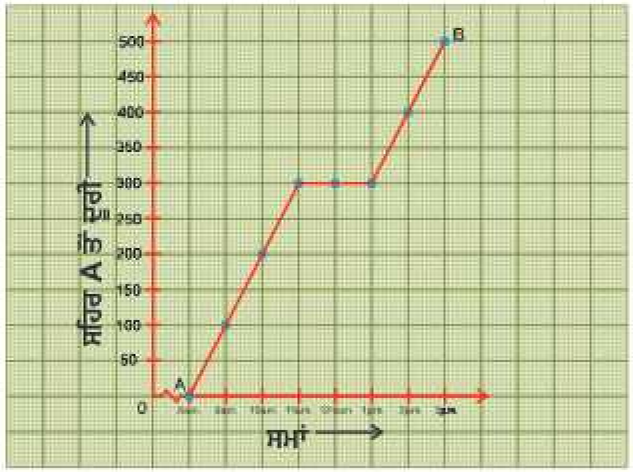
(i) ਕਾਰ ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ?

(ii) ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਨੇ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ?

(iii) ਕੀ ਸਫ਼ਰ ਦੌਰਾਨ ਕਾਰ ਥੋੜ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਲਈ ਰੁਕੀ ? ਉਹ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ ਦੱਸੋ ?

(iv) ਕਾਰ B 'ਤੇ ਕਦੋਂ ਪਹੁੰਚੀ ?

(v) ਪਹਿਲੇ 5 ਘੰਟਿਆਂ ਦੌਰਾਨ ਕਾਰ ਨੇ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ?



ਚਿੱਤਰ *13.11*

ਹੱਲ : (i) ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਕਾਰ ਸਵੇਰੇ 8 ਵਜੇ ਚੱਲੀ।

(ii) ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਦੌਰਾਨ ਕਾਰ ਨੇ 100 ਕਿਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ।

(iii) ਹਾਂ, ਸਫ਼ਰ ਦੌਰਾਨ ਕਾਰ ਥੋੜ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਲਈ ਰੁਕੀ, ਇਹ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ 11 a.m. ਤੋਂ 1 p.m. ਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਮੇਂ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਕੋਈ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ।

(iv) ਕਾਰ ਬਿੰਦੂ B 'ਤੇ ਸ਼ਾਮ ਦੇ 3 ਵਜੇ ਪਹੁੰਚੀ।

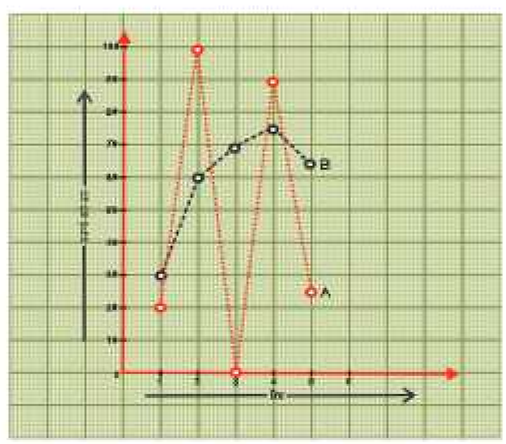
(v) ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਘੰਟਿਆਂ (ਭਾਵ 1 p.m. ਤੱਕ) ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ - 300 ਕਿ.ਮੀ.।

ਉਦਾਹਰਨ 13.7. ਦਿੱਤਾ ਆਲੇਖ ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ 2017 ਵਿੱਚ ਪੰਜ ਅਲੱਗ-2 ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

(i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਕਿਹੜੀ ਸੂਚਨਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਹੜੀ ਰੇਖਾ ਬੱਲੇਬਾਜ B ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈ ਗਈ ਹੈ ?

(iii) ਕੀ ਕਿਸੇ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਬੱਲੇਬਾਜ A ਅਤੇ B ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਰਨ ਬਣਾਏ ?



ਚਿੱਤਰ 13.12

(iv) ਕਿਹੜਾ ਬੱਲੇਬਾਜ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਜ਼ਿਆਦਾ ਇਕਸਾਰ ਹੈ ? (ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ)

ਹੱਲ : (i) x-ਧੁਰਾ 2017 ਸਾਲ ਦੌਰਾਨ ਖੇਡੇ ਗਏ ਮੈਚ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਦੋਨੋਂ ਬੱਲੇਬਾਜਾਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਰਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਗੂੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ (ਕਾਲੀ)

(iii) ਨਹੀਂ

(iv) ਬੱਲੇਬਾਜ B ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਜ਼ਿਆਦਾ ਇਕਸਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ A ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉਤਾਰ ਅਤੇ ਚੜ੍ਹਾਅ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ B ਦੀ ਸਾਰੇ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਵਿਚਕਾਰ ਜਿਹੀ ਕਾਰਗੁਜਾਰੀ ਰਹੀ ਹੈ।

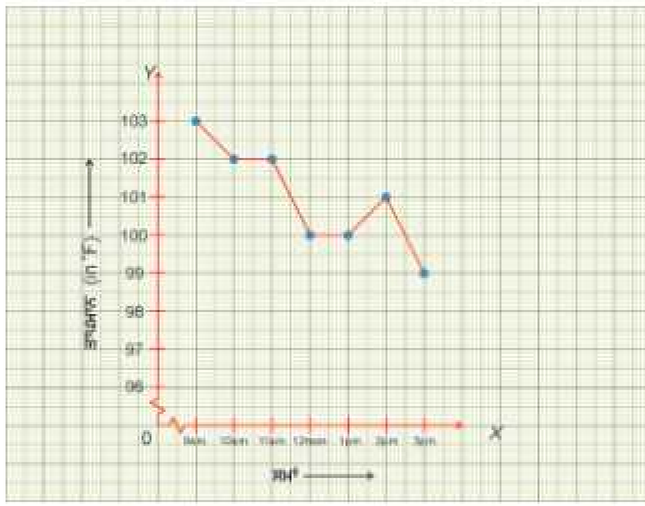
ਅਭਿਆਸ 13.2

1. ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ਼, ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲ ਇੱਕ ਰੋਗੀ ਦੇ ਹਰ ਘੰਟੇ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

   (i) 2 p.m. ਅਤੇ 3 p.m. ਤੇ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਕਿੰਨਾ ਸੀ ?

   (ii) ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ 100°F ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਸੀ ?

   (iii) ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਸਮਿਆਂ ਦੌਰਾਨ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਸੀ ?



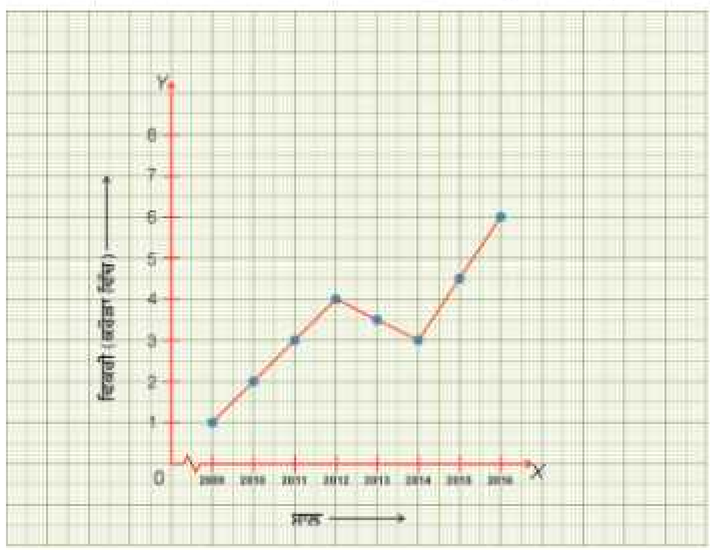
ਚਿੱਤਰ 13.13

2. ਦਿੱਤਾ ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਕ ਕੰਪਨੀ ਦੀ ਅਲੱਗ-2 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

   (i) 2010, 2011, 2014 ਅਤੇ 2016 ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਵਿਕਰੀ ਸੀ ?

   (ii) 2013 ਅਤੇ 2015 ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਵਿਕਰੀ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iii) ਕੀ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰੀ ਬਰਾਬਰ ਸੀ ?



ਚਿੱਤਰ 13.14

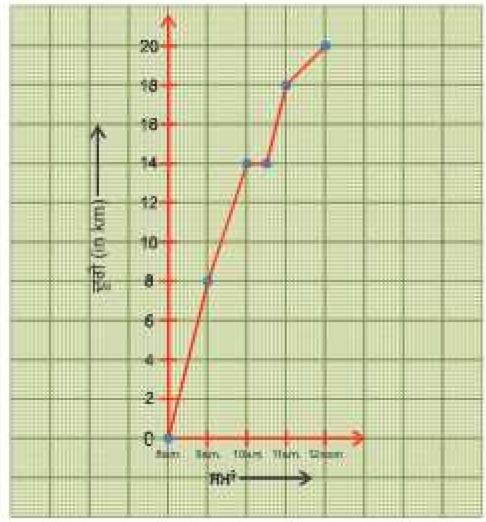
3. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਆਪਣੇ ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਦੇਣ ਲਈ ਸਾਇਕਲ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

   (i) ਸਾਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ ਕੀ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ?

   (ii) ਵਿਅਕਤੀ ਨੇ ਸਫ਼ਰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲਿਆ ?

   (iii) ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਵਪਾਰੀ ਦਾ ਸ਼ਹਿਰ ਕਿੰਨਾ ਦੂਰ ਸੀ ?

   (iv) ਕੀ ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਸਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਰੁਕਿਆ ਸੀ ?

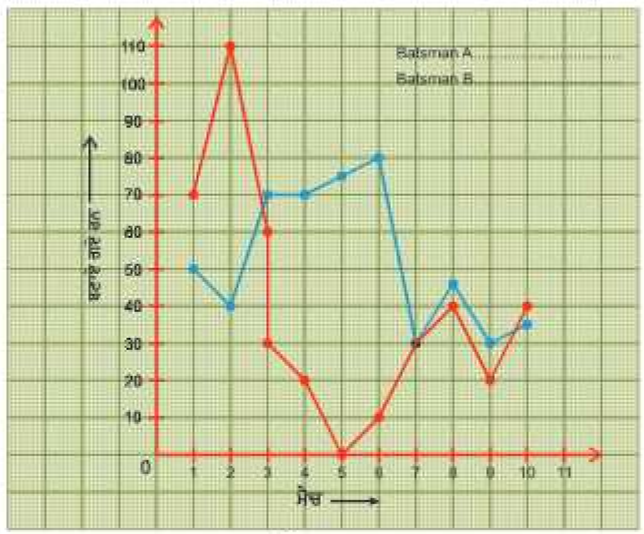


ਚਿੱਤਰ 13.15

4. ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ਼ 2016 ਵਿੱਚ ਹੋਏ 10 ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬੱਲੇਬਾਜ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਰਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

   (i) ਕੀ ਬੱਲੇਬਾਜ B ਨੇ 100 ਤੋਂ ਵੱਧ ਰਨ ਕਿਸੇ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹਨ, ਜੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿਹੜੇ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹਨ ?

   (ii) ਕੀ ਬੱਲੇਬਾਜ A ਅਤੇ B ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਰਨ ਬਣਾਏ ਹਨ, ਜੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿਹੜੇ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹਨ ?



ਚਿੱਤਰ 13.16

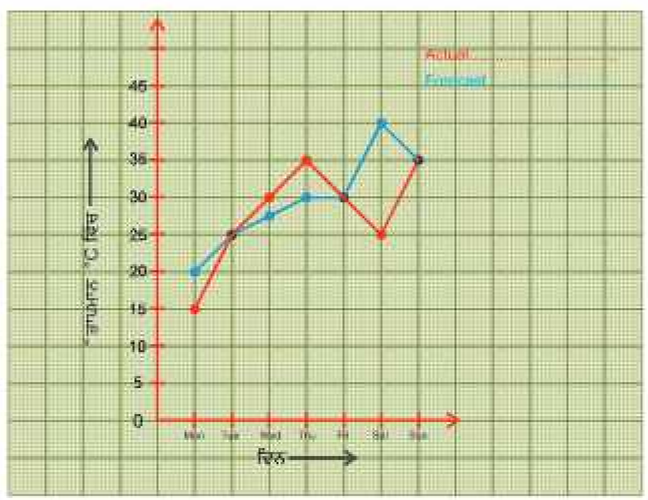
   (iii) ਦੋਨਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਿਰੰਤਰ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਪਰਖਿਆ ?

5. ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਅਤੇ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

   (i) ਕਿਹੜੇ ਦਿਨ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਅਤੇ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਸੀ।

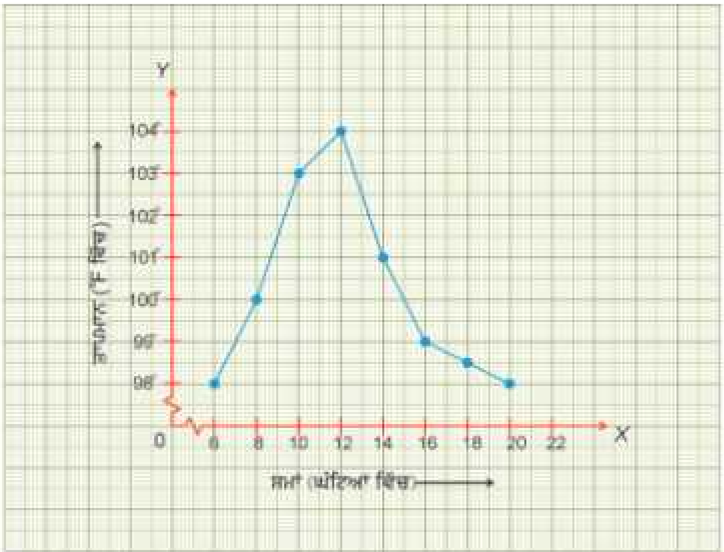
   (ii) ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਕਿੰਨਾ ਸੀ ?

   (iii) ਕਿਹੜੇ ਦਿਨ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਅਤੇ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਅੰਤਰ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੀ ?



ਚਿੱਤਰ 13.17

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮਾਂ-ਤਾਪਮਾਨ ਗਰਾਫ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।



ਚਿੱਤਰ 13.18

(i) ਕਿਹੜੇ ਸਮੇਂ ਤਾਪਮਾਨ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੀ ?

(a) 12 : 00 ਵਜੇ (b) 14: 00 ਵਜੇ (c) 6 : 00 ਵਜੇ (d) 20:00 ਵਜੇ

(ii) ਕਿਹੜੇ ਸਮੇਂ ਤਾਪਮਾਨ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸੀ ?

(a) 8:00 ਵਜੇ (b) 12:00 ਵਜੇ (c) 14:00 ਵਜੇ

(d) 6:00 ਵਜੇ ਅਤੇ 20:00ਵਜੇ

(iii) ਕਿਹੜੇ ਸਮੇਂ ਤਾਪਮਾਨ 103°F ਸੀ।

(a) 10:00 ਵਜੇ (b) 12:00 ਵਜੇ (c) 14:00 ਵਜੇ (d) 20:00 ਵਜੇ

(iv) 6:00 ਵਜੇ ਅਤੇ 20:00 ਵਜੇ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਅੰਤਰ ਕੀ ਹੈ ?

(a) 0°F (b) 1°F (c) 2°F (d) 3°F

(v) 10:00 ਵਜੇ ਤੋਂ 12:00 ਵਜੇ ਤੱਕ ਤਾਪਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ ?

(a) 1°F (b) 2°F (c) 3°F (d) 4°F

13.4 ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉਣਾ (Drawing a Graph)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ ਬਣਾਉਣਾ ਸਿੱਖਣਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਕਮੀ ਹੋਣ ਨਾਲ ਉਸੇ ਅਨੁਪਾਤ ਅਨੁਸਾਰ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਕਮੀ ਹੋਵੇ। ਜਿਵੇਂ ਜੇ ਅਸੀਂ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਖਪਤ ਵੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਬਿੱਲ ਵੀ ਵੱਧ ਆਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇ ਅਸੀਂ ਵੱਧ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਾਂਗੇ, ਤਾਂ ਪੈਟਰੋਲ ਡੀਜ਼ਲ ਦੀ ਖਪਤ ਵੀ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਨਾਲ ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਬਦਲਾਅ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ (ਨਿਯੰਤਰਿਤ ਚਲ) ਅਤੇ ਬਿਜਲੀ ਬਿਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਇੱਕ ਨਿਰਭਰ ਚਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਚਲਾਂ ਦਾ ਆਪਸੀ ਸੰਬੰਧ ਗਰਾਫ ਰਾਹੀਂ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

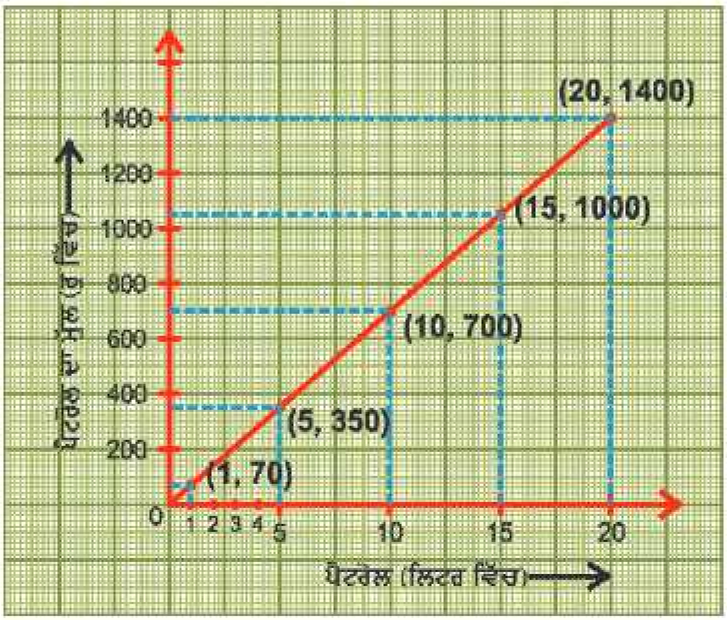
ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਨਿਯਮ :

1. ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ (ਭੁਜ) x – ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਤੇ ਨਿਰਭਰ ਚਲ ਕੋਟੀ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲਓ।
2. ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

ਉਦਾਹਰਨ 13.8 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।**

ਪੈਟਰੋਲ (ਲਿਟਰਾਂ ਵਿੱਚ)	1	5	10	15	20
ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਕੀਮਤ (ਰੁ.ਵਿੱਚ)	70	350	700	1050	1400

ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 13.19

ਹੱਲ : (i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਹੀ ਸਕੇਲ ਚੁਣੋ।

(ii) x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲਿਟਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਲਉ।

(iii) y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਕੀਮਤ ਲਉ।

(iv) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(v) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾਉ।

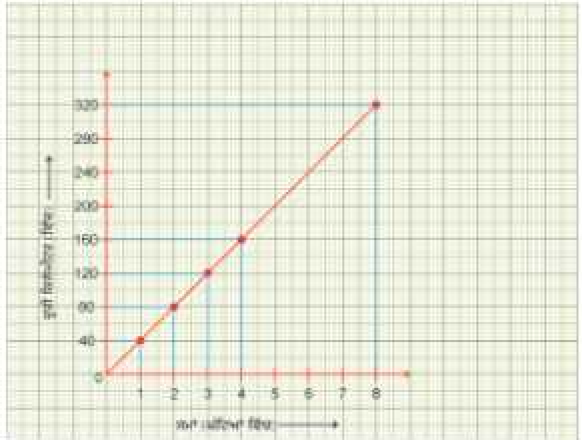
ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੀ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 0 ਲਿਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 13.9 **ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ।**

ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਭਾਰ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਵਿੱਚ)	1	2	5	7	10
ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ)	60	120	300	420	600

ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ 6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਅਤੇ 8 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :



ਚਿੱਤਰ 13.20

(i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਹੀ ਪੈਮਾਨਾ ਲਉ।

(ii) x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਲਉ।

(iii) y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਲਉ।

(iv) ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 60) ; (2, 120) ; (5 300) (7, 420) ; (10, 600) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(v) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਗਰਾਫ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹360 ਅਤੇ 8 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹480 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 13.10 : **ਗੁਰਪ੍ਰੀਤ ਇੱਕ ਮੋਟਰ ਸਾਇਕਲ ਨੂੰ 40 ਕਿ.ਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਸਥਿਰ ਰਫ਼ਤਾਰ 'ਤੇ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸਮਾਂ-ਦੂਰੀ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ (a) ਗੁਰਪ੍ਰੀਤ ਦੁਆਰਾ 100 ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ (b) 8 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਗੁਰਪ੍ਰੀਤ 45 ਕਿ.ਮੀ./ਘੰਟਾ ਦੀ ਸਥਿਰ ਰਫ਼ਤਾਰ 'ਤੇ ਚਲਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮਾਂ	ਦੂਰੀ
1 ਸਮਾਂ	40ਕਿ.ਮੀ.
2 ਸਮਾਂ	$2 \times 40 = 80$ਕਿ.ਮੀ.
3 ਸਮਾਂ	$3 \times 40 = 120$ਕਿ.ਮੀ.
4 ਸਮਾਂ	$4 \times 40 = 160$ਕਿ.ਮੀ.

ਸਮਾਂ (ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ)	1	2	3	4
ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ (ਕਿ.ਮੀ. ਵਿੱਚ)	40	80	120	160

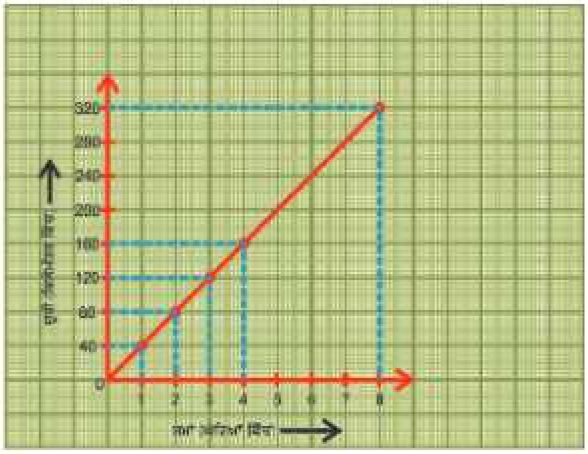
ਹੁਣ

(i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਹੀ ਸਕੇਲ ਚੁਣੋ। (ਚਿੱਤਰ 13.21)

(ii) x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਮਾਂ ਲਉ।

(iii) y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ ਲਉ।

(iv) ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 40) (2, 80) (3, 120) (4, 160) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.21

ਹੁਣ

(a) 100 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਗੁਰਪ੍ਰੀਤ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਸਮਾਂ = y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ 100km ਲਈ ਉਸਦੇ ਸੰਗਤ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਮਾਂ 2.5 ਘੰਟੇ ਹੈ।

(b) x-ਧੁਰੇ ਤੇ 8 ਘੰਟੇ 'ਤੇ ਸੰਗਤ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ 320km ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ।

(i)

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ (cm ਵਿੱਚ)	3	4	5	6	7	8
ਪਰਿਮਾਪ (cm ਵਿੱਚ)	12	16	20	24	28	32

ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗ੍ਰਾਫ ਹੈ ?

(ii)

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ (cm ਵਿੱਚ)	3	4	5	6	7
ਖੇਤਰਫਲ (cm^2 ਵਿੱਚ)	9	16	25	36	49

ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗ੍ਰਾਫ ਹੈ ?

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਦਾ ਸਹੀ ਸਕੇਲ ਲੈ ਕੇ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ।

(i) ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ

ਸਮਾਂ (ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ)	6a.m.	7a.m.	8a.m.	9a.m.
ਦੂਰੀ (ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਵਿੱਚ)	50	100	150	200

(a) ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗ੍ਰਾਫ ਹੈ ?

(b) ਕੀ ਗਰਾਫ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੀ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ?

(ii) ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ 'ਤੇ ਸਾਲਾਨਾ ਵਿਆਜ

ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ (₹ ਵਿੱਚ)	5000	10000	15000	20000
ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (₹ ਵਿੱਚ)	350	700	1050	1400

(a) ਕੀ ਗਰਾਫ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ?

(b) ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ₹ 30,000 ਦਾ ਸਾਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਤਾਲਿਕਾ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

ਭਾਰ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	1	2	3	4	5	6
ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ)	17	34	51	68	85	102

(a) ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ 10 ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) 136 ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਖੰਡ ਖਰੀਦੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ?

3. ਯਸ਼ ਇੱਕ ਕਾਰ 80 ਕਿ.ਮੀ. ਘੰਟਾ ਦੀ ਸਥਿਰ (Constant) ਰਫ਼ਤਾਰ 'ਤੇ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਸਮਾਂ ਦੂਰੀ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 200 ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਯਸ਼ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ?

(ii) $3\frac{1}{2}$ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ ਇਸੇ ਦਰ ਨਾਲ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ ਤੈਅ ਕੀਤੀ?

4. ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਜਮਾ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ 10% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਮਾ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ। ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

(i) ₹250 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਲਈ ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ।

(ii) ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਉੱਪਰ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ₹70 ਲੱਗੇਗਾ ।

ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਪੂਰਨਤਾ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹਨ :

- *ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨ ਦੇ ਅਤੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਇਕੱਤਰ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *ਰੁਝਾਨ (Trends) ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫਾਂ ਦੇ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ।*
- *x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਬਾਰੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ਿਅਨ ਪੱਧਤੀ ਬਾਰੇ।*
- *ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਤਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਉਣਾ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪੜ੍ਹਨ ਦੇ।*

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. (i) E (ii) B (iii) D (iv) C (v) G
(vi) A (vii) F

4. (a) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਹੈ। (b) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਹੈ।
(c) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਹੈ। (d) ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. A (2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 1), Q(6, 2), R(4, 4), S(5, 5)

7. (i) T (ii) T (iii) T (iv) F (v) F

8. (i) a (ii) d (iii) a (iv) b (v) c

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. (i) 101° ਅਤੇ 99°

(ii) ਦੁਪਹਿਰ 12 ਵਜੇ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ

(iii) ਦੁਪਹਿਰ 12 ਵਜੇ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ

2. (i) (i) 2 ਕਰੋੜ (ii) 3 ਕਰੋੜ (iii) 3 ਕਰੋੜ (iv) 6 ਕਰੋੜ

(ii) 1 ਕਰੋੜ

(iii) ਨਹੀਂ

3. (i) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ (ii) 4 :00 ਵਜੇ

(iii) 20km (iv) ਹਾਂ ਉਹ ਸਵੇਰੇ 10 ਵਜੇ ਰੁਕਿਆ

4. (i) ਹਾਂ, ਦੂਜੇ ਮੈਚ ਵਿੱਚ

(ii) ਹਾਂ, ਸੱਤਵੇਂ ਮੈਚ ਵਿੱਚ

(iii) ਬੱਲੇਬਾਜ A

5. (i) ਮੰਗਲਵਾਰ, ਸ਼ੁੱਕਰਵਾਰ ਅਤੇ ਐਤਵਾਰ

(ii) 40°C

(iii) ਸ਼ਨੀਵਾਰ

6. (i) a (ii) d (iii) a (iv) a (v) a

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. (a) ਹਾਂ (b) ਨਹੀਂ

2. (a) ਹਾਂ (b) (i) ਨਹੀਂ (ii) ₹2100

(c) (i) ₹170 (ii) 8ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.

3. (i) $2\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ (ii) 280ਕਿ.ਮੀ.

4. (i) ₹25 (ii) ₹700